Programovacia úloha 2

Téma Bézierove orezávanie

Termín Odovzdať do **4.4.2013** mailom na **gemeranova@sccg.sk** (archív so zdrojovými súbormi a spustiteľným súborom /podľa pokynov nižšie/)

Cieľom druhej programovacej úlohy je vytvoriť aplikáciu, ktorá bude riešiť polynomické rovnice. Riešenie bude vyžadovať znalosti Bézierových kriviek a polárnej formy. Zároveň sa vykreslí graf funkcie, pričom je možné použiť kód predchádzajúcej programovacej úlohy.

Všeobecné požiadavky

Program bude naprogramovaný v jazyku a prostredí, ktoré bolo vopred dohodnuté s cvičiacim. Podmienkou je, aby sa dala úloha jednoducho skontrolovať. Program musí byť možné spustiť na čistom stroji (knižnice štandardne nedodávané s operačným systémom je potrebné pribaliť), resp. sa musí dať skompilovať. V každom prípade je však potrebné poslať všetky zdrojové súbory.

V prípade tejto úlohy sa interaktivita obmedzuje na zadávanie parametrov. Hľadanie koreňov sa vykoná na požiadanie (používateľ klikne na tlačidlo a pod.). Opäť, žiaden parameter nemá byť nezmyselne obmedzovaný v rozsahu, konkrétne má byť možné zadať najmenšiu možnú zmysluplnú hodnotu. Ak sa bude ovládanie líšiť od vzorovej aplikácie, uveďte ho buď v aplikácii alebo v maile. V aplikáciach nepoužívajte špeciálnu klávesu 'Alt'.

Upozornenie Oddeľovač desatinnej časti reálneho čísla je reprezentovaný znakom ',' alebo '.' v závislosti od lokálnych nastavení a použitej funkcie! Ak vami použitá metóda konverzie stringu na reálne číslo závisí od lokálnych nastavení (`FloatToStr`), tak prípadné (pred)vypĺňanie komponent reťazcom reprezentujúcim reálne číslo robte taktiež konverziou (`StrToFloat`). V opačnom prípade sa používa ako oddeľovač desatinná bodka.

Zadanie

Úlohou je naprogramovať aplikáciu hľadajúcu korene polynomickej funkcie na zadanom intervale. Graf funkcie ilustračne vykreslite, napríklad použitím ľubovoľnej vykresľovacej metódy Bézierovej krivky z predchádzajúcej úlohy. Vykreslený graf nemá byť interaktívny, je však možné implementovať jeho škálovanie (koliečkom myši a pod.). Na grafe zvýraznite nájdené korene. Aplikácia/postup hľadania pozostávajú z nasledovných krokov:

Vstupné parametre Program vyžaduje zadanie polynómu a počiatočného intervalu. Počiatočný interval je reprezentovaný dvoma reálnymi číslami a a b ($[a, b]$). Polynóm má byť možné zadať ako reťazec v nasledovnom formáte:

- Počet medzier v texte je nepodstatný (všetky medzery na začiatku spracovania odstráňte)
- Reťazec pozostáva z niekoľkých členov – monómov, oddelených aditívnym operátorom (`+`, `-`). Prvý monóm nemusí mať znamienko. Vhodným spracovaním je rozdeliť reťazec na jednotlivé členy – hľadajte v reťazci znak `+` a `-`. Ten, ktorý sa našiel viac vľavo oddeľuje dva monómy. Prvý spracujte a z reťazca odstráňte. Pokračujte, kým sa v reťazci nachádzajú hľadané znaky.
- Monóm pozostáva z koeficientu (reálne číslo), písmena `t` a exponentu v tvare `^x`, kde x je prirodzené číslo. V prípade, že chýba koeficient, použije sa hodnota 1. V prípade, že chýba znak `t`, jedná sa o absolútny člen. Ak chýba len exponent, jedná sa o lineárny člen. Vhodný postup spracovania je hľadať znak `t`. Ak sa nenájde, konvertovať celý reťazec na reálne číslo (absolútny člen), inak rozdeliť reťazec na dve časti. Prvá je buď prázdna (koeficient nastavíme na 1), alebo obsahuje reálne číslo. Druhá je buď prázdna (exponent je 1), alebo obsahuje exponent (prirodzené číslo za znakom `^`).

Váš program nemusí byť schopný ošetriť všetky potenciálne chyby spojené s nekorektným vstupom, korektné vstupy však musia byť správne spracované. Príklady vstupov sa nachádzajú na konci dokumentu.

Riadiace vrcholy Na aktuálnom pracovnom intervale (pri prvej iterácii sa pracuje so štartovacím intervalom $[a, b]$ zadaným používateľom) sa funkcia namodeluje Bézierovou krivkou. Zadaný polynóm reprezentuje y-ovú zložku krivky, x-ovou je rovnomerne parametrizovaný interval $[a, b]$. Nech $\mathbf{p}_y$ je polárna forma k nášmu polynómu. Potom hodnoty polárnej formy $\mathbf{p}_y$ pre rôzne kombinácie koncových bodov aktuálneho intervalu nám dávajú y-ové súradnice riadiacich vrcholov hľadanej krivky. Keďže naša krivka je vlastne funkciou, x-ová zložka je reprezentovaná polynómom t, ku ktorému prislúcha polárna forma $\mathbf{p}_x$.

Príklad: pre polynóm $\mathbf{p}(t) = 3t^3 + 2t^2 - 5t + 1$ máme polárnu formu (3. stupňa)

$$\mathbf{p}_y(t_1, t_2, t_3) = \frac{3}{\binom{3}{3}} t_1 t_2 t_3 + \frac{2}{\binom{3}{2}} \Big(t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3 \Big) - \frac{5}{\binom{3}{1}} \Big(t_1 + t_2 + t_3 \Big) + \frac{1}{\binom{3}{0}} 1.$$

Polárna forma pre x-ovú zložku je

$$\mathbf{p}_x(t_1, t_2, t_3) = \frac{1}{3} (t_1 + t_2 + t_3)$$

Riadiace vrcholy pre Bézierovu krivku reprezentujúcu zadaný polynóm na intervale $[a, b]$ sú potom nasledovné:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_x(a, \dots, a, a) \\ \mathbf{p}_y(a, \dots, a, a) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{p}_x(a, \dots, a, b) \\ \mathbf{p}_y(a, \dots, a, b) \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \mathbf{p}_x(b, \dots, b, b) \\ \mathbf{p}_y(b, \dots, b, b) \end{bmatrix}$$

čo vieme triviálnym určením hodnôt funkcie $\mathbf{p}_x$ prepísať ako:

$$\begin{bmatrix} a + 0\frac{b-a}{n} \\ \mathbf{p}_y(a, \ldots, a, a) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a + 1\frac{b-a}{n} \\ \mathbf{p}_y(a, \ldots, a, b) \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} a + n\frac{b-a}{n} \\ \mathbf{p}_y(b, \ldots, b, b) \end{bmatrix}$$

Na výpočet hodnoty polárnej formy môžete využiť funkcie, ktoré sa nachádzajú v zdrojových súboroch stiahnuteľných zo stránky.

Konvexný obal Z teórie vieme, že Bézierova krivka sa nachádza v konvexnom obale svojich riadiacich vrcholov. To znamená, že graf funkcie (a teda aj všetky korene) sa nachádza v tomto obale. Nájdeme teda prienik konvexného obalu a osi x a zúžime tak prehľadávaný interval.

Namiesto hľadania celého konvexného obalu však môžeme proces zjednodušiť. Dôležitý je len prienik s osou x a teda nás zaujímajú len priesečníky hrán konvexného obalu s osou. Priesečník s osou majú len také hrany, ktorých jeden koncový bod je nad osou a druhý pod osou. Náš nový interval je určený priesečníkmi s minimálnou a maximálnou hodnotou.

Iterácie Aplikovaním predchádzajúcich krokov sa nám zúžil prehľadávaný interval. V tomto kroku analyzujeme niekoľko stavov.

- Dĺžka intervalu je menšia ako nejaké ε_{stop}. Interval je dostatočne malý a teda ho prehlásime za bod – hľadaný koreň. Funkcia hľadania v tomto bode končí. Aplikácia vypíše nájdený koreň.
- Dĺžka intervalu je väčšia ako ε_{stop} a od poslednej iterácie sa zmenšila o viac ako ε_{split}. V tomto prípade pokračujeme v iteráciach algoritmu s novým (menším) prehľadávaným intervalom.
- Dĺžka intervalu je väčšia ako ε_{stop} a od poslednej iterácie sa zmenšila o menej ako ε_{split}. Pravdepodobne sa v prehľadávanom intervale nachádza viacero koreňov. Interval teda rozdelíme na dva a rekurzívne necháme vyhľadať korene v ľavej aj pravej časti pôvodného intervalu.

Vykreslenie Aby mal používateľ predstavu o približnom tvare funkcie, vykreslíme jej graf. Je možné použiť kód z predchádzajúcej programovacej úlohy. Riadiace vrcholy krivky zistíme aplikovaním postupu z vyššie uvedeného bodu (riadiace vrcholy) pre počiatočný interval. Keďže používateľom zadaný interval nezodpovedá rozmerom komponenty, do ktorej budeme krivku vykresľovať, treba vykonať transformáciu súradníc. Ak zadaný interval je $[a, b]$ a šírka komponenty w, tak bod $p \in [a, b]$ bude mať obraz v bode $p' = \frac{p-a}{b-a} \cdot w$. Pre y-ovú súradnicu platí podobný vzorec. Nájdené korene zvýraznite.

Výsledná aplikácia môže mať problém nájsť niektoré korene, resp. môže niektoré korene nájsť viackrát. Správanie závisí od použitých konštánt ε a od implementovania operácií.

Snažte sa aplikáciu spraviť tak, aby pri rovnakých nastaveniach, aké sú vo vzorovej aplikácii dávala vaša rovnaké výsledky. Stačí sa zamerať na dva zabudované polynómy s prednastaveným počiatočným intervalom.

Vzorová aplikácia používa nasledovné nastavenia/postupy: $\varepsilon_{stop} = 0.0001$, $\varepsilon_{split} = 0.000001$. Pri každej iterácií sa v prípade, že nedôjde k vetveniu ani k ukončeniu upravia nové koncové body intervalu tak, že sa interval na každom konci rozšíri o $\varepsilon_{stop}/4$ (aby sa nám náhodou pri nepresnostiach s reálnymi číslami nepreskočil koreň). Ak sa interval delí na 2 časti, ľavej zodpovedá interval $[a, (a+b)/2]$, pravej interval $[(a+b)/2 + \varepsilon_{stop}/2, b]$. Korene, ktoré sa nájdu viackrát sa dajú odstrániť na konci – prechodom usporiadaného zoznamu koreňov vieme identifikovať (a následne odstrániť) tie, ktoré sú od predchádzajúceho vzdialené o menej ako ε_{split}.

Vo vzorovej aplikácii sú zabudované dva polynómy, aproximujúce funkcie *sin* a *cos* pomocou Taylorovho radu:

```
sin_7(t) = t - 0.16667t^3 + 0.00833t^5 - 0.00019t^7
```

na intervale $[-3.5, 3.5]$ a

```
cos_8(t) = 1 - 0.5t^2 + 0.04166t^4 - 0.00138t^6 + 0.00002t^8
```

na intervale $[-5.0, 5.0]$.