

Programovacia úloha 3

Téma Interpolačné schémy

Termín Odovzdať do **18.4.2013** mailom na **gemeranova@sccg.sk** (archív so zdrojovými súborami a spustiteľným súborom /podľa pokynov nižšie/)

Cieľom tretej programovacej úlohy je naprogramovať aplikáciu na vykreslenie krivky interpolujúcej zadané body. Na riešenie problému sa použije kubický C_1 spojitý Bézierov splajn a Lagrangeova interpolácia.

Všeobecné požiadavky

Program bude naprogramovaný v jazyku a prostredí, ktoré bolo vopred dohodnuté s cvičiacim. Podmienkou je, aby sa dala úloha jednoducho skontrolovať. Program musí byť možné spustiť na čistom stroji (knižnice štandardne nedodávané s operačným systémom je potrebné pribalíť), resp. sa musí dať skompilovať. V každom prípade je však potrebné poslať všetky zdrojové súbory.

Ak nebude uvedené inak, výsledný program má umožniť klikaním do plochy pridávať a mazať riadiace vrcholy a ťahaním ich presúvať. Vykresľovaná krivka má byť pri každej zmene prekresľovaná (presúvanie riadiacich vrcholov, zmena parametrov). Žiaden parameter nemá byť nezmyselne obmedzovaný v rozsahu, konkrétne má byť možné zadať najmenšiu možnú zmysluplnú hodnotu. Ak sa bude ovládanie líšiť od vzorovej aplikácie, uveďte ho buď v aplikácii alebo v maile. V aplikáciach nepoužívajte špeciálnu klávesu 'Alt'.

Zadanie

Úlohou je naprogramovať aplikáciu vykresľujúcu krivku, ktorá interpoluje zadané body. Na vykreslenie použite dve rôzne metódy, pričom zadávané sady bodov môžu byť nezávislé. Navyše, úlohu je možné rozdeliť do samostatných aplikácií. Nasledujú popisy požadovaných metód interpolácie:

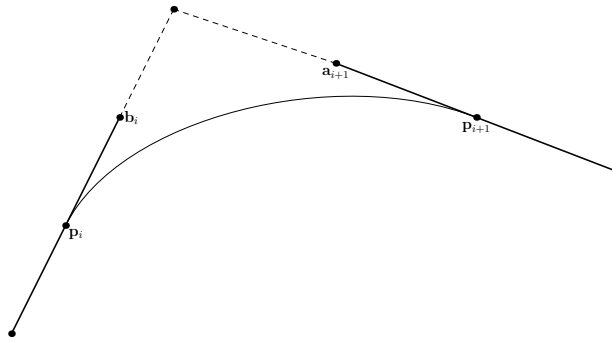
Kubický Bézierov splajn Používateľ zadá sadu bodov $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n$ a počet požadovaných vzoriek na segment (časť krivky medzi susednou dvojicou bodov) s . Pre každý bod \mathbf{p}_i sa automaticky vytvorí dvojica bodov $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i$, pre ktoré platí $\mathbf{p}_i = (\mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i) / 2$ (bod \mathbf{p}_i teda leží v strede úsečky $\overline{\mathbf{a}_i\mathbf{b}_i}$).

Splajn vykresľujeme po segmentoch, ktoré vždy spájajú dva susedné body $\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{i+1}$. Tento segment je vykreslený pomocou kubickej Bézierovej krivky, ktorej riadiace vrcholy sú $(\mathbf{p}_i, \mathbf{b}_i, \mathbf{a}_{i+1}, \mathbf{p}_{i+1})$. Na každom segmente vykresľujte Bézierovu krivku rovnako vzorkovanú – podľa používateľského parametru s . Môžete použiť rôzne vyčíslňovacie metódy, ale priamy výpočet de Caseljauovým algoritmom bude stačiť. Nepoužívajte vyčíslňovanie bodov krivky pomocou kombinačných čísel. Pomocné body $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i$ spojte úsečkou, riadiaci polygón nevykresľujte.

Pri posúvaní riadiacich vrcholov treba dodržať nasledovné:

- Pomocné body \mathbf{a}_i a \mathbf{b}_i sú viazané na interpolovaný bod \mathbf{p}_i . Teda pri presune bodu \mathbf{p}_i je potrebné presúvať aj pomocné body.
- Pri zmene pozície bodu \mathbf{a}_i (alebo \mathbf{b}_i) je potrebné dohliadnuť, aby neustále platilo, že interpolovaný bod \mathbf{p}_i je stredom úsečky $\overline{\mathbf{a}_i\mathbf{b}_i}$. Hýbe sa druhým pomocným bodom, bod \mathbf{p}_i ostáva na mieste.

Používateľ zadáva len interpolované body, pomocné body sa vytvárajú automaticky. V prípade zadania prvého bodu (\mathbf{p}_0) sa čaká s vytvorením pomocných bodov až na zadanie ďalšieho interpolovaného bodu (\mathbf{p}_1). Pomocné body sa potom vytvárajú tak, aby platilo, že $\mathbf{p}_i + 2(\mathbf{b}_i - \mathbf{p}_i)$ a $\mathbf{p}_{i+1} + 2(\mathbf{a}_{i+1} - \mathbf{p}_{i+1})$ bol ten istý bod (pozri obr. 1). V prípade prvej dvojice interpolovaných bodov môžete položiť všetky body (aj pomocné) kolieárne. Mazať je možné len body \mathbf{p}_i , ktoré odstránia aj príslušné pomocné body.



Obr. 1: Inicializácia pomocných vrcholov

Výsledný splajn je C_1 spojitý. Keďže pozostáva z Bézierových segmentov, vnútri segmentov je nekonečnekrát diferencovateľný. Problém s diferencovateľnosťou môže byť teda len v interpolovaných bodoch, kde sa stretávajú dve Bézierove krivky. Podmienky kladené na pomocné vrcholy nám však zaručujú, že v danom interpolovanom bode je možné krivku (aspoň) raz derivovať.

Lagrangeova interpolácia Používateľ zadá sadu bodov $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n$ a počet požadovaných vzoriek na segment (časť krivky medzi susednou dvojicou bodov) s . Pre zadané body je potrebné si určiť parametre t_0, \dots, t_n ; ($t_{i+1} > t_i$), pričom platí, že vzdialenosti medzi parametrami zodpovedajú vzdialenostiam medzi bodmi. Presnejšie – platí:

$$|\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i| : |\mathbf{p}_{j+1} - \mathbf{p}_j| = (t_{i+1} - t_i) : (t_{j+1} - t_j)$$

Pozor! nezabudnite, že pri zmene pozície niektorého bodu je potrebné vyrátať nové parametre.

Výsledná krivka bude pozostávať zo segmentov spájajúcich susedné body. Pre i -ty segment (spájajúci body \mathbf{p}_i a \mathbf{p}_{i+1}) sa bude parameter pre vykreslenie pohybovať v intervale $t \in [t_i, t_{i+1}]$ a hodnoty krivky budeme vyčísľovať v s bodoch (počet vzoriek). Vypočítané body spojíme lomenou čiarou. Vzorec pre Lagrangeovu interpoláciu je nasledovný:

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i L_i^n(t), \quad L_i^n(t) = \frac{\prod_{j \neq i} (t - t_j)}{\prod_{j \neq i} (t_i - t_j)}$$