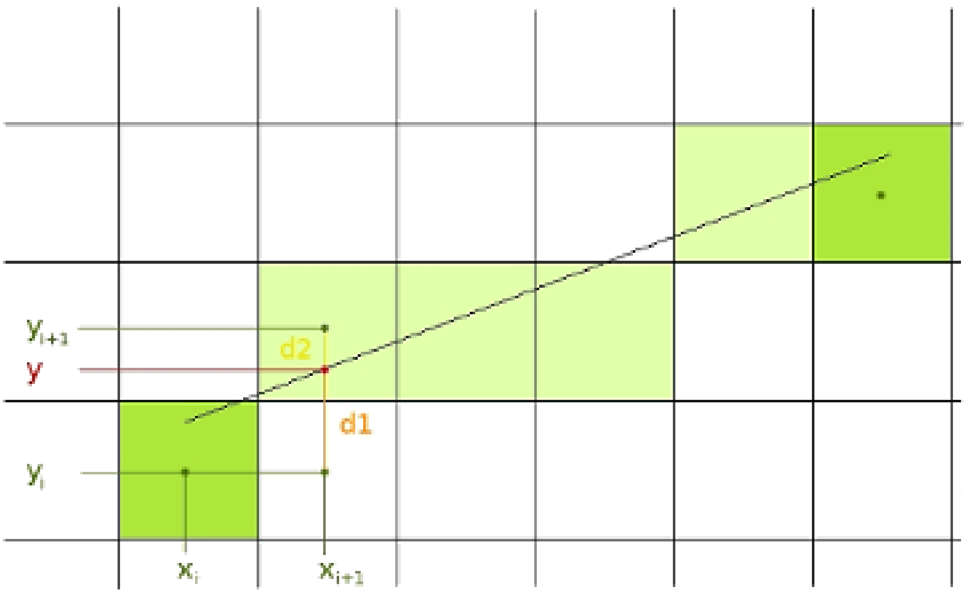
Bresenhamov algoritmus

ODVODENIE ALGORITMU PRE PRVÝ OKTANT

Rasterizujeme úsečku AB, pre ktorú je smernica $m \in \langle 0, 1 \rangle$ a bod A je naľavo od bodu B.



ROZHODOVANIE:

$$x_{i+1} = x_i + 1$$
$$y_{i+1} = \begin{cases} y_i, & d_1 < d_2 \Leftrightarrow d_1 - d_2 < 0 \\ y_i + 1, & d_1 > d_2 \Leftrightarrow d_1 - d_2 > 0 \end{cases}$$

Vypočítame si y-ovú súradnicu prislúchajúcu súradnici $x_{i+1} = x_i + 1$ ležiacej na úsečke AB:
$$y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x_i + 1) + q$$
Pre d_1 a d_2 platí:

$$y_i + d_1 = y \Rightarrow d_1 = y - y_i$$
$$y + d_2 = y_{i+1} = y_i + 1 \Rightarrow d_2 = y_i + 1 - y$$

ODVODENIE ALGORITMU

Dosadením y do vzťahu pre výpočet d_1 a d_2 dostávame:

$$d_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x_i + 1) + q - y_i$$
$$d_2 = y_i + 1 - \frac{\Delta y}{\Delta x}(x_i + 1) - q$$

$$\Delta d = d_1 - d_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x_i + 1) + q - y_i - y_i - 1 + \frac{\Delta y}{\Delta x}(x_i + 1) + q$$
$$\Delta d = 2\frac{\Delta y}{\Delta x}(x_i + 1) - 2y_i + 2q - 1$$

Prenásobením celej rovnosti Δx dostávame:

$$\Delta x \Delta d = 2\Delta y (x_i + 1) - 2\Delta x y_i + 2q\Delta x - \Delta x$$

Uvedomte si, že Δx je v tomto oktante vždy kladné číslo, čiže po prenásobení Δd touto konštantou sa znamienko ľavej strany nezmení.

Ľavú stranu označme p_i a na pravej strane konštantu $2q\Delta x - \Delta x$ označme C. Vyjadrime p_{i+1} pomocou p_i:

$$p_i = 2\Delta y (x_i + 1) - 2\Delta x y_i + C$$
$$p_{i+1} = 2\Delta y (x_{i+1} + 1) - 2\Delta x y_{i+1} + C$$

$$p_{i+1} - p_i = 2\Delta y (x_{i+1} + 1) - 2\Delta x y_{i+1} - 2\Delta y (x_i + 1) + 2\Delta x y_i$$

Úpravou tohto rozdielu a využijúc, že $x_{i+1} = x_i + 1$ dostávame:

$$p_{i+1} - p_i = 2\Delta y - 2\Delta x y_{i+1} + 2\Delta x y_i$$

Máme teda:

1. ak $y_{i+1} = y_i \Rightarrow p_{i+1} - p_i = 2\Delta y \Rightarrow p_{i+1} = p_i + 2\Delta y$
2. ak $y_{i+1} = y_i + 1 \Rightarrow p_{i+1} - p_i = 2\Delta y - 2\Delta x \Rightarrow p_{i+1} = p_i + 2\Delta y - 2\Delta x$

Čiže máme rozhodovacie pravidlo:

ak $p_i < 0$ vykresli bod $[x_i + 1, y_i]$ a rátaj $p_{i+1} = p_i + 2\Delta y$
ak $p_i > 0$ vykresli bod $[x_i + 1, y_i + 1]$ a rátaj $p_{i+1} = p_i + 2\Delta y - 2\Delta x$

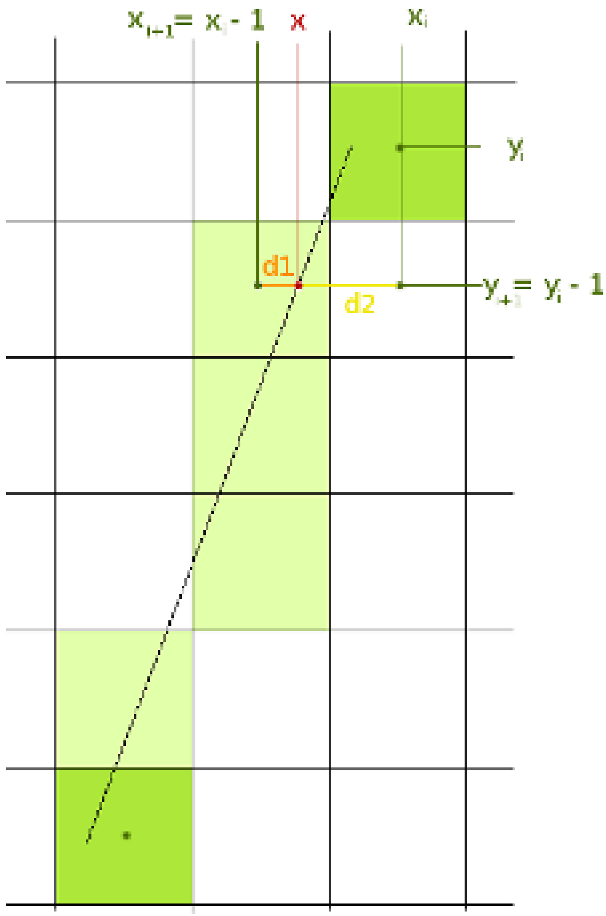
Inicializácia p - do rovnice úsečky dosadíme začiatocný bod A so súradnicami $[x_1, y_1]$:

$$p_1 = 2\Delta y(x_1 + 1) - 2\Delta x(y_1) + 2q\Delta x - \Delta x$$
$$p_1 = 2\Delta y(x_1 + 1) - 2\Delta x(\tfrac{\Delta y}{\Delta x}x_1 + q) + 2q\Delta x - \Delta x$$
$$p_1 = 2\Delta y - \Delta x$$

viktoria.bakurova@fmph.uniba.sk

ODVODENIE ALGORITMU PRE ŠIESTY OKTANT

Rasterizujeme úsečku AB, pre ktorú je smernica $m > 1$ a bod A je napravo od bodu B.



ROZHODOVANIE:

$$y_{i+1} = y_i - 1$$

$$x_{i+1} = \begin{cases} x_i, & d_1 > d_2 \Leftrightarrow d_1 - d_2 > 0 \\ x_i - 1, & d_1 < d_2 \Leftrightarrow d_1 - d_2 < 0 \end{cases}$$

Vypočítame si x-ovú súradnicu prislúchajúcu súradnici $y_{i+1} = y_i - 1$ ležiacej na úsečke AB:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta y}(y_i - 1 - q)$$

Pre d_1 a d_2 platí:

$$x_{i+1} + d_1 = x_i - 1 + d_1 = x \Rightarrow d_1 = x - x_i + 1$$
$$x + d_2 = x_i \Rightarrow d_2 = x_i - x$$

ODVODENIE ALGORITMU

Dosadením x do vzťahu pre výpočet d_1 a d_2 dostávame:

$$d_1 = \frac{\Delta x}{\Delta y}(y_i - 1 - q) - x_i + 1$$
$$d_2 = x_i - \frac{\Delta x}{\Delta y}(y_i - 1 - q)$$

$$\Delta d = d_1 - d_2 = \frac{\Delta x}{\Delta y}(y_i - 1 - q) - x_i + 1 - x_i + \frac{\Delta x}{\Delta y}(y_i - 1 - q)$$
$$\Delta d = 2\frac{\Delta x}{\Delta y}(y_i - 1 - q) - 2x_i + 1$$

Prenásobením celej rovnosti Δy dostávame:

$$\Delta x \Delta d = 2\Delta x (y_i - 1 - q) - 2\Delta y x_i + \Delta y$$

Uvedomte si, že Δy je v tomto oktante vždy záporné číslo, čiže po prenásobení Δd touto konštantou sa znamienko ľavej strany zmení, treba to brať do úvahy pri rozhodovacom pravidle.

Ľavú stranu označme p_i a na pravej strane konštantu $-2q\Delta x - 2\Delta x + \Delta y$ označme C. Vyjadrime p_{i+1} pomocou p_i:

$$p_i = 2\Delta x y_i - 2\Delta y x_i + C$$
$$p_{i+1} = 2\Delta x y_{i+1} - 2\Delta y x_{i+1} + C$$

$$p_{i+1} - p_i = 2\Delta x y_i - 2\Delta y x_i - 2\Delta x y_{i+1} + 2\Delta y x_{i+1}$$

Úpravou tohto rozdielu a využijúc, že $y_{i+1} = y_i - 1$ dostávame:

$$p_{i+1} - p_i = -2\Delta x - 2\Delta y x_{i+1} + 2\Delta y x_i$$

Máme teda:

1. ak $x_{i+1} = x_i \Rightarrow p_{i+1} - p_i = -2\Delta x \Rightarrow p_{i+1} = p_i - 2\Delta x$
2. ak $x_{i+1} = x_i - 1 \Rightarrow p_{i+1} - p_i = -2\Delta x + 2\Delta y \Rightarrow p_{i+1} = p_i + 2\Delta y - 2\Delta x$

Čiže máme rozhodovacie pravidlo:

ak $p_i < 0$ ($\Leftrightarrow \Delta d \Delta y < 0 \Leftrightarrow \Delta d > 0$, lebo $\Delta y < 0$) vykresli bod $[x_i, y_i - 1]$ a rátaj $p_{i+1} = p_i - 2\Delta x$

ak $p_i > 0$ ($\Leftrightarrow \Delta d \Delta y > 0 \Leftrightarrow \Delta d < 0$, lebo $\Delta y < 0$) vykresli bod $[x_i - 1, y_i - 1]$ a rátaj $p_{i+1} = p_i - 2\Delta x + 2\Delta y$

Inicializácia p - do rovnice úsečky dosadíme začiatocný bod A so súradnicami $[x_1, y_1]$:

$$p_1 = 2\Delta x y_1 - 2\Delta y x_1 - 2\Delta x - 2q\Delta x + \Delta y$$
$$p_1 = 2\Delta x(\tfrac{\Delta y}{\Delta x} x_1 + q) - 2x_1\Delta y - 2\Delta x - 2q\Delta x + \Delta y$$
$$p_1 = -2\Delta x + \Delta y$$