

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky



**Oskulačná kružnica krivky vo vrchole  
vyššieho rádu**

Diplomová práca

Viktória Bakurová

Bratislava 2010

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky



# Oskulačná kružnica krivky vo vrchole vyššieho rádu

Diplomová práca

Študijný odbor: Počítačova grafika a geometria

Vedúci diplomovej práce:

doc. RNDr. Miloš Božek, CSc.

Diplomant:

Bc. Viktória Bakurová

Bratislava 2010

# Čestné prehlásenie

Čestne prehlasujem, že som diplomovú prácu vypracovala samostatne s použitím uvedenej odbornej literatúry.

V Bratislave dňa 03. 04. 2010

.....  
Viktória Bakurová

# PodĎakovanie

Ďakujem vedúcemu diplomovej práce doc. RNDr. Milošovi Božekovi, CSc., za pomoc pri vypracovaní práce, odborné pripomienky, poskytnutú podporu a čas, ktorý mi venoval počas tvorby tejto práce.

# Abstrakt

BAKUROVÁ, Viktória. Oskulačná kružnica krivky vo vrchole vyššieho rádu [diplomová práca]. Univerzita Komenského v Bratislave. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky; Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky. Vedúci práce: doc. RNDr. Miloš Božek CSc., Bratislava: FMFI UK, 2010.

Oskulačná kružnica krivky zostrojená v jej rôznych bodoch dáva základnú predstavu o krivkách a niektorých jej vlastnostiach. Cieľom tejto práce je opísať, aká je vzájomná poloha oskulačnej kružnice a krivky nielen vo všeobecnom bode a v obyčajnom vrchole krivky, ale hlavne vo vrchole vyššieho rádu.

Diplomová práca oboznamuje čitateľa so základnými pojmami týkajúcich sa kriviek a s pojmami oskulačná kružnica, vrchol krivky a vrchol vyššieho rádu. Práve dobré zvládnutie týchto pojmov je nevyhnutné k štúdiu a pochopeniu hlavnej časti práce zaoberajúcej sa otázkou, ako sa správa krivka vzhľadom k oskulačnej kružnici vo vrchole rôzneho rádu. Uvedené sú aj príklady kriviek majúce vrcholy vyššieho rádu, ktoré v bežne dostupnej literatúre zaoberajúcej sa krivkami nenájdeme. Práca poskytuje nielen teoretický opis a prehľad danej problematiky, ale pomocou vizualizačného nástroja, ktorý vznikol pre účely tejto práce, sa snaží čitateľovi opísané pojmy a tvrdenia priblížiť a predstaviť aj formou obrázkov.

Kľúčové slová: krivka, prirodzená parametrizácia krivky, oskulačná kružnica, vrchol krivky, vrchol vyššieho rádu

# Predhovor

S pojmom krivka sa stretávame nielen v geometrii a počítačovej grafike, ale v rôznych podobách aj v iných vedných a technických disciplínach. Z hľadiska geometrie sa krivkami zaoberá najmä diferenciálna geometria, ktorá skúma predovšetkým vlastnosti zakrivených geometrických objektov, medzi ktoré patria aj krivky rozmanitých tvarov.

S rôznymi krivkami sa môžeme stretnúť v matematickej analýze. Tu sa pod krivkou rozumujú grafy funkcií jednej premennej. Reprezentácia kriviek v podobe grafov funkcií však nie je postačujúca na vyjadrenie mnohých kriviek, ako je napríklad kružnica a elipsa. Preto v diferenciálnej geometrii sa krivky opisujú parametrickým vyjadrením.

Krivky sa v geometrii opisujú pomocou bodových a vektorových funkcií jednej premennej a ich deriváciami. Pomocou nich sa zavádza pojem parametrického vyjadrenia krivky. Aj keď by sa mohlo zdať, že pojem krivky sa dá zaviesť veľmi jednoduchým spôsobom, nie je to tak. Na definovanie krivky sa používa práve jej parametrické vyjadrenie.

S krivkou súvisia aj iné pojmy opisujúce jej vlastnosti a tvar. Dotyčnica a normála krivky vyjadrujú jej priebeh v blízkosti bodu, v ktorom sú zostrojené. Dĺžka krivky umožňuje zaviesť prirodzenú parametrizáciu krivky.

Významným a dôležitým pojmom, ktorý v určitom zmysle opisuje tvar krivky, je jej krivosť. Niektoré krivky sú zakrivené viac, niektoré menej, niektoré v každom bode rovnako, iné v každom bode ináč. Krivosť je číslo, ktoré vyjadruje veľkosť zakrivenia

krivky v jednom jej bode.

S pojmom krivosti úzko súvisia pojmy polomer a stred krivosti, pomocou ktorých sa definuje oskulačná kružnica, jeden z ústredných pojmov použitých v tejto práci. Na krivkách môžeme nájsť okrem jej všeobecných bodov aj geometricky významnejšie body - vrcholy rôznych rádov.

V rámci tejto práce sa stretne nielen so zavedením spomínaných pojmov týkajúcich sa kriviek, ale aj s opisom vzťahu oskulačnej kružnice a krivky v jej rôznych bodoch, hlavne vo vrcholoch vyšších rádov. Dôvod, prečo kladieme dôraz na vrcholy vyšších rádov, je ten, že v literatúre nájdeme veľmi málo o takýchto vrcholoch a je zaujímavé sledovať, ako rád vrcholu ovplyvní polohu krivky vzhľadom na oskulačnú kružnicu v takomto vrchole.

# Obsah

Úvod	1
<b>1 Vybrané vlastnosti rovinných kriviek</b>	<b>3</b>
1.1 Definícia krivky a jej parametrické vyjadrenie . . . . .	3
1.2 Dotyčnica a normála rovinatej krivky . . . . .	6
1.3 Prirodzená parametrizácia rovinatej krivky . . . . .	7
1.4 Krivosť krivky a Frenetove vzorce . . . . .	11
1.5 Styk krivky a kružnice . . . . .	13
1.6 Oskulačná kružnica rovinatej krivky . . . . .	15
<b>2 Vzťah rovinatej krivky k oskulačnej kružnici vo vrchole vyššieho rádu</b>	<b>21</b>
2.1 Vrcholy rovinných kriviek . . . . .	21
2.2 Príklady kriviek s vrcholmi vyšších rádov . . . . .	22
2.3 Oskulačná kružnica krivky vo všeobecnom bode a v obyčajnom vrchole	28
2.4 Oskulačná kružnica krivky vo vrchole vyššieho rádu . . . . .	38
<b>3 Vizualizácia vybraných vlastností kriviek a oskulačnej kružnice</b>	<b>60</b>
Záver	66



# Zoznam obrázkov

1.1	Krivka daná parametricky . . . . .	5
1.2	Jednotkový dotykový a normálový vektor krivky . . . . .	7
1.3	Aproximácia dĺžky krivky ako dĺžka vpísaného polygónu pri naznačenom delení intervalu . . . . .	9
1.4	Oskulačná kružnica krivky . . . . .	16
1.5	Oskulačná kružnica krivky v jej rôznych bodoch . . . . .	17
1.6	Oskulačná kružnica krivky $P$ v bode $P_0$ ako limita bodov blížiacich sa k bodu $P_0$ . . . . .	19
2.1	Krivka daná predpisom $f(x) = x^5 + x^2 + 1$ majúca v bode $x = 0$ vrchol prvého rádu . . . . .	25
2.2	Krivka daná predpisom $f(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^2$ majúca v bode $x = 0$ vrchol druhého rádu . . . . .	26
2.3	Krivka daná predpisom $f(x) = x^7 + x^4 + x^2$ majúca v bode $x = 0$ vrchol tretieho rádu . . . . .	27
2.4	Krivka daná predpisom $f(x) = 1,4x^6 + x^4 + x^2$ majúca v bode $x = 0$ vrchol aspoň štvrtého rádu . . . . .	28
2.5	Oskulačná kružnica krivky v nevrchole, krivka prechádza z jednej strany kružnice na druhú . . . . .	36
2.6	Oskulačná kružnica krivky v obyčajnom vrchole, krivka leží zvonka kružnice . . . . .	37

2.7	Oskulačná kružnica krivky danej predpisom $f(x) = x^5 + 0,08x^4 + 0,2x^2$ vo vrchole druhého rádu . . . . .	57
2.8	Detail oskulačnej kružnice krivky vo vrchole druhého rádu, krivka prechádza z jednej strany kružnice na druhú . . . . .	57
2.9	Oskulačná kružnica krivky danej predpisom $f(x) = x^6 + 0,08x^4 + 0,2x^2$ vo vrchole tretieho rádu . . . . .	58
2.10	Detail oskulačnej kružnice krivky vo vrchole tretieho rádu, krivka leží na jednej strane kružnice . . . . .	58
2.11	Oskulačná kružnica krivky danej predpisom $f(x) = x^7 + x^4 + x^2$ vo vrchole tretieho rádu . . . . .	59
3.1	Okno otvorené po spustení programu . . . . .	61
3.2	Vykreslenie grafu funkcie s mriežkou a bez mriežky . . . . .	62
3.3	Kreslenie dotykového a normálového vektora krivky . . . . .	63
3.4	Panely slúžiace na prácu s oskulačnou kružnicou krivky . . . . .	63
3.5	Kreslenie oskulačnej kružnice krivky . . . . .	64
3.6	Kreslenie kružnice krivky prechádzajúcej jej troma bodmi . . . . .	65

# Úvod

Krivky a základné pojmy s nimi súvisiace sú predmetom štúdia časti matematiky nazvanej diferenciálna geometria. Všetky základné vlastnosti kriviek od ich definície až po krivosť krivky sú opísané vo voľne dostupnej literatúre, ako aj v učebných textoch zameraných práve na diferenciálnu geometriu.

Ako vieme, každá krivka sa skladá z množiny bodov určitých vlastností. V tejto množine bodov nájdeme také body krivky, ktoré sú nejakým spôsobom iné od zvyšných. Takéto body sa nazývajú vrcholy a ich definícia je spojená s krivosťou krivky a jej deriváciami.

Vrchol krivky je tiež známym a často spomínaným pojmom v literatúre. Avšak veľmi málo sa hovorí o vrcholoch vyšších rádov a ešte menej o krivkách, ktoré takéto vrcholy majú.

Jedným z cieľov tejto práce bolo nájsť všeobecný predpis, ktorý by umožnil nájsť pre vybranú skupinu kriviek vrchol ľubovoľného rádu. Tento predpis sa nepodarilo určiť, napriek tomu však snaha nájsť ho viedla k nájdeniu konkrétnych kriviek, ktoré vrcholy vyšších rádov majú. Tejto problematike je venovaná podkapitola 2.2 Príklady kriviek s vrcholmi vyšších rádov.

Mnohé lokálne vlastnosti kriviek vieme opísať pomocou osculačnej kružnice krivky. Jej zavedenie súvisí s krivosťou krivky. To, ako sa osculačná kružnica správa vo všeobecnom bode a v obyčajnom vrchole krivky je tiež známe. Hlavným cieľom tejto práce bolo zistiť a ukázať, ako sa bude osculačná kružnica správať vo vrchole ľubovoľného vyššieho rádu. Podarilo sa vysloviť a dokázať tvrdenie hovoriace o tomto vzťahu, hovorí o tom Veta 2.4.3. Ukazuje sa, že kvalita vzťahu krivky k

---

jej osculačnej kružnici vo vrchole vyššieho rádu je určená paritou rádu vrchola.

Z dôvodu, aby sme neostávali len pri teoretickom opise kriviek a ich vlastností, ako aj osculačnej kružnice krivky, k práci vznikol aj program slúžiaci na vizualizáciu vybraných vlastností.

Diplomová práca je rozdelená na tri kapitoly. Prvá kapitola uvádza čitateľa do problematiky zavedením a vysvetlením pojmov týkajúcich sa kriviek, ktoré sa ďalej používajú v práci.

Hlavnú časť práce tvorí druhá kapitola. Na jej začiatku sa zavádza pojem vrchol krivky, pričom sa rozlišuje medzi obyčajným vrcholom a vrcholom vyššieho rádu. Opísané sú nájsené príklady kriviek s vrcholmi rôznych rádov a tieto opisy sú doplnené aj ilustračnými obrázkami.

V tejto kapitole sú vyslovené tvrdenia hovoriace o osculačnej kružnici krivky vo všeobecnom bode a v obyčajnom vrchole. V závere sa hovorí o osculačnej kružnici vo vrchole vyššieho rádu. Práve tu sú vyslovené a dokázané najdôležitejšie tvrdenia práce. Aj táto časť je doplnená o obrázky ilustrujúce osculačnú kružnicu krivky vo vrchole rôznych rádov.

Tretia kapitola je venovaná programu, ktorý slúži na vizualizáciu vybraných vlastností kriviek. Obrázky použité v tejto kapitole sú zobrazením rôznych výstupov a nastavení, ktoré program umožňuje.

# Kapitola 1

## Vybrané vlastnosti rovinných kriviek

V úvodnej kapitole práce zdefinujeme krivky v rovine pomocou parametrického vyjadrenia a opíšeme ich základné vlastnosti, s ktorými sa stretne v ďalšej časti práce a ktoré budeme nejakým spôsobom potrebovať. Všetky pojmy použité v tejto časti práce, rovnako ako aj tvrdenia vyslovené v tejto kapitole, sú dostupné v literatúre, napr. [GIB01], [BOŽ07], [JEŽ09], [SCH10], [BCP03], [BEL06], [HK07]. Keďže ide len o základné vlastnosti kriviek, predpokladáme, že sú čitateľom známe, preto tvrdenia a vety budeme v niektorých prípadoch uvádzať bez dôkazov.

### 1.1 Definícia krivky a jej parametrické vyjadrenie

S pojmom krivka sa stretávame v matematike aj v iných vedných disciplinách pomerne často, napriek tomu neexistuje jednotná a univerzálna definícia opisujúca tento pojem. Pod krivkou si väčšinou predstavujeme množinu bodov s nejakými vlastnosťami.

V diferenciálnej geometrii a v počítačovej grafike sa krivky najčastejšie zadávajú parametricky prostredníctvom bodovej funkcie jednej premennej.

**Definícia 1.1.1** (Bodová funkcia jednej premennej v rovine a jej derivácia):

*Bodová funkcia jednej premennej v rovine je zobrazenie  $P : I \rightarrow \mathbb{E}^2$ , kde  $I \subseteq \mathbb{R}$  je*

interval. Ide teda o také zobrazenie, ktoré každému reálnemu číslu z intervalu  $I$  priradí bod v rovine. Klasický zápis bodovej funkcie jednej premennej je  $P = P(t)$ , kde  $t \in I$  nazývame parametrom bodu  $P(t)$ . V súradniciach vyzerá tento zápis nasledovne:  $P(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t \in I$ . V tomto vyjadrení nazývame výsledné funkcie  $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$  súradnicami zobrazenia  $P$ . Pod deriváciou bodovej funkcie  $P(t) = (x(t), y(t))$  v bode  $t_0 \in I$  rozumieme vektor  $P'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$ .

**Definícia 1.1.2** (Vektorová funkcia jednej premennej):

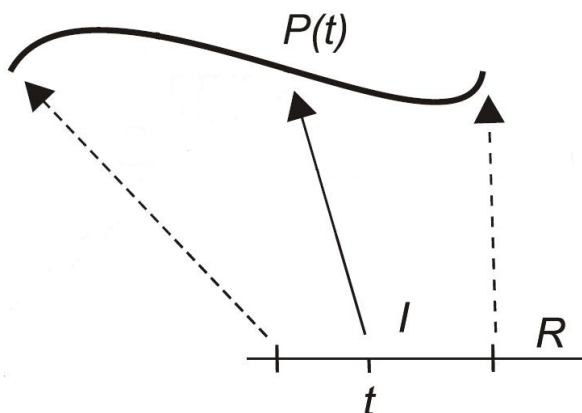
Vektorová funkcia jednej premennej v rovine je zobrazenie  $\mathbf{u} : I \rightarrow \mathbb{E}^2$ , kde  $I \subseteq \mathbb{R}$  je interval. Ide teda o také zobrazenie, ktoré každému reálnemu číslu z intervalu  $I$  priradí vektor v rovine. Klasický zápis vektorovej funkcie jednej premennej je  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ , kde  $t \in I$ . V súradniciach vyzerá tento zápis nasledovne:  $\mathbf{u}(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t \in I$ . V tomto vyjadrení nazývame výsledné funkcie  $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$  súradnicami zobrazenia  $\mathbf{u}$ .

Poznámka: Prvá, ako aj všetky vyššie derivácie bodovej funkcie jednej premennej sú vektorové funkcie jednej premennej. Všetky derivácie vektorovej funkcie sú vektorové funkcie.

**Definícia 1.1.3** (Parametrické vyjadrenie krivky v rovine):

Pod parametrickým vyjadrením krivky v rovine rozumieme bodovú funkciu jednej premennej  $P : I \rightarrow \mathbb{E}^2$ , kde  $I \subseteq \mathbb{R}$ , pričom požadujeme hladkosť a regulárnosť tejto funkcie. Pod hladkosťou zobrazenia  $P(t) = (x(t), y(t))$  rozumieme skutočnosť, že v každom parametri  $t$  majú výsledné komponenty  $x$  a  $y$  derivácie všetkých rádov. Regulárnosť zobrazenia znamená, že pre ľubovoľné  $t \in I$  je  $P'(t) \neq \mathbf{0}$ .

Poznámka: Z dôvodu, aby sme požiadavkou regulárnosti nevyklúčili spomedzi kriviek príliš veľkú skupinu nespĺňajúcu túto podmienku, pripúšťame výskyt niekoľkých bodov, pre ktoré podmienka regulárnosti nie je splnená. Body krivky s parametrizáciou  $P(t)$ , pre ktoré  $P'(t) = \mathbf{0}$ , nazývame singulárne body krivky, ostatné body sú regulárne.



Obr. 1.1: Krivka daná parametricky

Zdroj: [JEŽ09]

Na základe zavedenia pojmu parametrického vyjadrenia krivky teraz môžeme krivku chápať takto: krivka je určená svojou parametrizáciou, t.j. hladkou a regulárnou (až na výnimku konečného počtu bodov) bodovou funkciou jednej premennej.

Poznámka: Krivku určenú parametrizáciou  $P(t)$  zjednodušene nazývame “krivka  $P(t)$ ”.

Krivka svojou parametrizáciou nie je určená jednoznačne, rôzne parametrizácie môžu určovať tú istú krivku. Niekedy je dokonca vhodná zmena parametrizácie krivky. Nasledujúca definícia hovorí o tom, ako parametrizáciu zmeniť:

**Definícia 1.1.4** (Zmena parametrizácie krivky):

*Nech je daná krivka  $P(t)$ ,  $t \in I$ . Nech  $J$  je nejaký interval a na nej nech je definované zobrazenie  $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$  také, že  $t = \varphi(u)$ . Od zobrazenia  $\varphi$  požadujeme hladkosť, regulárnosť a surjektívnosť, pričom pod surjektívnosťou tohto zobrazenia rozumieme to, že interval  $J$  sa zobrazuje na interval  $I$ . Nová parametrizácia  $Q(u)$  krivky  $P(t)$  bude také parametrické vyjadrenie tejto krivky, pre ktoré bude platiť:  $Q(u) = P(\varphi(u))$ ,  $u \in J$ . Zmenu parametrizácie krivky nazývame reparametrizácia.*

Poznámka: Každá krivka má nekonečne veľa parametrizácií.

## 1.2 Dotyčnica a normála rovinnej krivky

Majme danú krivku prirodzenou parametrizáciou  $P(t)$ ,  $t \in I$ .

**Definícia 1.2.1** (Dotykový a normálový vektor krivky):

Dotykový vektor krivky  $T(t)$  v parametri  $t_0$  je definovaný ako vektor  $T(t_0) = P'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$ .

Normálový vektor krivky v parametri  $t_0$  je definovaný ako vektor, ktorý dostaneme otočením dotykového vektora v rovnakom parametri o  $+90^\circ$ . Normálový vektor krivky sa označuje  $N(t)$  a vyzerá nasledovne:  $N(t_0) = (-y'(t_0), x'(t_0))$ .

**Definícia 1.2.2** (Dotyčnica a normála krivky):

Nech je dané číslo  $t_0 \in I$ .

Dotyčnica krivky v regulárnom bode  $P(t_0)$  je priamka určená bodom  $P(t_0)$  a dotykovým vektorom  $T(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$ . Dotyčnica rovinnej krivky je teda vyjadrená rovnicou  $(x(t) - x(t_0))y'(t_0) - (y(t) - y(t_0))x'(t_0) = 0$ .

Normála krivky v regulárnom bode  $P(t_0)$  je priamka určená bodom  $P(t_0)$  a normálovým vektorom  $N(t_0) = (-y'(t_0), x'(t_0))$ . Dotyčnica rovinnej krivky je teda vyjadrená rovnicou  $(x(t) - x(t_0))x'(t_0) + (y(t) - y(t_0))y'(t_0) = 0$ .

Poznámka: Dotyčnica aj normála krivky sú definované len v regulárnych bodoch krivky. Tento predpoklad zabezpečí, že dotykový a normálový vektor sú nenulové. V singulárnom bode sa dotyčnica a normála nedefinujú.

V ďalšom texte sa často budeme stretávať s pojmom jednotkový vektor dotyčnice a normály, ktoré vieme dostať práve ortonormalizáciou dotykového a normálového vektora krivky. Nasledujúca veta hovorí o tom, ako tieto vektory vyjadriť pomocou parametrizácie krivky a jej derivácií.

**Veta 1.2.1** (Jednotkový vektor dotyčnice a normály):

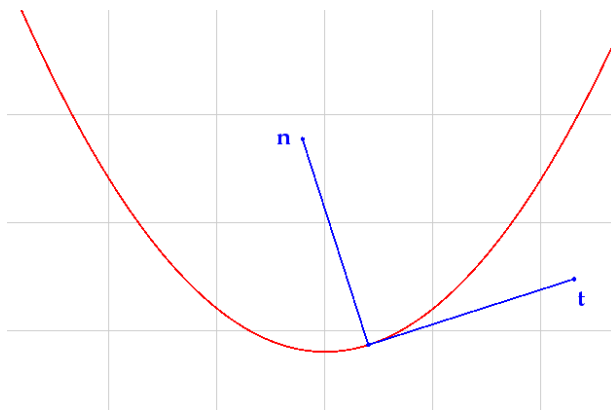
Na dotyčnici a normále krivky v jej neinflexnom bode ležia jednotkové vektory  $\mathbf{t}$  a  $\mathbf{n}$ , ktoré vznikajú ortonormalizáciou vektorov  $P'$  a  $P''$ :



$$\mathbf{t} = \frac{P'}{|P'|}, \quad \mathbf{n} = \frac{(P'P')P'' - (P'P'')P'}{|(P'P')P'' - (P'P'')P'|} = \operatorname{sgn} \det(P', P'') (\perp \mathbf{t})$$

Nazývajú sa jednotkový vektor dotyčnice a normály.

*Dôkaz.* Vzťah pre jednotkový normálový vektor dostávame priamou ortonormalizáciou vektora  $T = P'$ . Vzťah pre jednotkový normálový vektor dostaneme priamym výpočtom  $\frac{(P'P')P'' - (P'P'')P'}{|(P'P')P'' - (P'P'')P'|}$ , pričom si treba uvedomiť, že ak vektor  $\mathbf{t} = (a, b)$ , tak  $\perp \mathbf{t} = (-b, a)$ . □



Obr. 1.2: Jednotkový dotykový a normálový vektor krivky

**Definícia 1.2.3** (Inflexný bod krivky):

Bod  $P(t)$  rovinnej krivky nazývame *inflexným bodom krivky*, ak vektory  $P'(t)$  a  $P''(t)$  sú lineárne závislé. Ak sú tieto vektory lineárne nezávislé, hovoríme o *neinflexnom bode krivky*.

### 1.3 Prirodzená parametrizácia rovinnej krivky

Jedna z vlastností krivky danej parametricky je jej dĺžka na podintervale jej definičného oboru. Pomocou nej vieme krivku definovať prirodzenou parametrizáciou. Takáto parametrizácia má z hľadiska geometrie kriviek viacero zaujímavých vlastností.

**Definícia 1.3.1:**

Nech  $P : I = \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2$  je krivka daná parametricky. Potom pre ľubovoľný parameter  $t$  taký, že  $a \leq t \leq b$  je definovaná dĺžka oblúka z  $a$  do  $t$  nasledovnou funkciou:

$$s(t) = \int_a^t |P'(u)| du,$$

kde  $|P'(u)| = \sqrt{(x'(u))^2 + (y'(u))^2}$  je dĺžka vektora  $P'(u)$ .

Poznámka: Funkcia  $s(t)$  určuje vlastne vzdialenosť bodov  $P(a)$  a  $P(t)$  pozdĺž krivky. Ak zderivujeme túto funkciu podľa parametra  $t$ , dostaneme nasledovný vzťah:  $s'(t) = |P'(t)|$ . Derivácia tejto funkcie hovorí o tom, ako sa mení dĺžka oblúka vzhľadom na parameter  $t$ .

**Definícia 1.3.2:**

Nech  $P : I = \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2$  je krivka daná parametrickým vyjadrením. Nech  $D = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b\}$  je nejaké delenie intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Potom aproximácia dĺžky krivky  $P$  pri delení  $D$  je určená nasledovným vzťahom:

$$l(P, D) = \sum_{i=1}^k |P(t_i) - P(t_{i-1})|$$

Aproximácia dĺžky krivky  $P$  pri delení  $D$  je teda rovná dĺžke vpísaného polygónu s vrcholmi  $P(t_0), \dots, P(t_k)$ .

Poznámka: Pomocou predchádzajúcej definície sa definuje dĺžka krivky ako supremum všetkých možných aproximácií dĺžok krivky  $P$  pri rôznych deleniach  $D$ , t.j.

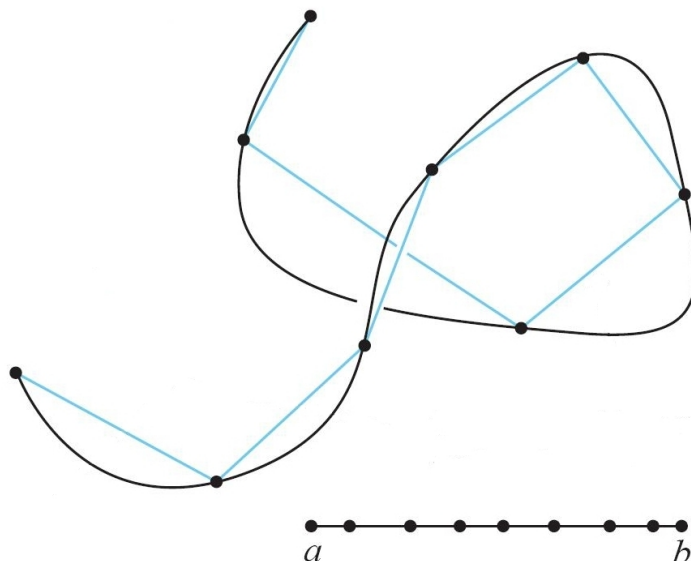
$$l(P) = \sup\{l(P, D) : D \text{ je delenie } \langle a, b \rangle\}.$$

Z tejto skutočnosti vyplýva nasledujúca veta:

**Veta 1.3.1 (Dĺžka krivky):**

Nech máme danú krivku parametrizáciou  $P(t)$ ,  $t \in \langle a, b \rangle$ . Potom pre dĺžku krivky  $l(P)$  platí:

$$l(P) = \int_a^b |P'(t)| dt$$



Obr. 1.3: Aproximácia dĺžky krivky ako dĺžka vpísaného polygónu pri naznačenom delení intervalu

Zdroj: [SCH10]

Krivku v rovine môžeme mať vyjadrenú aj funkciou  $y = f(x)$ ,  $x \in \langle a, b \rangle$ . Krivka vyjadrená takouto rovnicou má parametrické vyjadrenie  $P(t) = (t, f(t))$ . Dotykový vektor takejto krivky má tvar  $P'(t) = (1, f'(t))$ . Zo vzťahu pre výpočet dĺžky krivky vieme počítať dĺžku grafu tejto funkcie nasledovne:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Po zavedení pojmu dĺžka krivky vieme definovať prirodzenú parametrizáciu krivky:

**Definícia 1.3.3** (Prirodzená parametrizácia krivky):

*Nech je daná krivka parametrizáciou  $P(t)$ . Táto parametrizácia sa nazýva prirodzená parametrizácia alebo parametrizácia oblúkom, ak pre každý podinterval  $\langle a, b \rangle \subset I$  sa dĺžka krivky zúženej na interval  $\langle a, b \rangle$  rovná dĺžke zodpovedajúceho podintervalu definičného oboru, t.j. platí:*

$$l(P|_{\langle a, b \rangle}) = b - a \text{ pre každé } \langle a, b \rangle \subset I$$

**Veta 1.3.2:**

Krivka je daná prirodzenou parametrizáciou práve vtedy, ak pre ľubovoľné  $t \in \langle a, b \rangle$  platí, že  $|P'(t)| = 1$ .

*Dôkaz.* Predchádzajúca veta vyplýva priamo z definície dĺžky krivky. □

Z každej regulárnej parametrizácie krivky môžeme vhodnou substitúciou dostať prirodzenú parametrizáciu krivky. Každá krivka má nekonečne veľa prirodzených parametrizácií. Ak  $P$  je regulárna krivka daná parametricky a dĺžka oblúka krivky z  $a$  do  $t$  je daná ako  $s(t) = \int_a^t |P'(u)| du$ , tak funkcia  $s(t)$  je rastúca, pretože pre jej deriváciu platí:  $s'(t) = |P'(t)|$  a teda  $s'(t) > 0$  pre každé  $t \in \langle a, b \rangle$ . K funkcii  $s(t)$  existuje inverzná funkcia, označme ju  $t = t(s)$ .

Nech teraz  $Q(s)$  je nová parametrizácia, ktorá vznikla z pôvodnej parametrizácie nasledovne:  $Q(s) = P(t(s))$ . Pre jej deriváciu platí:

$$Q'(s) = Q'(t(s)) t'(s) = \frac{P'(t(s))}{s'(t(s))} = \frac{P'(t(s))}{|P'(t(s))|}$$

To ale znamená, že veľkosť vektora  $Q'(s) = 1$  a teda parametrizácia  $Q(s)$  je prirodzenou parametrizáciou krivky.

Poznámka: Aby sme vedeli vizuálne odlíšiť prirodzenú parametrizáciu od regulárnej parametrizácie, parameter prirodzenej parametrizácie sa označuje  $s$ .

Prírodná parametrizácia rovinatej krivky má viacero zaujímavých vlastností. O niektorých z nich hovorí nasledujúca veta:

**Veta 1.3.3:**

Základné vlastnosti prirodzenej parametrizácie sú:

1.  $|P'(s)| = 1$

2.  $P''(s) \perp P'(s)$

3.  $\mathbf{t}(s) = P'(s), \mathbf{n}(s) = \frac{P''(s)}{|P''(s)|}$

*Dôkaz.* 1. Prvá vlastnosť prirodzenej parametrizácie krivky vyplýva priamo z definície prirodzenej parametrizácie krivky a z definície dĺžky krivky.

2. V dôkaze druhej vlastnosti vychádzame z toho, že  $|P'(s)| = 1$ . Platí teda, že  $P'(s) P'(s) = 1$ . Po zderivovaní tejto rovnosti dostávame, že  $2P'(s) P''(s) = 0$  pre ľubovoľné  $s$ , a teda  $P''(s) \perp P'(s)$ .

3. Vieme, že jednotkový dotykový vektor krivky je definovaný vzťahom  $\mathbf{t} = \frac{P'}{|P'|}$ , a keďže v prirodzenej parametrizácii je  $|P'(s)| = 1$ , tak  $\mathbf{t}(s) = P'(s)$ . Podobne pre jednotkový normálový vektor krivky platí:  $\mathbf{n} = \frac{(P'P')P'' - (P'P'')P'}{|(P'P')P'' - (P'P'')P'|}$ . V prirodzenej parametrizácii sú vektory  $P'(s)$  a  $P''(s)$  na seba kolmé, teda ich skalárny súčin je rovný nule. Taktiež platí, že  $P'(s) P'(s) = 1$ . Aplikovaním týchto vzťahov na uvedený vzorec dostaneme, že v prirodzenej parametrizácii je jednotkový normálový vektor daný ako  $\mathbf{n}(s) = \frac{P''(s)}{|P''(s)|}$ . □

Poznámka: V prirodzenej parametrizácii je bod  $P(s)$  inflexný práve vtedy, ak  $P''(s) = 0$ . Tento fakt vyplýva z prvej a druhej vlastnosti prirodzenej parametrizácie uvedenej v predchádzajúcej vete.

## 1.4 Krivost' krivky a Frenetove vzorce

Jednou zo základných vlastností kriviek je krivosť, ktorá opisuje, ako krivka mení svoj smer. Pomocou krivosti vieme od seba ľahko rozlíšiť napríklad priamku a kružnicu.

**Definícia 1.4.1** (Krivost' krivky danej prirodzenou parametrizáciou):

*Krivost' rovinnej krivky  $k(s)$  v bode krivky  $P(s)$  danou prirodzenou parametrizáciou je definovaná ako číslo  $k(s) = |\mathbf{t}'(s)| = |P''(s)|$ , kde  $\mathbf{t}(s)$  je jednotkový dotykový vektor danej krivky.*

**Veta 1.4.1:**

Nech  $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{E}^2$  sú diferencovateľné vektorové funkcie, pre ktoré platí:  $f(t)g(t) = \text{const}$  pre každé  $t \in (a, b)$ , potom  $f'(t)g(t) = -f(t)g'(t)$ . Z toho vyplýva nasledujúce tvrdenie:  $|f(t)| = \text{const} \iff f(t)f'(t) = 0$  pre každé  $t \in (a, b)$ .

*Dôkaz.* Keďže  $f(t)g(t) = \text{const}$  pre každé  $t \in (a, b)$ , potom pre deriváciu tohto súčiny platí:  $(f(t)g(t))' = f'(t)g(t) + f(t)g'(t) = 0$ . Z toho teda  $f'(t)g(t) = -f(t)g'(t)$ . Druhé tvrdenie vety je priamou aplikáciou prvého tvrdenia.  $\square$

Použitím tejto lemy a definície krivosti vieme skonštruovať Frenetove vzorce regulárnych kriviek daných parametricky.

**Veta 1.4.2 (Frenetove vzorce):**

Pre rovinnú krivku danú prirodzenou parametrizáciou platí:

$$\mathbf{t}'(s) = k(s) \mathbf{n}(s)$$

$$\mathbf{n}'(s) = -k(s) \mathbf{t}(s)$$

*Dôkaz.* Nech  $P$  je krivka daná prirodzenou parametrizáciou  $P(s)$ . Potom pre jej deriváciu platí, že  $P'(s) = \mathbf{t}(s)$  je jednotkový dotykový vektor danej krivky. Pretože  $\mathbf{t}(s)$  má konštantnú dĺžku, vektor  $\mathbf{t}'(s)$  je naňho kolmý. Keďže  $\mathbf{t}'(s) \neq 0$ , jednotkový normálový vektor  $\mathbf{n}(s)$  je vyjadrený vzťahom  $\mathbf{n}(s) = \frac{\mathbf{t}'(s)}{|\mathbf{t}'(s)|} = \frac{P''(s)}{|P''(s)|}$ . Pre krivosť danej krivky platí, že  $k(s) = |\mathbf{t}'(s)| = |P''(s)|$ , dostávame vzťah  $\mathbf{t}'(s) = k(s) \mathbf{n}(s)$ .

Z lemy vieme, že  $\mathbf{n}(t)\mathbf{n}'(t) = 0$  a  $\mathbf{n}'(t)\mathbf{t}(t) = -\mathbf{n}(t)\mathbf{t}'(t) = -k(s)$ . Z týchto rovností vyplýva, že  $\mathbf{n}'(s) = -k(s)\mathbf{t}(s)$ .  $\square$

**Definícia 1.4.2 (Krivost' krivky danej parametricky):**

Krivost' rovinnej krivky  $k(t)$  v bode krivky  $P(t)$  je definovaná ako číslo

$$k(t) = \frac{|\det(P'(t), P''(t))|}{|P'(t)|^3}$$

V súradniciach vyzera tento vzťah takto:

$$k(t) = \frac{\left| \begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix} \right|}{\left( (x'(t))^2 + (y'(t))^2 \right)^{\frac{3}{2}}}$$

Poznámka: Ak je krivka zadaná ako graf funkcie  $y = f(x)$  s parametrizáciou  $P(t) = (t, f(t))$ , tak na výpočet jej krivosti sa používa vzťah  $k(t) = \frac{|f''(t)|}{(1+(f'(t))^2)^{\frac{3}{2}}}$ . Tento vzťah dostávame priamym dosadením do vzťahu pre výpočet krivosti krivky danej parametricky.

Poznámka: Krivosť krivky nadobúda v každom parametri len nezáporné hodnoty. Krivosť je rovná nule práve vtedy, ak  $\det(P'(t), P''(t)) = 0$ , to ale znamená, že vektory  $P'(t)$  a  $P''(t)$  sú lineárne závislé. Táto situácia nastáva len v prípade, že  $P(t)$  je inflexným bodom krivky, preto krivosť krivky je nulová práve v inflexnom bode krivky.

## 1.5 Styk krivky a kružnice

V tejto podkapitole si povieme niečo o tom, ako sa vzájomne chovajú krivka daná parametricky a kružnica, ktorá má s touto krivkou spoločný bod. Tieto poznatky nám umožnia v ďalšej podkapitole opis oskulačnej kružnice, ktorá je dôležitou súčasťou tejto práce.

Nech  $P : I \rightarrow \mathbb{E}^2$  je krivka daná parametricky a nech  $P(t_0)$ ,  $t_0 \in I$  je jej regulárny bod. Majme danú kružnicu  $k$  so stredom v bode  $S$  a s polomerom  $r$  vyjadrenú rovnicou  $|P(t) - S|^2 = r^2$ . Nech táto kružnica prechádza bodom  $P(t_0)$ , to znamená, že  $|P(t_0) - S|^2 = r^2$ . Definujme funkciu styku krivky  $P$  a kružnice  $k$ :

### Definícia 1.5.1:

*Funkcia styku kružnice  $k$  a krivky  $P$  v spoločnom bode  $P(t_0)$  je hladká funkcia  $\gamma$  taká, že  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$  a platí:  $\gamma(t) = |P(t) - S|^2 - |P(t_0) - S|^2$ .*

Poznámka: Je zrejmé, že funkcia styku kružnice a krivky je nulová, ak  $P(t)$  leží

na kružnici. Ak bod  $P(t)$  leží zvonka kružnice, tak je funkcia styku kladná a ak leží vo vnútri kružnice, tak je funkcia styku záporná.

Poznámka: Parameter  $t_0$  je zrejme bodom, v ktorom je funkcia styku nulová.

**Definícia 1.5.2** (Styk rádu  $k$ ):

Hovoríme, že kružnica  $k$  má s krivkou  $P$  styk rádu  $k$  v bode  $P(t_0)$ , ak platia nasledovné podmienky:

$$\gamma(t_0) = 0, \gamma'(t_0) = 0, \dots, \gamma^{(k)}(t_0) = 0$$

Hovoríme, že kružnica  $k$  je dotykovou kružnicou krivky  $P$  v bode  $P(t_0)$ , ak má s krivkou styk rádu najmenej 1, t.j.  $\gamma(t_0) = 0, \gamma'(t_0) = 0$ .

**Veta 1.5.1:**

Kružnica  $k$  je dotykovou kružnicou krivky  $P$  v regulárnom bode  $P(t_0)$  práve vtedy, ak jej stred  $S$  leží na normále krivky  $P$  v bode  $P(t_0)$ . Kružnica, ktorá ku krivke v bode  $P(t_0)$  nie je dotyková, pretína krivku v tomto bode.

*Dôkaz.* Z predchádzajúcej definície vieme, že kružnica  $k$  je dotyková ku krivke v bode  $P(t_0)$ , ak  $\gamma'(t_0) = 0$ , pričom  $\gamma(t)$  je funkcia styku kružnice a krivky. Jej predpis vyzerá nasledovne:

$$\gamma(t) = |P(t) - S|^2 - |P(t_0) - S|^2$$

Derivovaním tejto funkcie dostaneme:  $\gamma'(t) = 2(P(t) - S)P'(t)$ . Pretože  $\gamma'(t_0) = 0 = 2(P(t_0) - S)P'(t_0)$ , tak  $(P(t_0) - S)P'(t_0) = 0$ . To znamená, že vektory  $(P(t_0) - S)$  a  $P'(t_0)$  sú na seba kolmé, z čoho je zrejmé, že stred  $S$  leží na normále krivky v bode  $P(t_0)$ .

Ak kružnica  $k$  nie je dotyková ku krivke  $P$ , tak majú styk rádu 1 a to znamená, že kružnica a krivka sa v bode  $P(t_0)$  pretínajú.  $\square$

**Veta 1.5.2:**

V neinflexnom bode  $P(t_0)$  krivky  $P(t)$  existuje práve jedna kružnica, ktorá má s krivkou v tomto bode styk rádu najmenej 2 a jej polomer je  $\frac{1}{k(t_0)}$ , kde  $k(t_0)$  je krivosť krivky v  $t_0$ .



*Dôkaz.* Podmienkou styku rádu 2 kružnice a krivky v bode  $P(t_0)$  je, že pre funkciu styku platí:  $\gamma(t_0) = 0, \gamma'(t_0) = 0, \gamma''(t_0) = 0$ . Kružnica je v tomto prípade dotyková ku krivke v bode  $P(t_0)$  a teda podľa predchádzajúcej vety jej stred leží na normále danej krivky v  $P(t_0)$ . Vektor  $P(t_0) - S$  je rovnobežný s jednotkovým normálovým vektorom  $\mathbf{n}(t_0)$ , preto sa bod  $S$  dá vyjadriť ako  $S = P(t_0) + \alpha \mathbf{n}(t_0)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Počítajme prvú a druhú deriváciu funkcie styku:

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= |P(t) - S|^2 - |P(t_0) - S|^2 \\ \gamma'(t) &= 2(P(t) - S) P'(t) \\ \gamma''(t) &= 2((P(t) - S) P''(t) + (P'(t))^2)\end{aligned}$$

Do druhej derivácie v  $t_0$  dosadíme vyjadrenie bodu  $S$  a dostávame:

$$\begin{aligned}\gamma''(t_0) &= 2((P(t_0) - S) P''(t_0) + (P'(t_0))^2) = 0 \\ (P(t_0) - P(t_0) - \alpha \mathbf{n}(t_0)) P''(t_0) + (P'(t_0))^2 &= 0\end{aligned}$$

Keďže  $\mathbf{n}(t_0) P''(t_0) = k(t_0)$ , tak pre  $\alpha$  platí:

$$\alpha = \frac{(P'(t_0))^2}{\mathbf{n}(t_0) P''(t_0)} = \frac{1}{k(t_0)}$$

Ak je bod  $P(t_0)$  inflexný, tak  $\mathbf{n}(t_0) P''(t_0) = 0$  a teda neexistuje riešenie pre  $\alpha$ . V tomto prípade neexistuje kružnica, ktorá má s danou krivkou styk rádu najmenej 2.

□

## 1.6 Oskulačná kružnica rovinnej krivky

Majme danú rovinnú krivku parametrizáciou  $P(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t \in I$ . Nech je táto krivka regulárna. Pomocou pojmu krivosti krivky vieme v neinflexnom bode krivky definovať ďalšie pojmy súvisiace s krivosťou a následne aj oskulačnú kružnicu krivky v takomto bode.

### Definícia 1.6.1:

*Nech  $P(t)$  je neinflexný bod krivky a  $k(t)$  príslušná krivosť. V tomto bode krivky definujeme ďalšie pojmy súvisiace s krivosťou krivky. Číslo*

$$r(t) = \frac{1}{k(t)} = \frac{1}{|P''(s)|}$$

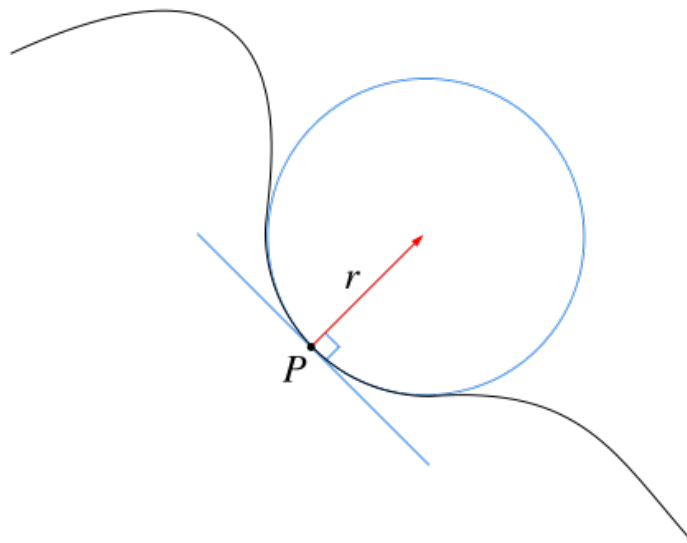
nazývame polomer krivosti a bod

$$S(t) = P(t) + r(t) \mathbf{n}(t)$$

stred krivosti.

**Definícia 1.6.2** (Oskulačná kružnica rovinnej krivky):

Oskulačnou kružnicou krivky v regulárnom bode  $P(t)$  nazývame kružnicu so stredom v bode  $S(t)$  a s polomerom  $r(t)$ , kde  $S(t)$  je stred krivosti a  $r(t)$  je polomer krivosti v bode  $P(t)$ .

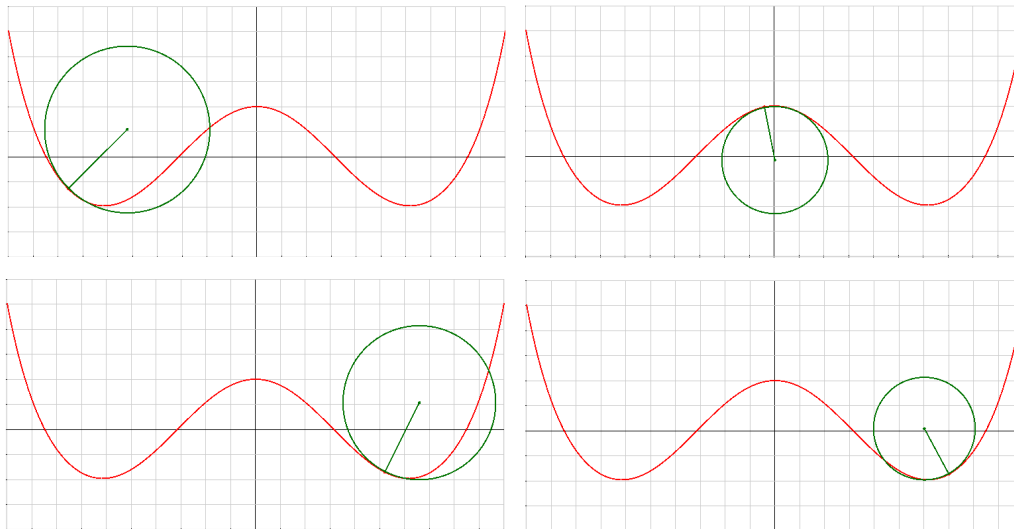


Obr. 1.4: Oskulačná kružnica krivky

Zdroj: Wikipedia: [http://en.wikipedia.org/wiki/File:Osculating\\_circle.svg](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Osculating_circle.svg)

Poznámka: Oskulačná kružnica dáva základnú predstavu o tvare rovinnej krivky v blízkosti bodu, v ktorom je zostrojená.

Poznámka: Z vyjadrenia stredu oskulačnej kružnice vyplýva, že tento bod leží na normále krivky v danom bode.



Obr. 1.5: Oskulačná kružnica krivky v jej rôznych bodoch

**Veta 1.6.1** ([OSC]):

Oskulačná kružnica krivky  $P(t)$  v bode  $P_0 = P(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$  je limitou polôh kružníc prechádzajúcich bodom  $P_0$  a dvoma rôznymi bodmi  $P_1 = P(t_1) = (x(t_1), y(t_1))$  a  $P_2 = P(t_2) = (x(t_2), y(t_2))$ , ktoré sa "blížia" k bodu  $P_0$ , t.j. parametre  $t_1$  a  $t_2$  idú v limite k  $t_0$  a platí, že  $t_1 < t_0 < t_2$ .

*Dôkaz.* Majme parametricky danú krivku a na nej tri body:  $P_0, P_1$  a  $P_2$  také, že  $t_1 < t_0 < t_2$ . Nech  $k$  je kružnica vyjadrená rovnicou

$$k : (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0,$$

potom stred tejto kružnice má súradnice  $(a, b)$  a jej polomer je  $r$ . Nech táto kružnica prechádza bodmi  $P_0, P_1$  a  $P_2$ . Platí teda:

$$(x(t_0) - a)^2 + (y(t_0) - b)^2 - r^2 = 0$$

$$(x(t_1) - a)^2 + (y(t_1) - b)^2 - r^2 = 0$$

$$(x(t_2) - a)^2 + (y(t_2) - b)^2 - r^2 = 0$$

Definujme funkciu  $g(t) = (x(t) - a)^2 + (y(t) - b)^2 - r^2$ . Je zrejmé, že platí:  $g(t_0) = g(t_1) = g(t_2) = 0$ , pričom  $t_1 < t_0 < t_2$ .

Podľa Rolleho vety existujú také body  $P_3 = P(t_3) = (x(t_3), y(t_3))$

a  $P_4 = P(t_4) = (x(t_4), y(t_4))$ , že  $t_1 < t_3 < t_0$  a  $t_0 < t_4 < t_2$  a pre deriváciu funkcie  $g$  platí:  $g'(t_3) = g'(t_4) = 0$ .

Z toho dostávame:

$$\begin{aligned} g'(t) &= 2((x(t) - a)x'(t) + (y(t) - b)y'(t)) \\ g'(t_3) &= 2((x(t_3) - a)x'(t_3) + (y(t_3) - b)y'(t_3)) = 0, \quad t_1 < t_3 < t_0 \\ g'(t_4) &= 2((x(t_4) - a)x'(t_4) + (y(t_4) - b)y'(t_4)) = 0, \quad t_0 < t_4 < t_2 \end{aligned}$$

Ak na funkciu  $g'(t)$  opäť použijeme Rolleho vetu, dostaneme existenciu bodu  $P_5 = P(t_5) = (x(t_5), y(t_5))$  takého, že  $t_3 < t_5 < t_4$  a pre druhú deriváciu funkcie  $g$  platí:  $g''(t_5) = 0$

Z toho dostávame:

$$\begin{aligned} g''(t) &= 2(((x'(t))^2 + (x(t) - a)x''(t))((y'(t))^2 + (y(t) - b)y''(t))) \\ g''(t_5) &= 2(((x'(t_5))^2 + (x(t_5) - a)x''(t_5)) + ((y'(t_5))^2 + (y(t_5) - b)y''(t_5))) = 0, \\ &\quad t_3 < t_5 < t_4 \end{aligned}$$

Prejdúc k limite pre  $t_1$  a  $t_2$  idúce k  $t_0$  dostávame, že aj  $t_3$ ,  $t_4$  a  $t_5$  idú v limite k  $t_0$ .

Z týchto skutočností dostávame tri rovnice s tromi neznámymi:

$$\begin{aligned} (x(t_0) - a)^2 + (y(t_0) - b)^2 - r^2 &= 0 \\ (x(t_0) - a)x'(t_0) + (y(t_0) - b)y'(t_0) &= 0 \\ (x'(t_0))^2 + (x(t_0) - a)x''(t_0) + (y'(t_0))^2 + (y(t_0) - b)y''(t_0) &= 0 \end{aligned}$$

Riešením tejto sústavy rovníc dostávame súradnice stredu kružnice a jej polomeru:

$$\begin{aligned} a &= x(t_0) - \frac{((x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2)y'(t_0)}{x'(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'(t_0)} = x(t_0) - \frac{1}{k(t_0)} \frac{z(t_0)y'(t_0)}{\sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2}} \\ b &= y(t_0) + \frac{((x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2)x'(t_0)}{x'(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'(t_0)} = y(t_0) + \frac{1}{k(t_0)} \frac{z(t_0)x'(t_0)}{\sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2}} \\ r &= \left| \frac{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)}{x'(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'(t_0)} \right| = \frac{1}{k(t_0)}, \end{aligned}$$

kde

$$k(t_0) = \frac{x'(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'(t_0)}{((x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2)^{\frac{3}{2}}}$$

je krivosť krivky a

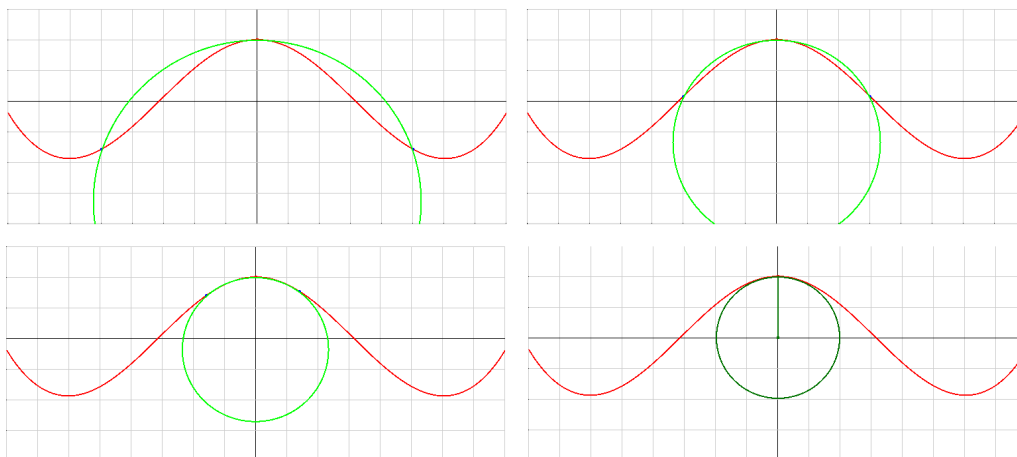
$$z(t_0) = \frac{|x'(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'(t_0)|}{x'(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'(t_0)} = \operatorname{sgn} \det(P'(t_0), P''(t_0)).$$

Všimnime si, že vektor

$$\left( -\frac{z(t_0)y'(t_0)}{\sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2}}, \frac{z(t_0)x'(t_0)}{\sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2}} \right)$$

je jednotkový normálový vektor danej krivky, preto  $S = P(t_0) + \frac{1}{k(t_0)}\mathbf{n}(t_0)$ .

Limitná kružnica je teda oskulačná kružnica krivky a je najtesnejšie priložená kružnica k rovinnej krivke v bode  $P_0$ . □



Obr. 1.6: Oskulačná kružnica krivky  $P$  v bode  $P_0$  ako limita bodov blížiacich sa k bodu  $P_0$

Poznámka: Nech krivka je graf funkcie  $y = f(x)$  a teda jej parametrizácia je  $P(t) = (t, f(t))$ , tak stred  $S = (a, b)$  oskulačnej kružnice v bode  $P_0 = P(t_0)$  bude mať súradnice

$$a = t_0 + \frac{1 + (f'(t_0))^2}{f''(t_0)} f'(t_0) \text{ a } b = f(t_0) + \frac{1 + (f'(t_0))^2}{f''(t_0)}$$

a jej polomer sa rovná prevrátenej hodnote krivosti v bode  $P_0$ , t.j.

$$r = \frac{1}{k(t_0)} = \frac{(1 + (f'(t_0))^2)^{\frac{3}{2}}}{|f''(t_0)|}.$$

Oskulačná kružnica krivky je v bode krivky spomedzi všetkých kružníc prechádzajúcich daným bodom najtesnejšie priložená kružnica ku krivke. Prevrátená hodnota polomeru oskulačnej kružnice určuje krivosť krivky v danom bode.

Základnými vlastnosťami oskulačnej kružnice sú:

- Kružnica prechádza bodom  $P(t)$
- Kružnica a krivka majú v bode  $P(t)$  spoločnú dotyčnicu a teda aj spoločnú normálu
- Krivka a oskulačná kružnica majú styk rádu 2 alebo vyšší

Všetky tieto vlastnosti oskulačnej kružnice sa dajú veľmi ľahko ukázať pomocou poznatkov, ktoré sú uvedené v tejto a v predchádzajúcich kapitolách.

Poznámka: Oskulačná kružnica a krivka majú v spoločnom bode rovnakú krivosť rovnú  $\frac{1}{r}$ , kde  $r$  je polomer kružnice.

# Kapitola 2

## Vzťah rovinnej krivky k osculačnej kružnici vo vrchole vyššieho rádu

V tejto kapitole práce zadefinujeme pojem vrchol krivky, uvedieme si príklady kriviek a ich vrcholov. V prevažnej časti kapitoly sa budeme zaoberať vzťahom rovinnej krivky k osculačnej kružnici vo vrcholoch krivky aj v jej všeobecných bodoch. Vyslovené tvrdenia o ich vzájomnej polohe budeme vizualizovať pomocou programu vytvoreného k tejto práci.

### 2.1 Vrcholy rovinných kriviek

Keďže hlavnou témou tejto práce je opísať vzťah rovinnej krivky k osculačnej kružnici vo vrcholoch krivky, potrebujeme vedieť, čo vrchol rovinnej krivky predstavuje. Osculačnú kružnicu rovinnej krivky sme definovali v kapitole 1. Na začiatku tejto kapitole práce zadefinujeme pojem vrchol rovinnej krivky a odlíšime od seba obyčajné vrcholy krivky od vrcholov vyšších rádo.

**Definícia 2.1.1** (Vrchol krivky [GIB01]):

*Nech je daná rovinná krivka  $P(t)$ ,  $t \in I$  a nech  $k(t)$  je jej krivosť. Vrcholom krivky nazývame taký bod  $P(t_0)$ ,  $t_0 \in I$ , v ktorom má krivosť krivky stacionárny bod, teda  $k'(t_0) = 0$ . Vo všeobecnosti je teda vrcholom krivky taký bod, v ktorom má krivosť*

lokálny extrém.

Poznámka: Pre krivky, ktoré majú konštantnú krivosť, je každý ich bod vrcholom. Príkladom takýchto kriviek sú priamky, úsečky, kružnice a kružnicové oblúky.

V predchádzajúcej definícii sa nič nehovorí o hodnote druhej a vyšších derivácií krivosti v  $t_0$ . Práve tie umožnia odlíšiť od seba obyčajné vrcholy krivky od vrcholov vyšších rádov.

**Definícia 2.1.2** (Obyčajný vrchol krivky [BOŽ08]):

Nech je daná rovinná krivka  $P(t)$ ,  $t \in I$  a bod  $P(t_0)$ ,  $t_0 \in I$  je jej vrchol. Vrchol  $P(t_0)$  sa nazýva obyčajný vrchol rovinatej krivky, ak pre krivosť krivky platí:  $k'(t_0) = 0$  a  $k''(t_0) \neq 0$ . Obyčajný vrchol krivky budeme nazývať vrcholom prvého rádu.

**Definícia 2.1.3** (Vrchol vyššieho rádu [GIB01]):

Nech je daná rovinná krivka  $P(t)$ ,  $t \in I$  a nech  $P(t_0)$ ,  $t_0 \in I$  je jej vrchol taký, že  $k'(t_0) = 0, \dots, k^{(k)}(t_0) = 0$ ,  $k \geq 2$ . Potom vrchol  $P(t_0)$  nazývame vrchol  $k$ -teho rádu krivky  $P(t)$ .

Poznámka: Z predchádzajúcej definície vyplýva, že vrchol  $k$ -teho môžeme považovať aj za vrchol  $(k - 1)$ -ého rádu. Budeme však predpokladať, že ak o nejakom vrchole povieme, že je  $k$ -teho rádu, tak  $k^{(k+1)}(t_0) \neq 0$  a teda už nemôže byť vyššieho rádu.

Poznámka: Body krivky, ktoré nie sú vrcholmi, nazývame všeobecné body krivky.

## 2.2 Príklady kriviek s vrcholmi vyšších rádov

V literatúre zaoberajúcej sa rovinnými krivkami a ich vrcholmi môžeme nájsť veľa príkladov kriviek, ktoré majú obyčajné vrcholy, teda vrcholy 1. rádu. Veľmi často uvádzaným príkladom takejto krivky je napríklad elipsa so 4 vrcholmi, 2 z nich sú hlavné a 2 vedľajšie. [BOŽ08]



Veľmi málo sa však v literatúre hovorí o vrcholoch vyšších rádov a ich príkladoch. Snahou vrámci tvorby tejto práce preto bolo nájsť všeobecný predpis, pomocou ktorého by sa dali nájsť vrcholy ľubovoľného rádu určitej skupiny kriviek. Vybranou skupinou kriviek sú grafy polynomických funkcií daných predpisom

$$y = f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0, \text{ kde } n \in \mathbb{N} \text{ a } a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R},$$

a keďže vrcholy vyššieho rádu úzko súvisia s deriváciami krivosti krivky, bola snaha nájsť všeobecný predpis pre  $n$ -tú deriváciu krivosti krivky.

Pre krivosť grafu funkcie  $y = f(x)$  platí:

$$k = \frac{|f^{(2)}|}{(1 + f^{(1)2})^{\frac{3}{2}}}$$

Keďže uvažujeme len o neiflexných bodoch krivky vyjadrenej grafom funkcie  $y = f(x)$ , tak krivosť v takýchto bodoch je rôzna od 0 a teda aj  $f^{(2)} \neq 0$ . Označme  $\sigma$  funkciu vyjadrujúcu znamienko druhej derivácie funkcie  $f$ , teda  $\sigma = \text{sgn } f^{(2)}$ . Derivovaním vzťahu na výpočet krivosti sa ľahko dostanú predpisy na výpočet prvej a druhej derivácie krivosti:

$$k^{(1)} = \sigma \left( \frac{f^{(3)}}{(1 + f^{(1)2})^{\frac{3}{2}}} - 3 \frac{f^{(1)} f^{(2)2}}{(1 + f^{(1)2})^{\frac{5}{2}}} \right)$$

$$k^{(2)} = \sigma \left( \frac{f^{(4)}}{(1 + f^{(1)2})^{\frac{3}{2}}} - 3 \frac{f^{(2)3}}{(1 + f^{(1)2})^{\frac{5}{2}}} - 9 \frac{f^{(1)} f^{(2)} f^{(3)}}{(1 + f^{(1)2})^{\frac{5}{2}}} + 15 \frac{f^{(1)2} f^{(2)3}}{(1 + f^{(1)2})^{\frac{7}{2}}} \right)$$

Rovnakým spôsobom sa dajú odvodiť aj vyššie derivácie krivosti. Vrámci tejto práce sa podarilo vyjadriť až štvrtú deriváciu krivosti grafu funkcie  $y = f(x)$ , a aj keď nejde o deriváciu vysokého stupňa, už aj tento vzťah je veľmi komplikovaný a obsahuje príliš veľa rôznych sčítancov. Platí:

$$k^{(3)} = \sigma \left( \frac{f^{(5)}}{(1 + f^{(1)2})^{\frac{3}{2}}} - 9 \frac{f^{(2)} f^{(3)}}{(1 + f^{(1)2})^{\frac{5}{2}}} - 9 \frac{f^{(2)2} f^{(3)}}{(1 + f^{(1)2})^{\frac{5}{2}}} - 9 \frac{f^{(1)} f^{(3)2}}{(1 + f^{(1)2})^{\frac{5}{2}}} \right)$$

$$\begin{aligned}
 & -12 \frac{f^{(1)} f^{(2)} f^{(4)}}{(1 + f^{(1)^2})^{\frac{5}{2}}} + 45 \frac{f^{(1)} f^{(2)^4}}{(1 + f^{(1)^2})^{\frac{7}{2}}} + 45 \frac{f^{(1)^2} f^{(2)} f^{(3)}}{(1 + f^{(1)^2})^{\frac{7}{2}}} + 45 \frac{f^{(1)^2} f^{(2)^2} f^{(3)}}{(1 + f^{(1)^2})^{\frac{7}{2}}} \\
 & -105 \frac{f^{(1)^3} f^{(2)^4}}{(1 + f^{(1)^2})^{\frac{9}{2}}}) \\
 k^{(4)} = & \sigma \left( \frac{f^{(6)}}{(1 + f^{(1)^2})^{\frac{3}{2}}} - 9 \frac{f^{(2)} f^{(4)}}{(1 + f^{(1)^2})^{\frac{5}{2}}} - 9 \frac{f^{(3)^2}}{(1 + f^{(1)^2})^{\frac{5}{2}}} - 15 \frac{f^{(1)} f^{(2)} f^{(5)}}{(1 + f^{(1)^2})^{\frac{5}{2}}} \right. \\
 & - 21 \frac{f^{(2)^2} f^{(4)}}{(1 + f^{(1)^2})^{\frac{5}{2}}} - 27 \frac{f^{(2)} f^{(3)^2}}{(1 + f^{(1)^2})^{\frac{5}{2}}} - 30 \frac{f^{(1)} f^{(3)} f^{(4)}}{(1 + f^{(1)^2})^{\frac{5}{2}}} + 45 \frac{f^{(2)^5}}{(1 + f^{(1)^2})^{\frac{7}{2}}} \\
 & + 45 \frac{f^{(1)^2} f^{(3)^2}}{(1 + f^{(1)^2})^{\frac{7}{2}}} + 45 \frac{f^{(1)^2} f^{(2)} f^{(4)}}{(1 + f^{(1)^2})^{\frac{7}{2}}} + 105 \frac{f^{(1)^2} f^{(2)^2} f^{(4)}}{(1 + f^{(1)^2})^{\frac{7}{2}}} + 105 \frac{f^{(1)} f^{(2)^2} f^{(3)}}{(1 + f^{(1)^2})^{\frac{7}{2}}} \\
 & + 135 \frac{f^{(1)^2} f^{(2)} f^{(3)^2}}{(1 + f^{(1)^2})^{\frac{7}{2}}} + 315 \frac{f^{(1)} f^{(2)^3} f^{(3)}}{(1 + f^{(1)^2})^{\frac{7}{2}}} - 315 \frac{f^{(1)^3} f^{(2)^2} f^{(3)}}{(1 + f^{(1)^2})^{\frac{9}{2}}} - 630 \frac{f^{(1)^2} f^{(2)^5}}{(1 + f^{(1)^2})^{\frac{9}{2}}} \\
 & \left. - 735 \frac{f^{(1)^3} f^{(2)^3} f^{(3)}}{(1 + f^{(1)^2})^{\frac{9}{2}}} + 945 \frac{f^{(1)^4} f^{(2)^5}}{(1 + f^{(1)^2})^{\frac{11}{2}}} \right)
 \end{aligned}$$

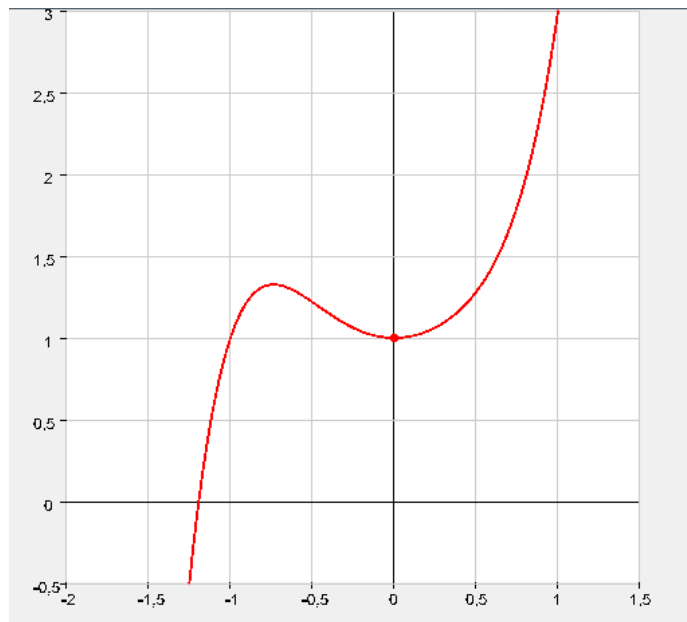
Žiaľ, pomocou týchto výpočtov sa nepodarilo nájsť všeobecný predpis na výpočet  $n$ -tej derivácie krivosti, keďže sa to ukázala byť náročná a dlhá cesta a táto úloha nebola hlavnou súčasťou tejto práce. Tieto výpočty však pomohli nájsť príklady kriviek, ktoré majú vrcholy vyšších rádov.

**Veta 2.2.1** (Príklady kriviek s vrcholmi prvého rádu):

Nech máme krivku vyjadrenú grafom polynomickej funkcie s predpisom  $y = f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ , kde  $n \in \mathbb{N}$  a  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ . Potom krivky  $f(x) = x^5 + x^2 + a_0$ ,  $f(x) = x^7 + x^2 + a_0$  a  $f(x) = x^7 + x^6 + x^4 + x^2 + a_0$  majú v bode  $x = 0$  vrcholy prvého rádu.

*Dôkaz.* Nech  $f(x) = x^5 + x^2 + a_0$ . Derivovaním tejto funkcie dostaneme:  $f^{(1)}(x) = 5x^4 + 2x$ ,  $f^{(2)}(x) = 20x^3 + 2$ ,  $f^{(3)}(x) = 60x^2$ ,  $f^{(4)}(x) = 120x$ . Pre  $x = 0$  teda máme:  $f^{(1)}(0) = 0$ ,  $f^{(2)}(0) = 2$ ,  $f^{(3)}(0) = 0$ ,  $f^{(4)}(0) = 0$ . Dosadením týchto rovností do vzťahov pre výpočet krivosti a jej derivácií dostávame:  $k(0) = 2 \neq 0$ ,  $k^{(1)}(0) = 0$  a  $k^{(2)}(0) = -24 \neq 0$ . Podľa definície vrcholu prvého rádu má teda táto krivka v bode  $x = 0$  obyčajný vrchol.

Úplne analogicky sa ukáže, že aj  $f(x) = x^7 + x^2 + a_0$  a  $f(x) = x^7 + x^6 + x^4 + x^2 + a_0$  majú v bode  $x = 0$  vrchol prvého rádu.  $\square$



Obr. 2.1: Krivka daná predpisom  $f(x) = x^5 + x^2 + 1$  majúca v bode  $x = 0$  vrchol prvého rádu

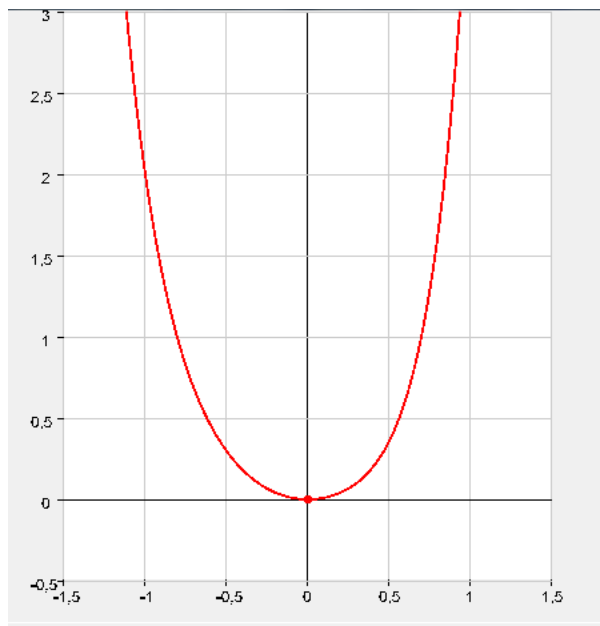
**Veta 2.2.2** (Príklady kriviek s vrcholmi druhého rádu):

Nech máme krivku vyjadrenú grafom polynomickej funkcie s predpisom  $y = f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ , kde  $n \in \mathbb{N}$  a  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ . Potom krivky  $f(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + a_0$ , a  $f(x) = x^5 + a^3 x^4 + a x^2 + a_0$ , kde  $a \in \mathbb{R}$ , majú v bode  $x = 0$  vrchol druhého rádu.

*Dôkaz.* Nech  $f(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + a_0$ . Derivovaním tejto funkcie dostaneme:  $f^{(1)}(x) = 6x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 2x$ ,  $f^{(2)}(x) = 30x^4 + 20x^3 + 12x^2 + 2$ ,  $f^{(3)}(x) = 120x^3 + 60x^2 + 24x$ ,  $f^{(4)}(x) = 360x^2 + 120x + 24$ ,  $f^{(5)}(x) = 720x + 120$ . Pre  $x = 0$  teda máme:  $f^{(1)}(0) = 0$ ,  $f^{(2)}(0) = 2$ ,  $f^{(3)}(0) = 0$ ,  $f^{(4)}(0) = 24$  a  $f^{(5)}(0) = 120$ . Dosadením týchto rovností do vzťahov pre výpočet krivosti a jej derivácií dostávame:  $k(0) = 2 \neq 0$ ,  $k^{(1)}(0) = 0$ ,  $k^{(2)}(0) = 24 - 3 \cdot 2^3 = 24 - 24 = 0$  a  $k^{(3)}(0) = 120 \neq 0$ . Podľa definície vrcholu vyššieho rádu má teda táto krivka v bode  $x = 0$  vrchol

druhého rádu.

Úplne analogicky sa ukáže, že aj  $f(x) = x^5 + a^3x^4 + ax^2 + a_0$ , kde  $a \in \mathbb{R}$ , má v bode  $x = 0$  vrchol druhého rádu.  $\square$



Obr. 2.2: Krivka daná predpisom  $f(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^2$  majúca v bode  $x = 0$  vrchol druhého rádu

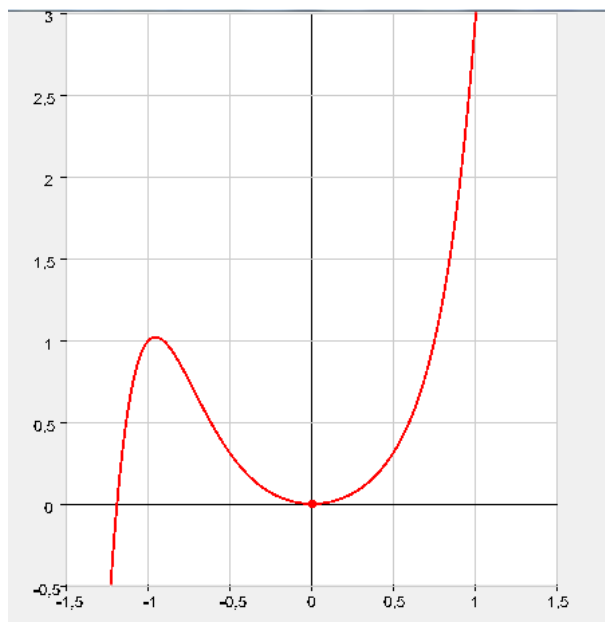
**Veta 2.2.3** (Príklady kriviek s vrcholmi tretieho rádu):

Nech máme krivku vyjadrenú grafom polynomickej funkcie s predpisom  $y = f(x) = a_nx^n + \dots + a_1x + a_0$ , kde  $n \in \mathbb{N}$  a  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ . Potom krivky  $f(x) = x^7 + x^4 + x^2 + a_0$ ,  $f(x) = x^6 + a^3x^4 + ax^2 + a_0$ , kde  $a \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^7 + x^2 + a_0$  majú v bode  $x = 0$  vrchol tretieho rádu.

*Dôkaz.* Nech  $f(x) = x^7 + x^4 + x^2 + a_0$ . Derivovaním tejto funkcie dostaneme:  $f^{(1)}(x) = 7x^6 + 4x^3 + 2x$ ,  $f^{(2)}(x) = 42x^5 + 12x^2 + 2$ ,  $f^{(3)}(x) = 210x^4 + 24x$ ,  $f^{(4)}(x) = 840x^3 + 24$ ,  $f^{(5)}(x) = 2520x^2$  a  $f^{(6)}(x) = 5040x$ . Pre  $x = 0$  teda máme:  $f^{(1)}(0) = 0$ ,  $f^{(2)}(0) = 2$ ,  $f^{(3)}(0) = 0$ ,  $f^{(4)}(0) = 24$ ,  $f^{(5)}(0) = 0$  a  $f^{(6)}(0) = 0$ . Dosadením týchto rovností do vzťahov pre výpočet krivosti a jej derivácií dostávame:  $k(0) = 2 \neq 0$ ,  $k^{(1)}(0) = 0$ ,  $k^{(2)}(0) = 24 - 3 \cdot 2^3 = 24 - 24 = 0$ ,  $k^{(3)}(0) = 0$

a  $k^{(4)}(0) = -21 \cdot 2^2 \cdot 24 - 9 \cdot 2 \cdot 24 + 45 \cdot 2^5 = -2016 - 432 + 1440 = -1008 \neq 0$ . Podľa definície vrcholu vyššieho rádu má teda táto krivka v bode  $x = 0$  vrchol tretieho rádu.

Úplne analogicky sa ukáže, že aj  $f(x) = x^6 + a^3x^4 + ax^2 + a_0$ , kde  $a \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^7 + x^2 + a_0$  majú v bode  $x = 0$  vrchol tretieho rádu.  $\square$



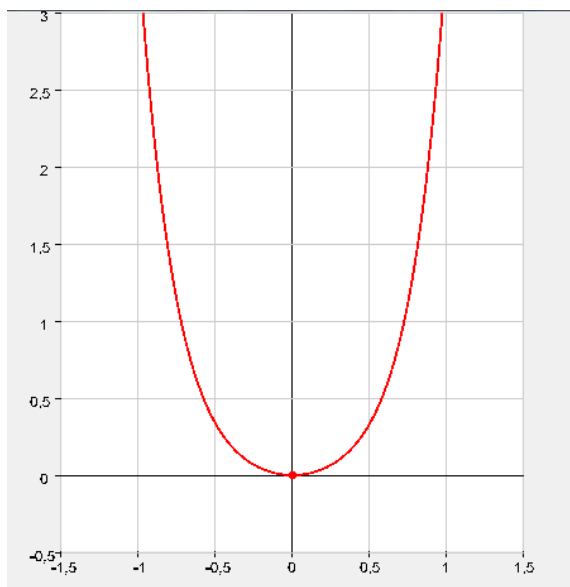
Obr. 2.3: Krivka daná predpisom  $f(x) = x^7 + x^4 + x^2$  majúca v bode  $x = 0$  vrchol tretieho rádu

**Veta 2.2.4** (Príklad krivky s vrcholom štvrtého rádu):

Nech máme krivku vyjadrenú grafom polynomickej funkcie s predpisom  $y = f(x) = a_nx^n + \dots + a_1x + a_0$ , kde  $n \in \mathbb{N}$  a  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ . Potom krivka  $f(x) = 1,4x^6 + x^4 + x^2 + a_0$  má v bode  $x = 0$  vrchol štvrtého rádu alebo vyšší.

*Dôkaz.* Nech  $f(x) = 1,4x^6 + x^4 + x^2 + a_0$ . Derivovaním tejto funkcie dostaneme:  $f^{(1)}(x) = 8,4x^5 + 4x^3 + 2x$ ,  $f^{(2)}(x) = 42x^4 + 12x^2 + 2$ ,  $f^{(3)}(x) = 168x^3 + 24x$ ,  $f^{(4)}(x) = 504x^2 + 24$ ,  $f^{(5)}(x) = 1008x$ ,  $f^{(6)}(x) = 1008$  a  $f^{(7)}(x) = 0$ . Pre  $x = 0$  teda máme:  $f^{(1)}(0) = 0$ ,  $f^{(2)}(0) = 2$ ,  $f^{(3)}(0) = 0$ ,  $f^{(4)}(0) = 24$ ,  $f^{(5)}(0) = 0$ ,  $f^{(6)}(0) = 1008$  a  $f^{(7)}(0) = 0$ . Dosadením týchto rovností do vzťahov pre výpočet krivosti a jej

derivácií dostávame:  $k(0) = 2 \neq 0$ ,  $k^{(1)}(0) = 0$ ,  $k^{(2)}(0) = 24 - 3 \cdot 2^3 = 24 - 24 = 0$ ,  
 $k^{(3)}(0) = 0$ ,  $k^{(4)}(0) = 1008 - 21 \cdot 2^2 \cdot 24 - 9 \cdot 2 \cdot 24 + 45 \cdot 2^5 = 1008 - 2016 - 432 + 1440 =$   
 $1008 - 1008 = 0$ . Podľa definície vrcholu vyššieho rádu má teda táto krivka v bode  
 $x = 0$  vrchol aspoň štvrtého rádu. Keďže nepoznáme hodnotu vyšších derivácií  
krivosti v bode  $x = 0$ , presný rád vrcholu nevieme určiť.  $\square$



Obr. 2.4: Krivka daná predpisom  $f(x) = 1,4x^6 + x^4 + x^2$  majúca v bode  $x = 0$  vrchol aspoň štvrtého rádu

Pomocou predchádzajúcich viet sme ukázali, že naozaj existujú krivky, ktoré majú aj vrcholy vyššieho rádu ako prvého.

## 2.3 Oskulačná kružnica krivky vo všeobecnom bode a v obyčajnom vrchole

Nech je daná krivka  $P$ . Vieme, že k tejto krivke vieme v každom jej bode  $P(t)$  zostrojiť oskulačnú kružnicu, ktorá bude mať s danou krivkou spoločný práve bod  $P(t)$ , jej stred bude ležať na normále tejto krivky zostrojenej v bode  $P(t)$  a jej polomer sa bude rovnať prevrátenej hodnote krivosti krivky v bode  $P(t)$ .

Oskulačná kružnica krivky v danom bode dáva základnú predstavu o tvare rovinatej krivky v okolí tohto bodu. V tejto kapitole ukážeme, aká je poloha oskulačnej kružnice vzhľadom na krivku v okolí jej bodu, v ktorom je zostoržená. Budeme uvažovať zatiaľ len o všeobecnom bode krivky a o obyčajnom vrchole krivky.

V celej kapitole budeme uvažovať krivku danú prirodzenou parametrizáciou  $P(s) = (x(s), y(s))$ ,  $s \in I$ , kde  $I$  je interval. Danú krivku budeme skúmať v neinflexnom bode. Prirodzená parametrizácia má viacero dôležitých vlastností, pripomeňme najdôležitejšie z nich:

- V prirodzenej parametrizácii je bod neinflexný práve vtedy, ak  $P''(s) \neq 0$
- V prirodzenej parametrizácii má vektor prvej derivácie danej krivky jednotkovú dĺžku, platí teda:  $|P'(s)| = 1$
- Vektory prvej a druhej derivácie sú pre krivku danú prirodzenou parametrizáciou na seba kolmé, teda pre ich skalárny súčin platí:  $P'(s) \cdot P''(s) = 0$
- V prirodzenej parametrizácii je krivosť krivky vyjadrená nasledovným vzťahom:  $k(s) = |P''(s)|$
- V každom bode krivky vieme dotykový a normálový vektor krivky vyjadriť vzťahmi  $\mathbf{t}(s) = P'(s)$  a  $\mathbf{n}(s) = \frac{P''(s)}{|P''(s)|} = \frac{P''(s)}{k(s)}$

Veľmi dôležitým nástrojom, ktoré opisujú krivky, sú Frenetove vzorce. Tieto vzorce pre rovinnú krivku vyjadrujú derivácie jednotkového dotykového a jednotkového normálového vektora krivky. Ak je krivka daná prirodzenou parametrizáciou, majú tieto vzorce tvar:

$$\begin{aligned}\mathbf{t}'(s) &= k(s) \mathbf{n}(s) \\ \mathbf{n}'(s) &= -k(s) \mathbf{t}(s)\end{aligned}$$

Keďže v tejto kapitole budeme pozorovať, ako sa správa oskulačná kružnica krivky v danom bode vzhľadom ku krivke, pripomeňme, ako sú vyjadrené stred a polomer

tejto kružnice v prirodzenej parametrizácii. Pre stred  $S$  kružnice platí  $S(s) = P(s) + r(s) \mathbf{n}(s)$ , kde  $r$  je polomer vyjadrený vzťahom  $r(s) = \frac{1}{k(s)}$ .

Majme danú krivku  $P$  prirodzenou parametrizáciou a na nej neinflexný bod  $P(s_0)$ . V tomto bode nech je daná oskulačná kružnica krivky so stredom v  $S(s_0)$  a s polomerom  $r(s_0)$ .

Pre body blízke bodu  $P(s_0)$ , teda pre parametre blízke  $s_0$  chceme zistiť, aká je poloha bodov  $P(s)$  vzhľadom na oskulačnú kružnicu zostrojenú v bode  $P(s_0)$ . Táto úloha je ekvivalentná tomu, že budeme pozorovať, ako sa mení vzdialenosť týchto bodov od stredu  $S(s_0)$  oskulačnej kružnice.

Zostrojme funkciu  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ , ktorá každému parametru  $s \in I$  priradí vzdialenosť bodu  $P(s)$  od bodu  $S(s_0)$ :

$$g(s) = |P(s) S(s_0)|, s \in I$$

Keďže budeme potrebovať derivácie tejto funkcie, je vhodné si ju nahradiť funkciou  $f(s) = g^2(s)$ , ktorá má rovnaký priebeh aj rovnaké extrémny, ako funkcia  $g$ , ale ľahšie sa derivuje. Predpis tejto funkcie vyzerá takto:

$$f(s) = g^2(s) = |P(s) S(s_0)|^2$$

Upravme predpis tejto funkcie použitím vyjadrenia stredu  $S(s_0)$ , Frenetových vzorcov a rovnosti  $\mathbf{n}(s) \mathbf{n}(s) = 1$  pre každé  $s \in I$ :

$$\begin{aligned} f(s) &= |P(s) S(s_0)|^2 = (S(s_0) - P(s))(S(s_0) - P(s)) = (S(s_0) - P(s))^2 \\ &= ((P(s_0) + r(s_0) \mathbf{n}(s_0)) - P(s))^2 = ((P(s_0) - P(s)) + r(s_0) \mathbf{n}(s_0))^2 \\ &= (P(s) - P(s_0))^2 - 2r(s_0) \mathbf{n}(s_0) (P(s) - P(s_0)) + r^2(s_0) \end{aligned}$$

Keďže tento predpis funkcie je už o niečo komplikovanejší, zjednodušíme ho zavedením nových označení. Označme  $\Delta(s) = P(s) - P(s_0)$ . Aby sme si ešte viac sprehľadnili zápis, parameter  $s$  budeme väčšinou zo zápisu vynechávať a miesto parametra  $s_0$  budeme jednoducho písať index 0, napríklad  $P(s_0) = P_0$ ,  $r(s_0) = r_0$ ,



$\mathbf{n}(s_0) = \mathbf{n}_0$ , atď.

Týmto sa nám aj zápis funkcie  $f$  omnoho zjednoduší:

$$f = \Delta^2 - 2r_0\mathbf{n}_0\Delta + r_0^2$$

Máme teraz daný predpis funkcie, ktorá opisuje, ako sa mení vzdialenosť bodu  $P(s)$  na krivke od stredu oskulačnej kružnice. [BOŽ08]

Naším cieľom je ukázať, že vo všeobecnom bode krivky krivka prechádza z jednej strany oskulačnej kružnice na druhú stranu, kým v obyčajnom vrchole krivky leží krivka na jednej strane oskulačnej kružnice, buď zvonka alebo vnútri nej.

Pripomeňme si, že pojem obyčajný vrchol krivky súvisí s jej krivosťou. V takomto bode krivky je krivosť stacionárna a platí pre ňu, že  $k'(t_0) = 0$  a  $k''(t_0) \neq 0$ . Bod krivky je všeobecným bodom, ak pre krivosť v tomto bode platí:  $k'(t_0) \neq 0$ .

Po dôkladnejšom skúmaní funkcie  $f$  a jej prvých derivácií v parametri  $s_0$  zistíme, že majú súvis s krivosťou krivky v tomto parametri. Pomocou nich vieme dokázať vyslovené tvrdenia o polohe oskulačnej kružnice.

**Veta 2.3.1** ([BOŽ08]):

Majme danú funkciu  $f(s) = \Delta^2(s) - 2r(s_0)\mathbf{n}(s_0)\Delta(s) + r^2(s_0)$ , kde  $\Delta(s) = P(s) - P(s_0)$ . Pre prvé štyri derivácie tejto funkcie v ľubovoľnom čísle  $s \in I$  platí:

1.  $f^{(1)}(s) = 2(\Delta(s) - r(s_0)\mathbf{n}(s_0))\mathbf{t}(s) = 2(\Delta - r_0\mathbf{n}_0)\mathbf{t}$
2.  $f^{(2)}(s) = 2((\Delta(s) - r(s_0)\mathbf{n}(s_0))k(s)\mathbf{n}(s) + 1) = 2((\Delta - r_0\mathbf{n}_0)k\mathbf{n} + 1)$
3.  $f^{(3)}(s) = 2(\Delta(s) - r(s_0)\mathbf{n}(s_0))(-k^2(s)\mathbf{t}(s) + k^{(1)}(s)\mathbf{n}(s))$   
 $= 2(\Delta - r_0\mathbf{n}_0)(-k^2\mathbf{t} + k^{(1)}\mathbf{n})$
4.  $f^{(4)}(s) = 2((\Delta(s) - r(s_0)\mathbf{n}(s_0))(\alpha_4(s)\mathbf{t}(s) + \beta_4(s)\mathbf{n}(s)) + \gamma_4(s))$   
 $= 2((\Delta - r_0\mathbf{n}_0)(-3kk^{(1)}\mathbf{t} + (-k^3 + k^{(2)})\mathbf{n}) - k^2),$   
 kde  $\alpha_4(s) = -3k(s)k^{(1)}(s)$ ,  $\beta_4(s) = -k^3(s) + k^{(2)}(s)$  a  $\gamma_4(s) = -k^2(s)$

*Dôkaz.* Vetu dokážeme postupným derivovaním funkcie  $f$ . Pre deriváciu funkcie  $\Delta$  platí:  $\Delta' = P' = \mathbf{t}$

1. Derivujme funkciu  $f$ :

$$\begin{aligned} f^{(1)} &= (\Delta^2 - 2r_0\mathbf{n}_0\Delta + r_0^2)' = 2\Delta\Delta' - 2r_0\mathbf{n}_0\Delta' = 2(\Delta - r_0\mathbf{n}_0)\Delta' \\ &= 2(\Delta - r_0\mathbf{n}_0)\mathbf{t} \end{aligned}$$

Týmto je prvý vzťah dokázaný.

2. Derivujme teraz funkciu  $f^{(1)}$ :

$$f^{(2)} = (2(\Delta - r_0\mathbf{n}_0)\mathbf{t})' = 2(\Delta'\mathbf{t} + (\Delta - r_0\mathbf{n}_0)\mathbf{t}')$$

Použitím Frenetovho vzorca  $\mathbf{t}' = k\mathbf{n}$  a rovnosti  $\mathbf{t}\mathbf{t} = 1$  dostávame:

$$f^{(2)} = 2(\mathbf{t}\mathbf{t} + (\Delta - r_0\mathbf{n}_0)k\mathbf{n}) = 2((\Delta - r_0\mathbf{n}_0)k\mathbf{n} + 1)$$

3. Ďalším derivovaním dostávame  $f^{(3)}$ :

$$\begin{aligned} f^{(3)} &= 2((\Delta - r_0\mathbf{n}_0)k\mathbf{n} + 1)' = 2(\Delta'k\mathbf{n} + (\Delta - r_0\mathbf{n}_0)(k\mathbf{n})') \\ &= 2(k\mathbf{n}\mathbf{t} + (\Delta - r_0\mathbf{n}_0)(k'\mathbf{n} + k\mathbf{n}')) \end{aligned}$$

Použijeme teraz Frenetov vzorec pre deriváciu normálového vektora:  $\mathbf{n}' = -k\mathbf{t}$ .

Okrem toho vieme, že platí:  $\mathbf{n}\mathbf{t} = 0$ , keďže sú tieto vektory na seba kolmé.

$$f^{(3)} = 2(\Delta - r_0\mathbf{n}_0)(k'\mathbf{n} - k^2\mathbf{t})$$

4. Štvrtú deriváciu funkcie  $f$  dostaneme opäť priamou deriváciou predchádzajúcej:

$$\begin{aligned} f^{(4)} &= (2(\Delta - r_0 \mathbf{n}_0) (k' \mathbf{n} - k^2 \mathbf{t}))' \\ &= 2 \left( \Delta' (k' \mathbf{n} - k^2 \mathbf{t}) + (\Delta - r_0 \mathbf{n}_0) (k' \mathbf{n} - k^2 \mathbf{t})' \right) \\ &= 2 (\mathbf{t} (k' \mathbf{n} - k^2 \mathbf{t}) + (\Delta - r_0 \mathbf{n}_0) (k'' \mathbf{n} + k' \mathbf{n}' - 2kk' \mathbf{t} - k^2 \mathbf{t}')) \end{aligned}$$

Použitím vzťahov, ktoré boli uvedené v predchádzajúcich krokoch dôkazu dostávame:

$$\begin{aligned} f^{(4)} &= 2 (-k^2 + (\Delta - r_0 \mathbf{n}_0) (k'' \mathbf{n} - kk' \mathbf{t} - 2kk' \mathbf{t} - k^3 \mathbf{n})) \\ &= 2 ((\Delta - r_0 \mathbf{n}_0) (-3kk' \mathbf{t} + (-k^3 + k'') \mathbf{n}) - k^2) \end{aligned}$$

Tým je veta dokázaná. □

Pomocou tejto vety teraz už ľahko ukážeme, aké sú hodnoty týchto derivácií funkcie  $f(s)$  v parametri  $s_0$ . Hovorí o tom nasledujúca veta:

**Veta 2.3.2** ([BOŽ08]):

*Hodnoty prvých derivácií funkcie  $f$  v parametri  $s_0$  sú:*

1.  $f^{(1)}(s_0) = 0$
2.  $f^{(2)}(s_0) = 0$
3.  $f^{(3)}(s_0) = -2r(s_0)k^{(1)}(s_0)$
4.  $f^{(4)}(s_0) = -2r(s_0)k^{(2)}(s_0)$

*Dôkaz.* Tieto vzťahy dostaneme priamym dosadením do derivácií funkcie  $f$  a využitím už známych vzťahov, pričom je treba si uvedomiť, že  $\Delta(s_0) = 0$  a  $r(s_0)k(s_0) = r_0k_0 = \frac{1}{k_0}k_0 = 1$ :

1.  $f^{(1)}(s_0) = 2(\Delta_0 - r_0 \mathbf{n}_0) \mathbf{t}_0 = 0$
2.  $f^{(2)}(s_0) = 2((\Delta_0 - r_0 \mathbf{n}_0) k_0 \mathbf{n}_0 + 1) = -1 + 1 = 0$

$$\begin{aligned}
 3. \quad f^{(3)}(s_0) &= 2(\Delta_0 - r_0 \mathbf{n}_0) \left( -k_0^2 \mathbf{t}_0 + k_0^{(1)} \mathbf{n}_0 \right) = 2(-r_0 \mathbf{n}_0) \left( -k_0^2 \mathbf{t}_0 + k_0^{(1)} \mathbf{n}_0 \right) \\
 &= -2r_0 k_0^{(1)} \mathbf{n}_0 \mathbf{n}_0 = -2r_0 k_0^{(1)} \\
 4. \quad f^{(4)}(s_0) &= 2 \left( (\Delta_0 - r_0 \mathbf{n}_0) \left( -3k_0 k_0^{(1)} \mathbf{t}_0 + \left( -k_0^3 + k_0^{(2)} \right) \mathbf{n}_0 \right) - k_0^2 \right) \\
 &= -2r_0 \mathbf{n}_0 \left( -3k_0 k_0^{(1)} \mathbf{t}_0 + \left( -k_0^3 + k_0^{(2)} \right) \mathbf{n}_0 \right) - 2k_0^2 \\
 &= -2r_0 \left( -k_0^3 + k_0^{(2)} \right) \mathbf{n}_0 \mathbf{n}_0 - 2k_0^2 = 2r_0 k_0^3 - 2r_0 k_0^{(2)} - 2k_0^2 \\
 &= -2r_0 k_0^{(2)}
 \end{aligned}$$

□

Z tejto vety vidíme, že derivácie funkcie v  $s_0$  majú naozaj súvis s krivosťou krivky. V tejto časti uvedieme ešte jednu pomocnú vetu, ktorá spolu s predchádzajúcimi bude slúžiť k sformulovaniu a dôkazu tvrdenia o vzťahu oskulačnej kružnice a krivky vo všeobecnom bode a v obyčajnom vrchole.

**Veta 2.3.3** ([JAR63]):

Nech je daná funkcia  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  taká, že:  $\varphi^{(1)}(x_0) = 0, \dots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = 0$  a  $\varphi^{(n)}(x_0) \neq 0, n > 1$ . Potom platí:

- ak  $n$  je nepárne, tak funkcia  $\varphi$  má v bode  $x_0$  ostrý lokálny extrém. V prípade, že  $\varphi^{(n)}(x_0) < 0$ , ide o ostré lokálne maximum funkcie v tomto bode, v prípade, že  $\varphi^{(n)}(x_0) > 0$  ide o ostré lokálne minimum funkcie v tomto bode.
- ak  $n$  je párne, tak funkcia  $\varphi$  je v bode  $x_0$  lokálne monotónna. V prípade, že  $\varphi^{(n)}(x_0) < 0$ ,  $\varphi$  je v okolí bodu  $x_0$  klesajúca, v prípade, že  $\varphi^{(n)}(x_0) > 0$ ,  $\varphi$  je v okolí bodu  $x_0$  rastúca.

Na základe týchto tvrdení sformulujeme nasledovné vety:

**Veta 2.3.4** (Oskulačná kružnica krivky vo všeobecnom bode [BOŽ08]):

Nech je daná krivka  $P(s)$  prirodzenou parametrizáciou. Nech  $P(s_0)$  je všeobecný bod tejto krivky. V bode  $P(s_0)$  rovinatej krivky, ktorý nie je vrcholom, je krivosť ostro monotónna. Krivka prechádza z jednej strany oskulačnej kružnice na druhú, pričom dovnútra kružnice vchádza v smere rastúcej krivosti.

*Dôkaz.* Vychádzame z toho, že bod  $P(s_0)$  je všeobecným bodom krivky, z čoho vyplýva, že pre krivosť v parametri  $s_0$  platí:  $k'(s_0) \neq 0$ . Z vety o priebehu funkcie vyplýva, že krivosť krivky je v  $s_0$  ostro monotónna, pričom je klesajúca pre  $k'(s_0) < 0$  a rastúca pre  $k'(s_0) > 0$ . Prvá časť vety je tým dokázaná.

Zoberme si teraz funkciu  $f(s) = |P(s)S(s_0)|^2$  a jej derivácie v bode  $s_0$ . Podľa predchádzajúcej vety platí:

$$f^{(1)}(s_0) = 0, f^{(2)}(s_0) = 0, f^{(3)}(s_0) = -2r(s_0)k^{(1)}(s_0) \neq 0, \text{ keďže } k^{(1)}(s_0) \neq 0.$$

Znova použijeme vetu o priebehu funkcie tentoraz na funkciu  $f$ . Funkcia  $f(s)$  je teda ostro monotónna v číslach  $s_0$ , pričom klesá pre  $f^{(3)}(s_0) < 0$  a rastie pre  $f^{(3)}(s_0) > 0$ . Znamienko funkcie  $f^{(3)}(s_0) = -2r(s_0)k^{(1)}(s_0)$  závisí len od znamienka prvej derivácie krivosti krivky v  $s_0$ , keďže polomer je kladný pre každé  $s \in I$ . Navyše jej znamienko je opačné, ako je znamienko  $k^{(1)}(s_0)$ . Platí teda:

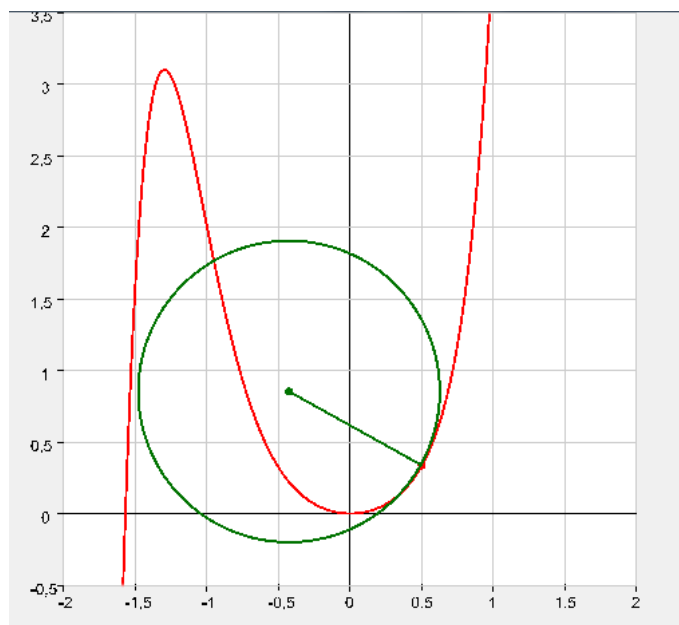
1. Ak  $k^{(1)}(s_0) < 0$ , tak  $f^{(3)}(s_0) > 0$ . Potom krivosť krivky s rastúcim  $s$  klesá a zároveň funkcia  $f$  s rastúcim  $s$  rastie. To znamená, že pre  $s$  väčšie ako  $s_0$  vzdialenosť bodov  $P(s)$  od stredu oskulačnej kružnice  $S(s_0)$  v bode  $P(s_0)$  rastie, preto pre  $s$  väčšie ako  $s_0$  ležia body  $P(s)$  zvonka tejto kružnice. Naopak pre  $s$  menšie ako  $s_0$  vzdialenosť bodov  $P(s)$  od stredu oskulačnej kružnice  $S(s_0)$  v bode  $P(s_0)$  klesá, preto pre  $s$  menšie ako  $s_0$  ležia body  $P(s)$  vnútri tejto kružnice.
2. Ak  $k^{(1)}(s_0) > 0$ , tak  $f^{(3)}(s_0) < 0$ . Potom krivosť krivky s rastúcim  $s$  rastie a zároveň funkcia  $f$  s rastúcim  $s$  klesá. To znamená, že pre  $s$  väčšie ako  $s_0$  vzdialenosť bodov  $P(s)$  od stredu oskulačnej kružnice  $S(s_0)$  v bode  $P(s_0)$  klesá, preto pre  $s$  väčšie ako  $s_0$  ležia body  $P(s)$  vnútri tejto kružnice. Naopak pre  $s$  menšie ako  $s_0$  vzdialenosť bodov  $P(s)$  od stredu oskulačnej kružnice  $S(s_0)$  v bode  $P(s_0)$  rastie, preto pre  $s$  menšie ako  $s_0$  ležia body  $P(s)$  zvonka tejto kružnice.

V oboch prípadoch krivka vchádza do oskulačnej kružnice v smere rastúcej krivosti.

□

**Veta 2.3.5** (Oskulačná kružnica krivky v obyčajnom vrchole [BOŽ08]):

*Nech je daná krivka  $P(s)$  prirodzenou parametrizáciou. Nech  $P(s_0)$  je obyčajný*



Obr. 2.5: Oskulačná kružnica krivky v nevrchole, krivka prechádza z jednej strany kružnice na druhú

vrchol tejto krivky. V obyčajnom vrchole  $P(s_0)$  rovinatej krivky má krivosť ostrý lokálny extrém. Rovinná krivka ostáva v blízkosti vrchola na jednej strane oskulačnej kružnice, pričom pri lokálnom minime krivosti v  $s_0$  leží krivka vnútri oskulačnej kružnice a v prípade lokálneho maxima krivosti v  $s_0$  leží krivka vonka oskulačnej kružnice.

*Dôkaz.* Vychádzame z toho, že bod  $P(s_0)$  je obyčajným vrcholom krivky, z čoho vyplýva, že pre krivosť v parametri  $s_0$  platí:  $k^{(1)}(s_0) = 0$  a  $k^{(2)}(s_0) \neq 0$ . Z vety o priebehu funkcie vyplýva, že krivosť krivky má v  $s_0$  ostrý lokálny extrém, pričom pre  $k^{(2)}(s_0) < 0$  má krivosť v  $s_0$  ostré lokálne maximum a pre  $k^{(2)}(s_0) > 0$  má krivosť v  $s_0$  ostré lokálne minimum. Prvá časť vety je tým dokázaná.

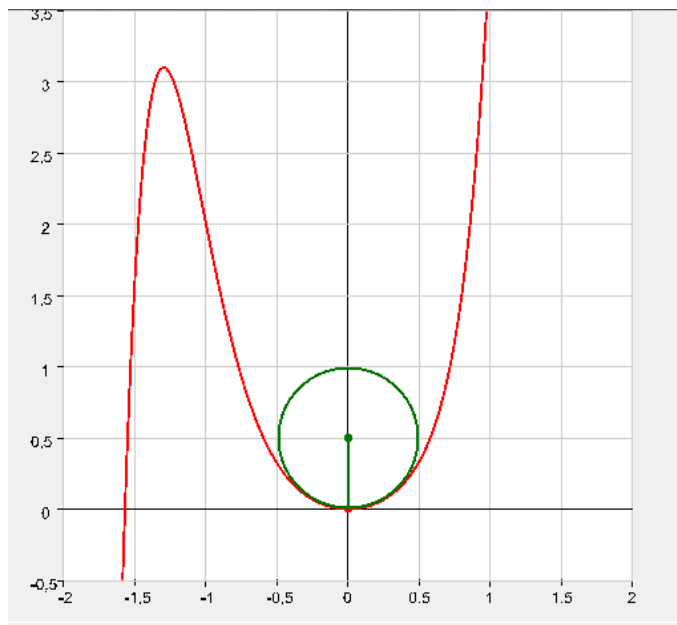
Zoberme si teraz funkciu  $f(s) = |P(s)S(s_0)|^2$  a jej derivácie v bode  $s_0$ . Podľa jednej z predchádzajúcich viet platí:

$f^{(1)}(s_0) = 0$ ,  $f^{(2)}(s_0) = 0$ ,  $f^{(3)}(s_0) = -2r(s_0)k^{(1)}(s_0) = 0$ , keďže  $k^{(1)}(s_0) = 0$  a  $f^{(4)}(s_0) = -2r(s_0)k^{(2)}(s_0) \neq 0$ , keďže  $k^{(2)}(s_0) \neq 0$ . Znova použijeme vetu o priebehu funkcie tentoraz na funkciu  $f$ . Funkcia  $f(s)$  má v čísle  $s_0$  lokálny ex-

trém, pričom pre  $f^{(3)}(s_0) < 0$  ide o lokálne maximum a pre  $f^{(3)}(s_0) > 0$  o lokálne minimum funkcie  $f$ .

Znamienko funkcie  $f^{(4)}(s_0) = -2r(s_0)k^{(2)}(s_0)$  závisí len od znamienka druhej derivácie krivosti krivky v  $s_0$ , keďže polomer je kladný pre každé  $s \in I$ . Navyše jej znamienko je opačné, ako je znamienko  $k^{(2)}(s_0)$ . Platí teda:

1. Ak  $k^{(2)}(s_0) < 0$ , tak  $f^{(4)}(s_0) > 0$ . Potom krivosť krivky má v  $s_0$  ostré lokálne maximum a zároveň funkcia  $f$  má v  $s_0$  ostré lokálne minimum. To znamená, že vzdialenosť bodov  $P(s)$  od stredu oskulačnej kružnice  $S(s_0)$  v bode  $P(s_0)$  má ostré lokálne minimum, preto v blízkosti  $s_0$  ležia body  $P(s)$  krivky zvonka tejto kružnice. Krivka leží teda lokálne v okolí bodu  $s_0$  zvonka oskulačnej kružnice v bode  $P(s_0)$ .
2. Ak  $k^{(2)}(s_0) > 0$ , tak  $f^{(4)}(s_0) < 0$ . Potom krivosť krivky má v  $s_0$  ostré lokálne minimum a zároveň funkcia  $f$  má v  $s_0$  ostré lokálne maximum. To znamená, že vzdialenosť bodov  $P(s)$  od stredu oskulačnej kružnice  $S(s_0)$  v bode  $P(s_0)$  má ostré lokálne maximum, preto v blízkosti  $s_0$  ležia body  $P(s)$  krivky vnútri tejto kružnice. Krivka leží teda lokálne v okolí bodu  $s_0$  vnútri oskulačnej kružnice v bode  $P(s_0)$ .  $\square$



Obr. 2.6: Oskulačná kružnica krivky v obyčajnom vrchole, krivka leží zvonka kružnice

Predchádzajúce vety dávajú základnú predstavu o tom, aká je poloha krivky vzhľadom na oskulačnú kružnicu vo všeobecnom bode krivky a v obyčajnom vrchole krivky. Ešte stále však nevieme, ako sa oskulačná kružnica správa vo vrchole vyššieho rádu. Našou snahou bude v ďalšej kapitole zistiť niečo viac o jej polohe práve vo vrcholoch vyššieho rádu.

## 2.4 Oskulačná kružnica krivky vo vrchole vyššieho rádu

V predchádzajúcej kapitole sme ukázali, aká je vzájomná poloha oskulačnej kružnice a krivky vo všeobecnom bode krivky a v obyčajnom vrchole krivky. Pripomeňme si, že vo všeobecnom bode krivky  $P(s)$  danej prirodzenou parametrizáciou, teda v bode  $P(s_0)$ , pre ktorý platí  $k^{(1)}(s_0) \neq 0$ , krivka prechádza z jednej strany oskulačnej kružnice na druhú a v obyčajnom vrchole krivky  $P(s)$ , teda v bode  $P(s_0)$ , pre ktorý platí  $k^{(1)}(s_0) = 0$  a  $k^{(2)}(s_0) \neq 0$ , krivka leží lokálne na jednej strane oskulačnej kružnice.

V tejto kapitole je snahou vysloviť tvrdenie, ktoré bude hovoriť o polohe krivky a oskulačnej kružnice v bode krivky, ktorý nie je ani všeobecným bodom, ani obyčajným vrcholom, teda vo vrchole vyššieho rádu.

Vieme, že vrchol  $P(s_0)$  krivky  $P(s)$  nazývame vrcholom  $k$ -teho rádu, ak pre krivosť, resp. jej derivácie v parametri  $s_0$  platia vzťahy:

$$k(s_0) \neq 0, k^{(1)}(s_0) = 0, \dots, k^{(k)}(s_0) = 0, k \geq 2$$

Medzi nevrcholom, obyčajným vrcholom krivky a medzi vrcholom vyššieho rádu krivky existuje analógia. Keby sme z definície vrcholu  $k$ -teho rádu vynechali podmienku, že  $k \geq 2$ , všeobecný bod krivky by sme mohli považovať za vrchol 0-tého rádu krivky, kým obyčajný vrchol by bol vrcholom 1-ého rádu krivky.

Na základe tejto predstavy by sme ľahko dospeli k predpokladu, že vo vrchole párneho rádu sa bude krivka a jej oskulačná kružnica správať rovnako, ako v nev-



chole krivky a vo vrchole nepárneho rádu bude poloha krivky k oskulačnej kružnici rovnaká, ako v obyčajnom vrchole. V tejto kapitole tento predpoklad potvrdíme a dokážeme.

V predchádzajúcej kapitole sme definovali funkciu, ktorá opisovala, ako sa mení vzdialenosť bodov  $P(s)$  krivky od stredu oskulačnej kružnice  $S(s_0)$  v okolí bodu  $P(s_0)$ . Jej predpis vyzeral nasledovne:

$$\begin{aligned} f(s) &= |P(s)S(s_0)|^2 \\ &= (P(s) - P(s_0))^2 - 2r(s_0)\mathbf{n}(s_0)(P(s) - P(s_0)) + r^2(s_0) \\ &= \Delta^2 - 2r_0\mathbf{n}_0\Delta + r_0^2, \end{aligned}$$

kde  $S(s_0)$  je stred oskulačnej kružnice,  $r(s_0) = r_0$  je jej polomer a  $\Delta(s) = \Delta = P(s) - P(s_0)$ .

Okrem toho sme uviedli vetu, ktorá hovorila o tom, ako vyzerajú prvé derivácie funkcie  $f$  a ich hodnoty v  $s_0$ . Teraz nám ale nebudú stačiť len uvedené derivácie, budeme potrebovať aj ďalšie,  $n$ -té derivácie tejto funkcie. Preto jedna z viet, ktorú vyslovíme, bude hovoriť o tom, ako vyzerajú derivácie  $n$ -tého rádu funkcie  $f$ . Ešte predtým však zavedieme nové množiny, ktoré nám neskôr výrazne uľahčia prácu.

**Definícia 2.4.1:**

Majme danú funkciu  $\varphi : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$  hladkú a diferencovateľnú a takú, že spĺňa podmienku:  $\varphi(x_0, 0, \dots, 0) = 0$  pre všetky  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Označme  $A_m$  množinu všetkých funkcií, ktoré majú tieto vlastnosti, teda:

$$A_m = \{\varphi : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi \text{ je hladká a diferencovateľná a } \varphi(x_0, 0, \dots, 0) = 0 \text{ pre všetky } x_0 \in \mathbb{R}\}$$

**Definícia 2.4.2:**

Nech je daná funkcia  $\varphi$  majúca vlastnosti uvedené v predchádzajúcej definícii, teda  $\varphi \in A_m$ , nech  $k : I \rightarrow \mathbb{R}$  je krivosť krivky a  $k^{(1)}(s), \dots, k^{(m)}(s), s \in I$  sú jej

príslušné derivácie. Potom množinu všetkých zložených funkcií  $F(s) = \varphi(k(s), k^{(1)}(s), \dots, k^{(m)}(s))$ ,  $s \in I$  budeme označovať  $A_m(k)$  a teda platí:

$$A_m(k) = \{F(s) = \varphi(k(s), k^{(1)}(s), \dots, k^{(m)}(s)), s \in I \wedge \varphi \in A_m\}$$

O funkcii z množiny  $A_m(k)$  budeme tiež hovoriť, že je funkciou typu  $A_m(k)$ .

Poznámka: Dôvod, prečo zavádzame množinu funkcií  $A_m(k)$  je ten, že v niektorých nasledujúcich výpočtoch sa stretne práve s funkciami z tejto množiny, ktoré obsahujú rôzne kombinácie krivosti krivky a jej derivácií, pričom nie vždy je dôležitý presný tvar týchto funkcií. Stačí vedieť, derivácie ktorého najvyššieho rádu obsahujú.

**Veta 2.4.1** (Pravidlá pre počítanie s funkciami typu  $A_m(k)$ ):

Nech  $m, n$  sú prirodzené čísla a nech  $a(k, \dots, k^{(m)}) \in A_m(k)$ ,  $b(k, \dots, k^{(n)}) \in A_n(k)$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . Nech  $k$  je krivosť krivky a  $k^{(i)}$  je  $i$ -ta derivácia krivosti. Potom:

1.  $ka(k, \dots, k^{(m)}) \in A_m(k)$
2.  $k^{(n)}a(k, \dots, k^{(m)}) \in A_l(k)$ , kde  $l = \max\{m, n\}$
3.  $a(k, \dots, k^{(m)}) + a(k, \dots, k^{(n)}) \in A_l(k)$ , kde  $l = \max\{m, n\}$
4.  $ca(k, \dots, k^{(m)}) \in A_m(k)$
5.  $(a(k, \dots, k^{(m)}))' \in A_{m+1}(k)$

*Dôkaz.* Pri dôkaze prvých 4 tvrdení si stačí uvedomiť, akú vlastnosť má funkcia  $a(k, \dots, k^{(m)}) \in A_m(k)$  a ako sa táto funkcia zmení pri operáciách naznačených vo vete.

Posledné tvrdenie dokážeme podrobnejšie. Je treba si uvedomiť, že  $a(k, \dots, k^{(m)})$  je zložená funkcia  $a(k, \dots, k^{(m)})(s) = a(k(s), \dots, k^{(m)}(s))$ , kde  $a(x_1, \dots, x_m)$  je funkcia z množiny  $A_m$ . Derivujeme ju podľa pravidiel o derivácii zloženej funkcie.

Platí teda:

$$(a(k, \dots, k^{(m)}))' = \frac{\partial a}{\partial x_0} k^{(1)} + \frac{\partial a}{\partial x_1} k^{(2)} + \dots + \frac{\partial a}{\partial x_m} k^{(m+1)} = \psi(k, k^{(1)}, \dots, k^{(m+1)})$$

Z tvaru výslednej derivácie je jasné, že ak  $(a(k, \dots, k^{(m)}))'$  je zložená funkcia s vonkajšou zložkou  $\psi(x_0, \dots, x_{m+1}) = \frac{\partial a}{\partial x_0} x_1 + \frac{\partial a}{\partial x_1} x_2 + \dots + \frac{\partial a}{\partial x_m} x_{m+1}$  a s vnútornými

zložkami  $x_0 = k, x_1 = k^{(1)}, \dots, x_{m+1} = k^{(m+1)}$ . Podmienka  $\psi(x_0, 0, \dots, 0) = 0$  pre všetky  $x_0 \in \mathbb{R}$  je zrejme splnená, preto  $\psi \in A_{m+1}$ , čiže  $(a(k, \dots, k^{(m)}))' \in A_{m+1}(k)$ . Tým je veta dokázaná.  $\square$

Využívajúc predchádzajúce poznatky sformulujeme vetu o  $n$ -tej derivácii funkcie  $f$ :

**Veta 2.4.2** (Derivácie  $n$ -tého rádu funkcie  $f$ ):

Nech je daná funkcia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  s predpisom  $f(s) = |P(s)S(s_0)|^2$ , kde  $P(s)$  je bod krivky danej prirodzenou parametrizáciou a  $S(s_0)$  je stred oskulačnej kružnice. Nech krivosť krivky v bode  $P(s)$  je  $k(s)$  a  $\Delta(s) = P(s) - S(s_0)$ . Potom pre každé  $n \geq 5$  existujú také funkcie  $a_n(k, \dots, k^{(n-3)}) \in A_{n-3}(k)$ ,  $b_n(k, \dots, k^{(n-4)}) \in A_{n-4}(k)$  a  $c_n(k, \dots, k^{(n-4)}) \in A_{n-4}(k)$ , že pre  $n$ -tú deriváciu funkcie  $f(s)$  platí:

1. Ak  $n$  je párne, tak

$$f^{(n)}(s) = 2((\Delta(s) - r(s_0)\mathbf{n}(s_0))(\alpha_n(s)\mathbf{t}(s) + \beta_n(s)\mathbf{n}(s)) + \gamma_n(s)), \quad n \geq 5$$

kde

$$\begin{aligned} \alpha_n(s) &= a_n(k, \dots, k^{(n-3)}), \\ \beta_n(s) &= (-1)^{\frac{n}{2}-1} k^{n-1}(s) + k^{(n-2)}(s) + b_n(k, \dots, k^{(n-4)}), \\ \gamma_n(s) &= (-1)^{\frac{n}{2}-1} k^{n-2}(s) + c_n(k, \dots, k^{(n-4)}), \quad n \geq 5 \end{aligned}$$

2. Ak  $n$  je nepárne, tak

$$f^{(n)}(s) = 2((\Delta(s) - r(s_0)\mathbf{n}(s_0))(\alpha_n(s)\mathbf{t}(s) + \beta_n(s)\mathbf{n}(s)) + \gamma_n(s)), \quad n \geq 5$$

kde

$$\begin{aligned} \alpha_n(s) &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} k^{n-1}(s) + a_n(k, \dots, k^{(n-3)}) \\ \beta_n(s) &= k^{(n-2)}(s) + b_n(k, \dots, k^{(n-4)}) \\ \gamma_n(s) &= c_n(k, \dots, k^{(n-4)}), \quad n \geq 5 \end{aligned}$$

*Dôkaz.* Vetu budeme dokazovať matematickou indukciou.

1. Vieme, že pre  $n = 4$  je derivácia  $f$  vyjadrená takto:

$$\begin{aligned} f^{(4)} &= 2((\Delta - r_0\mathbf{n}_0)(-3kk^{(1)}\mathbf{t} + (-k^3 + k^{(2)})\mathbf{n}) - k^2) \\ &= 2((\Delta - r_0\mathbf{n}_0)(\alpha_4\mathbf{t} + \beta_4\mathbf{n}) + \gamma_4), \end{aligned}$$

kde  $\alpha_4 = -3kk^{(1)}$ ,  $\beta_4 = -k^3 + k^{(2)}$  a  $\gamma_4 = -k^2$ .

Derivujme tento vzťah:

$$\begin{aligned} f^{(5)} &= (2((\Delta - r_0\mathbf{n}_0)(-3kk^{(1)}\mathbf{t} + (-k^3 + k^{(2)})\mathbf{n}) - k^2))' \\ &= (2((\Delta - r_0\mathbf{n}_0)(\alpha_4\mathbf{t} + \beta_4\mathbf{n}) + \gamma_4))' \\ &= 2((\Delta - r_0\mathbf{n}_0)'(\alpha_4\mathbf{t} + \beta_4\mathbf{n}) + (\Delta - r_0\mathbf{n}_0)(\alpha_4\mathbf{t} + \beta_4\mathbf{n})' + \gamma_4') \end{aligned}$$

Počítajme  $(\Delta - r_0\mathbf{n}_0)'(\alpha_4\mathbf{t} + \beta_4\mathbf{n})$ , pričom vieme, že  $(\Delta - r_0\mathbf{n}_0)' = \mathbf{t}$ :

$$(\Delta - r_0\mathbf{n}_0)'(\alpha_4\mathbf{t} + \beta_4\mathbf{n}) = \mathbf{t}(\alpha_4\mathbf{t} + \beta_4\mathbf{n}) = \alpha_4 = -3kk^{(1)}$$

Počítajme teraz  $(\Delta - r_0\mathbf{n}_0)(\alpha_4\mathbf{t} + \beta_4\mathbf{n})'$ :

$$(\Delta - r_0\mathbf{n}_0)(\alpha_4\mathbf{t} + \beta_4\mathbf{n})' = (\Delta - r_0\mathbf{n}_0)(\alpha_4'\mathbf{t} + \alpha_4\mathbf{t}' + \beta_4'\mathbf{n} + \beta_4\mathbf{n}')$$

Pre deriváciu  $\alpha_4$  a  $\beta_4$  platí:

$$\begin{aligned} \alpha_4' &= (-3kk^{(1)})' = -3(k^{(1)})^2 - 3kk^{(2)} \\ \beta_4' &= (-k^3 + k^{(2)})' = -3k^2k^{(1)} + k^{(3)} \end{aligned}$$

Po prenasobení  $\alpha_4'$  vektorom  $\mathbf{t}$  a  $\beta_4'$  vektorom  $\mathbf{n}$  dostávame:

$$\begin{aligned} \alpha_4'\mathbf{t} &= (-3(k^{(1)})^2 - 3kk^{(2)})\mathbf{t} \\ \beta_4'\mathbf{n} &= (-3k^2k^{(1)} + k^{(3)})\mathbf{n} \end{aligned}$$

Použijúc Frenetove vzorce dostávame vzťahy na výpočet  $\alpha_4\mathbf{t}'$  a  $\beta_4\mathbf{n}'$ :

$$\begin{aligned} \alpha_4\mathbf{t}' &= (-3kk^{(1)})\mathbf{t}' = (-3kk^{(1)})k\mathbf{n} = -3k^2k^{(1)}\mathbf{n} \\ \beta_4\mathbf{n}' &= (-k^3 + k^{(2)})\mathbf{n}' = (-k^3 + k^{(2)})(-k\mathbf{t}) = (k^4 - kk^{(2)})\mathbf{t} \end{aligned}$$

Po sčítaní týchto vzťahov dostávame:

$$\begin{aligned} (\alpha_4\mathbf{t} + \beta_4\mathbf{n})' &= (\alpha_4'\mathbf{t} + \alpha_4\mathbf{t}' + \beta_4'\mathbf{n} + \beta_4\mathbf{n}') \\ &= \left(\mathbf{t}\left(k^4 - 4kk^{(2)} - 3(k^{(1)})^2\right) + \mathbf{n}\left(-6k^2k^{(1)} + k^{(3)}\right)\right) \end{aligned}$$

Nech  $a_5(k, k^{(1)}, k^{(2)}) = -4kk^{(2)} - 3(k^{(1)})^2$  a  $b_5(k, k^{(1)}) = -6k^2k^{(1)}$ , potom platí:

$$(\alpha_4 \mathbf{t} + \beta_4 \mathbf{n})' = \mathbf{t} (k^4 + a_5(k, k^{(1)}, k^{(2)})) + \mathbf{n} (k^{(3)} + b_5(k, k^{(1)}))$$

Dosadením týchto výpočtov do  $f^{(5)}$  dostávame:

$$f^{(5)} = 2(-3kk^{(1)} + (\Delta - r_0 \mathbf{n}_0)(\alpha_5 \mathbf{t} + \beta_5 \mathbf{n}) - 2kk^{(1)}),$$

kde  $\alpha_5 = k^4 + a_5(k, k^{(1)}, k^{(2)})$  a  $\beta_5 = k^{(3)} + b_5(k, k^{(1)})$

Ak  $c_5(k, k^{(1)}) = -5kk^{(1)}$ , potom vzťah pre piatu deriváciu funkcie  $f$  má tvar:

$$\begin{aligned} f^{(5)} &= 2((\Delta - r_0 \mathbf{n}_0)(\alpha_5 \mathbf{t} + \beta_5 \mathbf{n}) + c_5(k, k^{(1)})) \\ &= 2((\Delta - r_0 \mathbf{n}_0)(\alpha_5 \mathbf{t} + \beta_5 \mathbf{n}) + \gamma_5), \end{aligned}$$

kde  $\alpha_5 = k^4 + a_5(k, k^{(1)}, k^{(2)})$ ,  $\beta_5 = k^{(3)} + b_5(k, k^{(1)})$  a  $\gamma_5 = c_5(k, k^{(1)})$ . Tým je vzťah pre  $n=5$  dokázaný.

Derivovaním  $f^{(5)}$  ukážeme, že vzťah z vety platí aj pre  $f^{(6)}$ :

$$f^{(6)} = (2((\Delta - r_0 \mathbf{n}_0)(\alpha_5 \mathbf{t} + \beta_5 \mathbf{n}) + \gamma_5))',$$

kde  $\alpha_5 = k^4 + a_5(k, k^{(1)}, k^{(2)})$ ,  $\beta_5 = k^{(3)} + b_5(k, k^{(1)})$  a  $\gamma_5 = c_5(k, k^{(1)})$ .

Derivujme tento vzťah:

$$f^{(6)} = 2((\Delta - r_0 \mathbf{n}_0)'(\alpha_5 \mathbf{t} + \beta_5 \mathbf{n}) + (\Delta - r_0 \mathbf{n}_0)(\alpha_5 \mathbf{t} + \beta_5 \mathbf{n})' + \gamma_5')$$

Počítajme  $(\Delta - r_0 \mathbf{n}_0)'(\alpha_5 \mathbf{t} + \beta_5 \mathbf{n})$ , pričom vieme, že  $(\Delta - r_0 \mathbf{n}_0)' = \mathbf{t}$ :

$$(\Delta - r_0 \mathbf{n}_0)'(\alpha_5 \mathbf{t} + \beta_5 \mathbf{n}) = \mathbf{t}(\alpha_5 \mathbf{t} + \beta_5 \mathbf{n}) = \alpha_5 = k^4 + a_5(k, k^{(1)}, k^{(2)})$$

Počítajme teraz  $(\Delta - r_0 \mathbf{n}_0)(\alpha_5 \mathbf{t} + \beta_5 \mathbf{n})'$ :

$$(\Delta - r_0 \mathbf{n}_0)(\alpha_5 \mathbf{t} + \beta_5 \mathbf{n})' = (\Delta - r_0 \mathbf{n}_0)(\alpha_5' \mathbf{t} + \alpha_5 \mathbf{t}' + \beta_5' \mathbf{n} + \beta_5 \mathbf{n}')$$

Pre deriváciu  $\alpha_5$  a  $\beta_5$  platí:

$$\alpha_5' = (k^4 + a_5(k, k^{(1)}, k^{(2)}))' = 4k^3 k^{(1)} + a_5^*(k, \dots, k^{(3)})$$

Keďže  $4k^3k^{(1)} \in A_3(k)$  a aj  $a_5^*(k, \dots, k^{(3)}) \in A_3(k)$ , tak ich súčtom dostávame opäť opäť funkciu z  $A_3(k)$  a teda podľa vety hovoriacej o pravidlách počítania s funkciami tohto typu máme, že  $4k^3k^{(1)} + a_5^*(k, \dots, k^{(3)}) = a_5^*(k, \dots, k^{(3)})$  a platí teda:

$$\alpha'_5 = a_5^*(k, \dots, k^{(3)})$$

$$\beta'_5 = (k^{(3)} + b_5(k, k^{(1)}))' = k^{(4)} + b_5^*(k, \dots, k^{(2)})$$

Po prenasobení  $\alpha'_5$  vektorom  $\mathbf{t}$  a  $\beta'_5$  vektorom  $\mathbf{n}$  dostávame:

$$\alpha'_5 \mathbf{t} = a_5^*(k, \dots, k^{(3)}) \mathbf{t}$$

$$\beta'_5 \mathbf{n} = (k^{(4)} + b_5^*(k, \dots, k^{(2)})) \mathbf{n}$$

Použijúc Frenetove vzorce dostávame vzťahy na výpočet  $\alpha_5 \mathbf{t}'$  a  $\beta_5 \mathbf{n}'$ :

$$\begin{aligned} \alpha_5 \mathbf{t}' &= (k^4 + a_5(k, k^{(1)}, k^{(2)})) \mathbf{t}' = (k^4 + a_5(k, k^{(1)}, k^{(2)})) k \mathbf{n} \\ &= (k^5 + k a_5(k, k^{(1)}, k^{(2)})) \mathbf{n} = (k^5 + a_5(k, k^{(1)}, k^{(2)})) \mathbf{n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_5 \mathbf{n}' &= (k^{(3)} + b_5(k, k^{(1)})) \mathbf{n}' = (k^{(3)} + b_5(k, k^{(1)})) (-k \mathbf{t}) \\ &= (-k k^{(3)} - k b_5(k, k^{(1)})) \mathbf{t} = (-k k^{(3)} + b_5(k, k^{(1)})) \mathbf{t} \end{aligned}$$

Po sčítaní týchto vzťahov dostávame:

$$(\alpha_5 \mathbf{t} + \beta_5 \mathbf{n})' = (\alpha'_5 \mathbf{t} + \alpha_5 \mathbf{t}' + \beta'_5 \mathbf{n} + \beta_5 \mathbf{n}') = (\alpha_6 \mathbf{t} + \beta_6 \mathbf{n}),$$

kde

$$\alpha_6 = -k k^{(3)} + b_5(k, k^{(1)}) + a_5^*(k, \dots, k^{(3)})$$

$$\beta_6 = k^5 + a_5(k, k^{(1)}, k^{(2)}) + k^{(4)} + b_5^*(k, \dots, k^{(2)})$$

Keďže  $-k k^{(3)} \in A_3(k)$  a  $a_5^*(k, \dots, k^{(3)}) \in A_3(k)$  tak ich súčtom dostávame opäť  $a_5^*(k, \dots, k^{(3)})$  a sčítaním tejto funkcie s  $b_5(k, k^{(1)})$  dostávame podľa pravidiel o počítaní s týmito funkciami funkciu  $a_6(k, \dots, k^{(3)})$ , čiže  $\alpha_6 = a_6(k, \dots, k^{(3)})$ .

Rovnako súčtom  $a_5(k, k^{(1)}, k^{(2)})$  a  $b_5^*(k, \dots, k^{(2)})$  dostávame funkciu

$b_6(k, \dots, k^{(2)})$ , čiže  $\beta_6 = b_6(k, \dots, k^{(2)})$ .

Platí teda:

$$\begin{aligned} (\alpha_5 \mathbf{t} + \beta_5 \mathbf{n})' &= (\alpha_6 \mathbf{t} + \beta_6 \mathbf{n}) \\ &= (\mathbf{t} (a_6(k, \dots, k^{(3)})) + \mathbf{n} (k^5 + k^{(4)} + b_6(k, \dots, k^{(2)}))) \end{aligned}$$

Pre deriváciu  $\gamma_5$  platí:  $(\gamma_5)' = (c_5(k, k^{(1)}))' = c_5^*(k, \dots, k^{(2)})$

Dosadením týchto výpočtov do  $f^{(6)}$  dostávame:

$$f^{(6)} = 2(k^4 + a_5(k, \dots, k^{(2)})) + (\Delta - r_0 \mathbf{n}_0)(\alpha_6 \mathbf{t} + \beta_6 \mathbf{n}) + c_5^*(k, \dots, k^{(2)}),$$

kde  $\alpha_6 = a_6(k, \dots, k^{(3)})$  a  $\beta_6 = k^5 + k^{(4)} + b_6(k, \dots, k^{(2)})$

Sčítaním  $a_5(k, \dots, k^{(2)})$  a  $c_5^*(k, \dots, k^{(2)})$  dostávame funkciu  $c_6(k, \dots, k^{(2)})$  a teda vzťah pre šiestu deriváciu funkcie  $f$  má tvar:

$$\begin{aligned} f^{(6)} &= 2((\Delta - r_0 \mathbf{n}_0)(\alpha_6 \mathbf{t} + \beta_6 \mathbf{n}) + k^4 + c_6(k, \dots, k^{(2)})) \\ &= 2((\Delta - r_0 \mathbf{n}_0)(\alpha_6 \mathbf{t} + \beta_6 \mathbf{n}) + \gamma_6), \end{aligned}$$

kde  $\alpha_6 = a_6(k, \dots, k^{(3)})$ ,  $\beta_6 = k^5 + k^{(4)} + b_6(k, \dots, k^{(2)})$  a  $\gamma_6 = k^4 + c_6(k, \dots, k^{(2)})$ .

Tým je vzťah pre  $n = 6$  dokázaný. Prvý krok indukcie platí.

2. Nech teraz platí vzťah pre výpočet derivácie  $n$ -tého stupňa, ak je  $n$  je nepárne.

Derivujme tento vzťah:

$$f^{(n+1)} = (2((\Delta - r_0 \mathbf{n}_0)(\alpha_n \mathbf{t} + \beta_n \mathbf{n}) + \gamma_n))',$$

kde

$$\begin{aligned} \alpha_n &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} k^{n-1} + a_n(k, \dots, k^{(n-3)}), \\ \beta_n &= k^{(n-2)} + b_n(k, \dots, k^{(n-4)}), \\ \gamma_n &= c_n(k, \dots, k^{(n-4)}) \end{aligned}$$

Potom

$$f^{(n+1)} = 2((\Delta - r_0 \mathbf{n}_0)'(\alpha_n \mathbf{t} + \beta_n \mathbf{n}) + (\Delta - r_0 \mathbf{n}_0)(\alpha_n \mathbf{t} + \beta_n \mathbf{n})' + \gamma_n')$$

Keďže  $(\Delta - r_0 \mathbf{n}_0)' = \mathbf{t}$ , tak platí:

$$\begin{aligned} (\Delta - r_0 \mathbf{n}_0)' (\alpha_n \mathbf{t} + \beta_n \mathbf{n}) &= \mathbf{t} (\alpha_n \mathbf{t} + \beta_n \mathbf{n}) = \alpha_n \\ &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} k^{n-1} + a_n(k, \dots, k^{(n-3)}) \end{aligned}$$

Počítajme  $(\alpha_n \mathbf{t} + \beta_n \mathbf{n})'$ :

$$(\alpha_n \mathbf{t} + \beta_n \mathbf{n})' = (\alpha'_n \mathbf{t} + \alpha_n \mathbf{t}' + \beta'_n \mathbf{n} + \beta_n \mathbf{n}')$$

Pre deriváciu  $\alpha_n$  a  $\beta_n$  platí:

$$\begin{aligned} \alpha'_n &= \left( (-1)^{\frac{n-1}{2}} k^{n-1} + a_n(k, \dots, k^{(n-3)}) \right)' \\ &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} (n-1) k^{n-2} k^{(1)} + a_n^*(k, \dots, k^{(n-2)}) \end{aligned}$$

Keďže  $(-1)^{\frac{n-1}{2}} (n-1) k^{n-2} k^{(1)}$  aj  $a_n^*(k, \dots, k^{(n-2)})$  sú z množiny  $A_{n-2}(k)$  a vieme ich sčítať, tak dostávame:

$$\begin{aligned} \alpha'_n &= a_n^*(k, \dots, k^{(n-2)}) \\ \beta'_n &= (k^{(n-2)} + b_n(k, \dots, k^{(n-4)}))' = k^{(n-1)} + b_n^*(k, \dots, k^{(n-3)}) \end{aligned}$$

Ak prenásobíme  $\alpha'_n$  vektorom  $\mathbf{t}$  a  $\beta'_n$  vektorom  $\mathbf{n}$ , dostávame vzťahy:

$$\begin{aligned} \alpha'_n \mathbf{t} &= a_n^*(k, \dots, k^{(n-2)}) \mathbf{t} \\ \beta'_n \mathbf{n} &= (k^{(n-1)} + b_n^*(k, \dots, k^{(n-3)})) \mathbf{n} \end{aligned}$$

Po použití Frenetových vzorcov a vety 2.4.1. dostávame vzťahy pre výpočet  $\alpha_n \mathbf{t}'$  a  $\beta_n \mathbf{n}'$ :

$$\begin{aligned} \alpha_n \mathbf{t}' &= \left( (-1)^{\frac{n-1}{2}} k^{n-1} + a_n(k, \dots, k^{(n-3)}) \right) \mathbf{t}' \\ &= \left( (-1)^{\frac{n-1}{2}} k^{n-1} + a_n(k, \dots, k^{(n-3)}) \right) k \mathbf{n} \\ &= \left( (-1)^{\frac{n-1}{2}} k^n + k a_n(k, \dots, k^{(n-3)}) \right) \mathbf{n} \\ &= \left( (-1)^{\frac{n-1}{2}} k^n + a_n(k, \dots, k^{(n-3)}) \right) \mathbf{n} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \beta_n \mathbf{n}' &= (k^{(n-2)} + b_n(k, \dots, k^{(n-4)})) \mathbf{n}' \\
 &= (k^{(n-2)} + b_n(k, \dots, k^{(n-4)})) (-k\mathbf{t}) \\
 &= (-kk^{(n-2)} - kb_n(k, \dots, k^{(n-4)})) \mathbf{t} \\
 &= (-kk^{(n-2)} + b_n(k, \dots, k^{(n-4)})) \mathbf{t}
 \end{aligned}$$

Sčítaním týchto vzťahov dostávame:

$$(\alpha_n \mathbf{t} + \beta_n \mathbf{n})' = (\alpha_n' \mathbf{t} + \alpha_n \mathbf{t}' + \beta_n' \mathbf{n} + \beta_n \mathbf{n}') = \alpha_{n+1} \mathbf{t} + \beta_{n+1} \mathbf{n},$$

kde

$$\begin{aligned}
 \alpha_{n+1} &= a_n^*(k, \dots, k^{(n-2)}) - kk^{(n-2)} + b_n(k, \dots, k^{(n-4)}), \\
 \beta_{n+1} &= k^{(n-1)} + b_n^*(k, \dots, k^{(n-3)}) + (-1)^{\frac{n-1}{2}} k^n + a_n(k, \dots, k^{(n-3)})
 \end{aligned}$$

Keďže  $-kk^{(n-2)}$  a  $a_n^*(k, \dots, k^{(n-2)})$  sú funkcie z množiny  $A_{n-2}(k)$ , tak ich súčtom dostávame opäť  $a_n^*(k, \dots, k^{(n-2)})$  a súčtom tejto funkcie s  $b_n(k, \dots, k^{(n-4)})$  je podľa vety 2.4.1. funkcia  $a_{n+1}(k, \dots, k^{(n-2)})$ , preto  $\alpha_{n+1} = a_{n+1}(k, \dots, k^{(n-2)})$ .

Rovnako súčtom  $b_n^*(k, \dots, k^{(n-3)})$  a  $a_n(k, \dots, k^{(n-3)})$  je funkcia  $b_{n+1}(k, \dots, k^{(n-3)})$ , preto  $\beta_{n+1} = k^{(n-1)} + (-1)^{\frac{n-1}{2}} k^n + b_{n+1}(k, \dots, k^{(n-3)})$ .

Derivovaním  $\gamma_n = c_n(k, \dots, k^{(n-4)})$  dostávame  $\gamma_n' = c_n^*(k, \dots, k^{(n-3)})$ .

Dosadením týchto výpočtov do vyjadrenia  $f^{(n+1)}$  dostávame:

$$f^{(n+1)} = 2((\Delta - r_0 \mathbf{n}_0)(\alpha_{n+1} \mathbf{t} + \beta_{n+1} \mathbf{n}) + \gamma_{n+1}),$$

kde

$$\begin{aligned}
 \alpha_{n+1} &= a_{n+1}(k, \dots, k^{(n-2)}) \\
 \beta_{n+1} &= k^{(n-1)} + (-1)^{\frac{n-1}{2}} k^n + b_{n+1}(k, \dots, k^{(n-3)}) \\
 \gamma_{n+1} &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} k^{n-1} + a_n(k, \dots, k^{(n-3)}) + c_n^*(k, \dots, k^{(n-3)})
 \end{aligned}$$

Súčtom  $a_n(k, \dots, k^{(n-3)})$  a  $c_n^*(k, \dots, k^{(n-3)})$  je  $c_{n+1}(k, \dots, k^{(n-3)})$  a teda platí:

$$f^{(n+1)} = 2((\Delta - r_0 \mathbf{n}_0)(\alpha_{n+1} \mathbf{t} + \beta_{n+1} \mathbf{n}) + \gamma_{n+1}),$$

kde

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1} &= a_{n+1}(k, \dots, k^{(n-2)}) \\ \beta_{n+1} &= k^{(n-1)} + (-1)^{\frac{n-1}{2}} k^n + b_{n+1}(k, \dots, k^{(n-3)}) \\ \gamma_{n+1} &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} k^{n-1} + c_{n+1}(k, \dots, k^{(n-3)})\end{aligned}$$

Posunutím indexu  $n + 1$  na  $n$  v ráde derivácie dostaneme:

$$f^{(n)} = 2((\Delta - r_0 \mathbf{n}_0)(\alpha_n \mathbf{t} + \beta_n \mathbf{n}) + \gamma_n),$$

kde

$$\begin{aligned}\alpha_n &= a_n(k, \dots, k^{(n-3)}) \\ \beta_n &= k^{(n-2)} + (-1)^{\frac{n}{2}-1} k^{n-1} + b_n(k, \dots, k^{(n-4)}) \\ \gamma_n &= (-1)^{\frac{n}{2}-1} k^{n-2} + c_n(k, \dots, k^{(n-4)}), \text{ } n \text{ je párne}\end{aligned}$$

Ukázali sme teda, že deriváciou vyjadrenia nepárneho rádu derivácie naozaj dostaneme vyjadrenie párneho rádu derivácie.

3. Nech teraz platí vzťah pre výpočet derivácie  $n$ -tého stupňa, ak je  $n$  je párne.

Derivujme tento vzťah:

$$f^{(n+1)} = (2((\Delta - r_0 \mathbf{n}_0)(\alpha_n \mathbf{t} + \beta_n \mathbf{n}) + \gamma_n))',$$

kde  $\alpha_n = a_n(k, \dots, k^{(n-3)})$ ,  $\beta_n = k^{(n-2)} + (-1)^{\frac{n}{2}-1} k^{n-1} + b_n(k, \dots, k^{(n-4)})$   
a  $\gamma_n = (-1)^{\frac{n}{2}-1} k^{n-2} + c_n(k, \dots, k^{(n-4)})$ .

Potom

$$f^{(n+1)} = 2((\Delta - r_0 \mathbf{n}_0)'(\alpha_n \mathbf{t} + \beta_n \mathbf{n}) + (\Delta - r_0 \mathbf{n}_0)(\alpha_n \mathbf{t} + \beta_n \mathbf{n})' + \gamma_n')$$

Keďže  $(\Delta - r_0 \mathbf{n}_0)' = \mathbf{t}$ , tak platí:

$$(\Delta - r_0 \mathbf{n}_0)'(\alpha_n \mathbf{t} + \beta_n \mathbf{n}) = \mathbf{t}(\alpha_n \mathbf{t} + \beta_n \mathbf{n}) = \alpha_n = a_n(k, \dots, k^{(n-3)})$$

Počítajme  $(\alpha_n \mathbf{t} + \beta_n \mathbf{n})'$ :

$$(\alpha_n \mathbf{t} + \beta_n \mathbf{n})' = (\alpha_n' \mathbf{t} + \alpha_n \mathbf{t}' + \beta_n' \mathbf{n} + \beta_n \mathbf{n}')$$

Pre deriváciu  $\alpha_n$  a  $\beta_n$  platí:

$$\alpha'_n = (a_n(k, \dots, k^{(n-3)}))' = a_n^*(k, \dots, k^{(n-2)})$$

$$\begin{aligned} \beta'_n &= \left( k^{(n-2)} + (-1)^{\frac{n}{2}-1} k^{n-1} + b_n(k, \dots, k^{(n-4)}) \right)' \\ &= k^{(n-1)} + (-1)^{\frac{n}{2}-1} (n-1) k^{n-2} k^{(1)} + b_n^*(k, \dots, k^{(n-3)}) \end{aligned}$$

Podľa vety 2.4.1 je súčtom funkcií  $(-1)^{\frac{n}{2}-1} (n-1) k^{n-2} k^{(1)}$  a  $b_n^*(k, \dots, k^{(n-3)})$  opäť funkcia  $b_n^*(k, \dots, k^{(n-3)})$ , preto platí:

$$\beta'_n = k^{(n-1)} + b_n^*(k, \dots, k^{(n-3)})$$

Ak prenásobíme  $\alpha'_n$  vektorom  $\mathbf{t}$  a  $\beta'_n$  vektorom  $\mathbf{n}$ , dostávame vzťahy:

$$\begin{aligned} \alpha'_n \mathbf{t} &= a_n^*(k, \dots, k^{(n-2)}) \mathbf{t} \\ \beta'_n \mathbf{n} &= (k^{(n-1)} + b_n^*(k, \dots, k^{(n-3)})) \mathbf{n} \end{aligned}$$

Po použití Frenetových vzorcov dostávame vzťahy pre výpočet  $\alpha_n \mathbf{t}'$  a  $\beta_n \mathbf{n}'$ :

$$\begin{aligned} \alpha_n \mathbf{t}' &= (a_n(k, \dots, k^{(n-3)})) \mathbf{t}' \\ &= (a_n(k, \dots, k^{(n-3)})) k \mathbf{n} \\ &= (k a_n(k, \dots, k^{(n-3)})) \mathbf{n} \\ &= (a_n(k, \dots, k^{(n-3)})) \mathbf{n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_n \mathbf{n}' &= \left( k^{(n-2)} + (-1)^{\frac{n}{2}-1} k^{n-1} + b_n(k, \dots, k^{(n-4)}) \right) \mathbf{n}' \\ &= \left( k^{(n-2)} + (-1)^{\frac{n}{2}-1} k^{n-1} + b_n(k, \dots, k^{(n-4)}) \right) (-k \mathbf{t}) \\ &= \left( -k k^{(n-2)} + (-1)^{\frac{n}{2}} k^n - k b_n(k, \dots, k^{(n-4)}) \right) \mathbf{t} \\ &= \left( -k k^{(n-2)} + (-1)^{\frac{n}{2}} k^n + b_n(k, \dots, k^{(n-4)}) \right) \mathbf{t} \end{aligned}$$

Sčítaním týchto vzťahov dostávame:

$$(\alpha_n \mathbf{t} + \beta_n \mathbf{n})' = (\alpha'_n \mathbf{t} + \alpha_n \mathbf{t}' + \beta'_n \mathbf{n} + \beta_n \mathbf{n}') = \alpha_{n+1} \mathbf{t} + \beta_{n+1} \mathbf{n},$$

kde

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1} &= a_n^*(k, \dots, k^{(n-2)}) - k k^{(n-2)} + (-1)^{\frac{n}{2}} k^n + b_n(k, \dots, k^{(n-4)}), \\ \beta_{n+1} &= k^{(n-1)} + b_n^*(k, \dots, k^{(n-3)}) + a_n(k, \dots, k^{(n-3)}) \\ \gamma_{n+1} &= (\gamma_n)' = \left( (-1)^{\frac{n}{2}-1} k^{n-2} + c_n(k, \dots, k^{(n-4)}) \right)'\end{aligned}$$

Derivovaním  $\gamma_n = (-1)^{\frac{n}{2}-1} k^{n-2} + c_n(k, \dots, k^{(n-4)})$  dostávame:

$$\gamma_n' = (-1)^{\frac{n}{2}-1} (n-2) k^{n-3} k^{(1)} + c_n^*(k, \dots, k^{(n-3)})$$

a keďže  $(-1)^{\frac{n}{2}-1} (n-2) k^{n-3} k^{(1)}$  aj  $c_n^*(k, \dots, k^{(n-3)})$  sú z  $A_{n-3}(k)$ , tak  $\gamma_n' = c_n^*(k, \dots, k^{(n-3)})$ .

Dosadením týchto výpočtov do vyjadrenia  $f^{(n+1)}$  dostávame:

$$f^{(n+1)} = 2((\Delta - r_0 \mathbf{n}_0)(\alpha_{n+1} \mathbf{t} + \beta_{n+1} \mathbf{n}) + \gamma_{n+1}),$$

kde

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1} &= a_n^*(k, \dots, k^{(n-2)}) - k k^{(n-2)} + (-1)^{\frac{n}{2}} k^n + b_n(k, \dots, k^{(n-4)}) \\ \beta_{n+1} &= k^{(n-1)} + b_n^*(k, \dots, k^{(n-3)}) + a_n(k, \dots, k^{(n-3)}) \\ \gamma_{n+1} &= c_n^*(k, \dots, k^{(n-3)}) + a_n(k, \dots, k^{(n-3)})\end{aligned}$$

Keďže  $-k k^{(n-2)}$  a  $a_n^*(k, \dots, k^{(n-2)})$  patria množine  $A_{n-2}(k)$ , tak ich súčtom podľa vety 2.4.1 dostávame opäť funkciu  $a_n^*(k, \dots, k^{(n-2)})$ , po jej sčítaní s  $b_n(k, \dots, k^{(n-4)})$  dostaneme podľa rovnakej vety opäť funkciu  $a_n^*(k, \dots, k^{(n-2)})$  a teda  $\alpha_{n+1} = (-1)^{\frac{n}{2}} k^n + a_n^*(k, \dots, k^{(n-2)})$ .

Rovnako sčítaním  $b_n^*(k, \dots, k^{(n-3)})$  a  $a_n(k, \dots, k^{(n-3)})$  dostávame  $b_n^*(k, \dots, k^{(n-3)})$  a teda  $\beta_{n+1} = k^{(n-1)} + b_n^*(k, \dots, k^{(n-3)})$ .

Súčtom  $a_n(k, \dots, k^{(n-3)})$  a  $c_n^*(k, \dots, k^{(n-3)})$  je  $c_{n+1}(k, \dots, k^{(n-3)})$  a teda  $\gamma_{n+1} = c_{n+1}(k, \dots, k^{(n-3)})$ .

Pre  $f^{(n+1)}$  teda platí:

$$f^{(n+1)} = 2((\Delta - r_0 \mathbf{n}_0)(\alpha_{n+1} \mathbf{t} + \beta_{n+1} \mathbf{n}) + \gamma_{n+1}),$$

kde

$$\alpha_{n+1} = (-1)^{\frac{n}{2}} k^n + a_n^*(k, \dots, k^{(n-2)}),$$

$$\beta_{n+1} = k^{(n-1)} + b_n^*(k, \dots, k^{(n-3)}),$$

$$\gamma_{n+1} = c_{n+1}(k, \dots, k^{(n-3)}).$$

Posunutím indexu  $n + 1$  na  $n$  v ráde derivácie dostaneme:

$$f^{(n)} = 2((\Delta - r_0 \mathbf{n}_0)(\alpha_n \mathbf{t} + \beta_n \mathbf{n}) + \gamma_n),$$

kde

$$\alpha_n = (-1)^{\frac{n-1}{2}} k^{n-1} + a_n(k, \dots, k^{(n-3)}),$$

$$\beta_n = k^{(n-2)} + b_n(k, \dots, k^{(n-4)}),$$

$$\gamma_n = c_n(k, \dots, k^{(n-4)}), \quad n \text{ je nepárne.}$$

Ukázali sme teda, že deriváciou vyjadrenia párneho rádu derivácie naozaj dostaneme vyjadrenie nepárneho rádu derivácie. Tým je veta dokázaná. □

Poznámka: Ako uvidíme neskôr, funkcie  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $c_n$  výrazne zjednodušia prácu s deriváciami funkcie  $f$  v parametri  $s_0$ .

Na základe uvedených definícií a viet teraz vyslovíme vetu, ktorá hovorí o vzájomnej polohe oskulačnej kružnice a krivky vo vrchole vyššieho rádu:

**Veta 2.4.3** (Oskulačná kružnica krivky vo vrchole vyššieho rádu):

*Nech je daná krivka vyjadrená prirodzenou parametrizáciou  $P(s)$ ,  $s \in I$  a nech  $P(s_0)$  je vrcholom  $k$ -teho rádu tejto krivky. Potom:*

1. ak  $k$  je nepárne, krivosť krivky má v tomto bode ostrý lokálny extrém a rovinná krivka ostáva v blízkosti vrchola na jednej strane oskulačnej kružnice. V prípade lokálneho minima krivosti krivka leží lokálne vnútri oskulačnej kružnice, pri lokálnom maxime krivosti zvonka oskulačnej kružnice.
2. ak  $k$  je párne, krivosť krivky je ostro monotónna a krivka prechádza z jednej strany oskulačnej kružnice na druhú. Dovnútra oskulačnej kružnice vchádza v smere rastúcej krivosti.

*Dôkaz.* Nech bod  $P(s_0)$  danej krivky je bod  $k$ -teho rádu. Pre krivosť krivky v tomto bode platí:  $k(s_0) \neq 0, k^{(1)}(s_0) = 0, \dots, k^{(k)}(s_0) = 0$  a  $k^{(k+1)}(s_0) \neq 0$ .

Ak  $k$  je nepárne, tak  $k + 1$  je párne. Podľa vety o priebehu funkcie uvedenej v predchádzajúcej kapitole platí, že krivosť má v  $s_0$  ostrý lokálny extrém.

Ak  $k$  je párne, tak  $k + 1$  je nepárne. Podľa vety o priebehu funkcie uvedenej v predchádzajúcej kapitole platí, že krivosť je v  $s_0$  ostro monotónna.

Tým je prvá časť vety dokázaná.

Ukážeme, že rovnosti  $k^{(1)}(s_0) = 0, \dots, k^{(k)}(s_0) = 0$  a nerovnosť  $k^{(k+1)}(s_0) \neq 0$  dávajú pre funkciu  $f(s) = |P(s)S(s_0)|^2$  a jej derivácie v  $s_0$  nasledovné vzťahy:

$$f^{(1)}(s_0) = \dots = f^{(k+2)}(s_0) = 0 \text{ a } f^{(k+3)}(s_0) \neq 0$$

Pre  $n$ -tú deriváciu funkcie  $f$  v prípade, že  $n$  je nepárne platí:

$$f^{(n)} = 2((\Delta - r_0 \mathbf{n}_0)(\alpha_n \mathbf{t} + \beta_n \mathbf{n}) + \gamma_n),$$

kde

$$\begin{aligned} \alpha_n &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} k^{n-1} + a_n(k, \dots, k^{(n-3)}), \\ \beta_n &= k^{(n-2)} + b_n(k, \dots, k^{(n-4)}), \\ \gamma_n &= c_n(k, \dots, k^{(n-4)}) \end{aligned}$$

Dosadením čísla  $s_0$  do tejto derivácie dostávame:

$$f^{(n)}(s_0) = 2((\Delta_0 - r_0 \mathbf{n}_0)((\alpha_n(s_0) \mathbf{t}_0 + \beta_n(s_0) \mathbf{n}_0) + \gamma_n(s_0)))$$

Keďže  $\Delta(s) = P(s) - P(s_0)$ , po dosadení  $s_0$  sa tento člen vynuluje. Tiež platí, že  $\mathbf{n}_0 \mathbf{t}_0 = 0$  a  $\mathbf{t}_0 \mathbf{t}_0 = 1$ , čím dostávame:

$$\begin{aligned} f^{(n)}(s_0) &= 2(-r_0 \beta_n(s_0) + \gamma_n(s_0)) \\ &= 2\left(-r_0 \left(k_0^{(n-2)} + b_n(k_0, \dots, k_0^{(n-4)})\right) + c_n(k_0, \dots, k_0^{(n-4)})\right) \end{aligned}$$

Najvyšší rád derivácie, ktorý sa v tejto rovnosti objavuje, je  $(n-2)$ , preto ak  $k_0^{(1)} = \dots = k_0^{(n-2)} = 0$ , tak  $c_n(k_0, \dots, k_0^{(n-4)}) = 0$ ,  $b_n(k_0, \dots, k_0^{(n-4)}) = 0$  a aj  $k_0^{(n-2)} = 0$ , teda  $f^{(n)}(s_0) = 0$  pre  $n$  nepárne.

V prípade, že  $P(s_0)$  je vrchol  $k$ -teho rádu, tak  $k^{(1)}(s_0) = 0, \dots, k^{(k)}(s_0) = 0$ , a teda aj  $f^{(k+2)}(s_0) = 0$  pre  $k$  nepárne.

Pre  $n$ -tú deriváciu funkcie  $f$  v prípade, že  $n$  je párne platí:

$$f^{(n)} = 2((\Delta - r_0 \mathbf{n}_0)(\alpha_n \mathbf{t} + \beta_n \mathbf{n}) + \gamma_n),$$

kde

$$\begin{aligned} \alpha_n &= a_n(k, \dots, k^{(n-3)}) \\ \beta_n &= k^{(n-2)} + (-1)^{\frac{n}{2}-1} k^{n-1} + b_n(k, \dots, k^{(n-4)}) \\ \gamma_n &= (-1)^{\frac{n}{2}-1} k^{n-2} + c_n(k, \dots, k^{(n-4)}) \end{aligned}$$

Dosadením čísla  $s_0$  do tejto derivácie dostávame:

$$f^{(n)}(s_0) = 2((\Delta_0 - r_0 \mathbf{n}_0)((\alpha_n(s_0) \mathbf{t}_0 + \beta_n(s_0) \mathbf{n}_0) + \gamma_n(s_0)))$$

Opäť využijúc, že  $\Delta_0 = 0$ ,  $\mathbf{n}_0 \mathbf{t}_0 = 0$  a  $\mathbf{t}_0 \mathbf{t}_0 = 1$ , dostávame:

$$f^{(n)}(s_0) = 2(-r_0 \beta_n(s_0) + \gamma_n(s_0)),$$

kde

$$\begin{aligned} \beta_n(s_0) &= (-1)^{\frac{n}{2}-1} k_0^{n-1} + k_0^{(n-2)} + b_n(k_0, \dots, k_0^{(n-4)}) \\ \gamma_n(s_0) &= (-1)^{\frac{n}{2}-1} k_0^{n-2} + c_n(k_0, \dots, k_0^{(n-4)}) \end{aligned}$$

Najvyšší rád derivácie, ktorý sa v tejto rovnosti objavuje, je  $(n - 2)$ , preto ak  $k_0^{(1)} = \dots = k_0^{(n-2)} = 0$ , tak  $c_n(k_0, \dots, k_0^{(n-4)}) = 0$ ,  $b_n(k_0, \dots, k_0^{(n-4)}) = 0$  a aj  $k_0^{(n-2)} = 0$ , z toho  $f^{(n)}(s_0) = 2 \left( (-1)^{\frac{n}{2}-1} k_0^{n-2} - r_0 \left( (-1)^{\frac{n}{2}-1} k_0^{n-1} \right) \right)$ .

$r_0$  vieme pomocou krivosti krivky vyjadriť ako  $\frac{1}{k_0}$ , zo súčinu  $r_0 k_0^{n-1}$  dostávame tak  $k_0^{n-2}$ . Tým v tomto vzťahu máme dva rovnaké členy s opačnými znamienkami, ktoré sa po sčítaní vynulujú a teda  $f^{(n)}(s_0) = 0$  pre  $n$  párne.

V prípade, že  $P(s_0)$  je vrchol  $k$ -teho rádu, tak  $k^{(1)}(s_0) = 0, \dots, k^{(k)}(s_0) = 0$ , a teda aj  $f^{(k+2)}(s_0) = 0$  pre  $k$  párne.

Ukázali sme teda, že nezávisle od toho, či je rád vrcholu  $k$  párny alebo nepárny, všetky derivácie funkcie  $f$  až po rád  $k + 2$  sa vynulujú. Teraz chceme zistiť, ako bude vyzerat'  $f^{(k+3)}(s_0)$ . Tu môžu nastať 2 prípady:

1. ak  $k$  je nepárne, tak  $(k + 3)$  je párne
2. ak  $k$  je párne, tak  $(k + 3)$  je nepárne

Oba tieto prípady musíme riešiť zvlášť:

1. ak  $k$  je nepárne, tak  $(k + 3)$  je párne a platí:

$$f^{(k+3)}(s_0) = 2 \left( (\Delta_0 - r_0 \mathbf{n}_0) \left( (\alpha_{k+3}(s_0) \mathbf{t}_0 + \beta_{k+3}(s_0) \mathbf{n}_0) + \gamma_{k+3}(s_0) \right) \right),$$

kde

$$\begin{aligned} \alpha_{k+3}(s_0) &= a_{k+3} \left( k_0, \dots, k_0^{(k)} \right), \\ \beta_{k+3}(s_0) &= (-1)^{\frac{k+3}{2}-1} k_0^{k+2} + k_0^{(k+1)} + b_{k+3} \left( k_0, \dots, k_0^{(k-1)} \right), \\ \gamma_{k+3}(s_0) &= (-1)^{\frac{k+3}{2}-1} k_0^{k+1} + c_{k+3} \left( k_0, \dots, k_0^{(k-1)} \right) \end{aligned}$$

Využijúc, že  $\Delta_0 = 0$ ,  $\mathbf{n}_0 \mathbf{t}_0 = 0$ ,  $\mathbf{t}_0 \mathbf{t}_0 = 1$ ,  $k^{(1)}(s_0) = 0, \dots, k^{(k)}(s_0) = 0$  a tým



aj  $c_{k+3}(k_0, \dots, k_0^{(k-1)}) = 0$  a  $b_{k+3}(k_0, \dots, k_0^{(k-1)}) = 0$  dostávame:

$$\begin{aligned} f^{(k+3)}(s_0) &= 2 \left( (-1)^{\frac{k+3}{2}-1} k_0^{k+1} - r_0 \left( (-1)^{\frac{k+3}{2}-1} k_0^{k+2} + k_0^{(k+1)} \right) \right) \\ &= 2 \left( \left( (-1)^{\frac{k+3}{2}-1} k_0^{k+1} - (-1)^{\frac{k+3}{2}-1} k_0^{k+1} \right) - r_0 k_0^{(k+1)} \right) \\ &= -2r_0 k_0^{(k+1)} \neq 0, \end{aligned}$$

lebo  $k_0^{(k+1)} \neq 0$ .

Vieme, že polomer oskulačnej kružnice  $r_0$  je kladný, preto  $f^{(k+3)}(s_0)$  má opačné znamienko ako  $k_0^{(k+1)}$ .

Ak  $k_0^{(k+1)} > 0$ , tak  $f^{(k+3)}(s_0) < 0$ . Podľa vety o priebehu funkcie má  $f(s)$  v  $s_0$  ostré lokálne maximum a krivosť krivky má v bode  $P(s_0)$  ostré lokálne minimum. To znamená, že vzdialenosť bodov  $P(s)$  od stredu oskulačnej kružnice  $S(s_0)$  v bode  $P(s_0)$  má ostré lokálne maximum, preto v blízkosti  $s_0$  ležia body  $P(s)$  krivky vnútri tejto kružnice. Krivka leží teda lokálne v okolí bodu  $s_0$  vnútri oskulačnej kružnice v bode  $P(s_0)$ .

Ak  $k_0^{(k+1)} < 0$ , tak  $f^{(k+3)}(s_0) > 0$ . Podľa vety o priebehu funkcie má  $f(s)$  v  $s_0$  ostré lokálne minimum a krivosť krivky má v bode  $P(s_0)$  ostré lokálne maximum. To znamená, že vzdialenosť bodov  $P(s)$  od stredu oskulačnej kružnice  $S(s_0)$  v bode  $P(s_0)$  má ostré lokálne minimum, preto v blízkosti  $s_0$  ležia body  $P(s)$  krivky zvonka tejto kružnice. Krivka leží teda lokálne v okolí bodu  $s_0$  zvonka oskulačnej kružnice v bode  $P(s_0)$ .

2. ak  $k$  je párne, tak  $(k+3)$  je nepárne a platí:

$$f^{(k+3)}(s_0) = 2 \left( (\Delta_0 - r_0 \mathbf{n}_0) \left( (\alpha_{k+3}(s_0) \mathbf{t}_0 + \beta_{k+3}(s_0) \mathbf{n}_0) + \gamma_{k+3}(s_0) \right) \right),$$

kde

$$\begin{aligned} \alpha_{k+3}(s_0) &= (-1)^{\frac{k+2}{2}} k_0^{k+2} + a_{k+3}(k_0, \dots, k_0^{(k)}), \\ \beta_{k+3}(s_0) &= k_0^{(k+1)} + b_{k+3}(k_0, \dots, k_0^{(k-1)}), \\ \gamma_{k+3}(s_0) &= c_{k+3}(k_0, \dots, k_0^{(k-1)}) \end{aligned}$$

Využívajúc, že  $\Delta_0 = 0$ ,  $\mathbf{n}_0 \mathbf{t}_0 = 0$ ,  $\mathbf{t}_0 \mathbf{t}_0 = 1$ ,  $k^{(1)}(s_0) = 0, \dots, k^{(k)}(s_0) = 0$  a tým aj

$c_{k+3}(k_0, \dots, k_0^{(k-1)}) = 0$  a  $b_{k+3}(k_0, \dots, k_0^{(k-1)}) = 0$  dostávame:

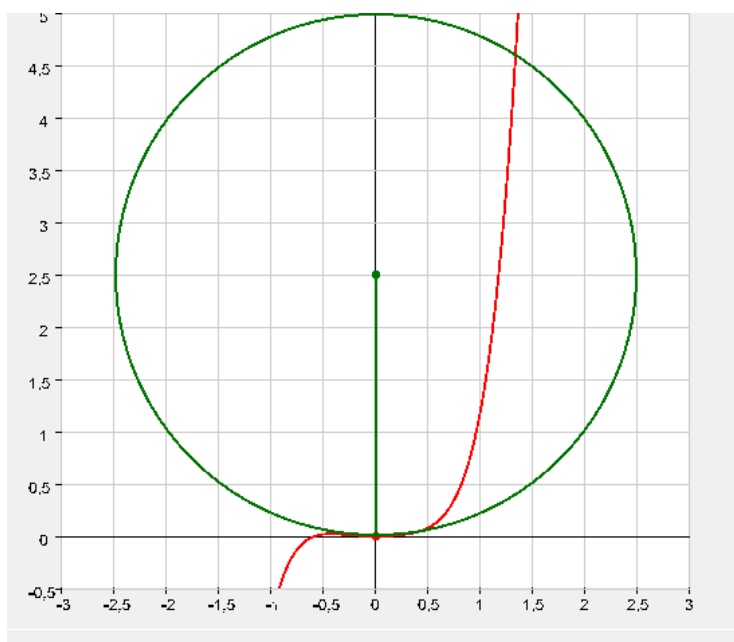
$$f^{(k+3)}(s_0) = 2(-r_0 k_0^{(k+1)}) = -2r_0 k_0^{(k+1)} \neq 0, \text{ lebo } k_0^{(k+1)} \neq 0$$

Vieme, že polomer oskulačnej kružnice  $r_0$  je kladný, preto  $f^{(k+3)}(s_0)$  má opačné znamienko ako  $k_0^{(k+1)}$ .

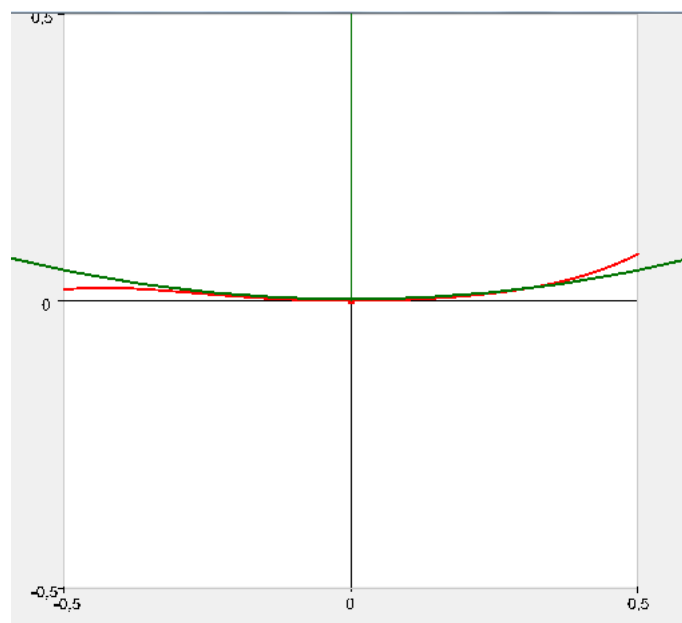
Ak  $k_0^{(k+1)} > 0$ , tak  $f^{(k+3)}(s_0) < 0$ . Podľa vety o priebehu funkcie  $f(s)$  v  $s_0$  s rastúcim  $s$  lokálne klesá a krivosť krivky v bode  $P(s_0)$  s rastúcim  $s$  rastie. To znamená, že pre  $s$  blízke  $s_0$  a väčšie ako  $s_0$  vzdialenosť bodov  $P(s)$  od stredu oskulačnej kružnice  $S(s_0)$  v bode  $P(s_0)$  klesá, preto pre také čísla  $s$  ležia body krivky vnútri kružnice. Z rovnakého dôvodu ležia body  $P(s)$  pre  $s$  blízke k  $s_0$  a menšie ako  $s_0$  zvonka oskulačnej kružnice v bode  $P(s_0)$ .

Ak  $k_0^{(k+1)} < 0$ , tak  $f^{(k+3)}(s_0) > 0$ . Podľa vety o priebehu funkcie  $f(s)$  v  $s_0$  s rastúcim  $s$  lokálne rastie a krivosť krivky v bode  $P(s_0)$  s rastúcim  $s$  rklešá. To znamená, že pre  $s$  blízke  $s_0$  a väčšie ako  $s_0$  vzdialenosť bodov  $P(s)$  od stredu oskulačnej kružnice  $S(s_0)$  v bode  $P(s_0)$  rastie, preto pre také čísla  $s$  ležia body krivky zvonka kružnice. Z rovnakého dôvodu ležia body  $P(s)$  pre  $s$  blízke k  $s_0$  a menšie ako  $s_0$  vnútri oskulačnej kružnice v bode  $P(s_0)$ . □

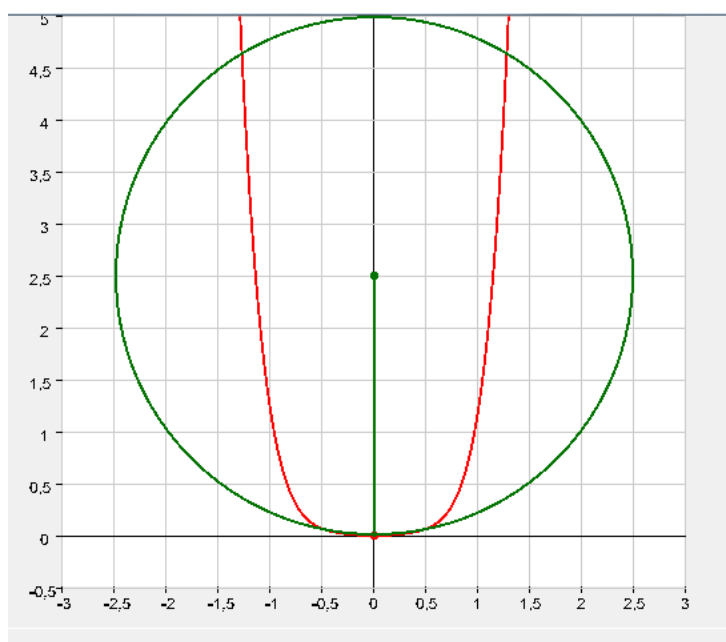
Predchádzajúca veta hovorí o tom, aká je vzájomná poloha krivky oskulačnej kružnice vo vrchole vyššieho rádu. Teraz už máme predstavu, aký je vzťah oskulačnej kružnice a krivky nielen vo všeobecnom bode a obyčajnom vrchole, ale aj vo vrchole vyššieho rádu.



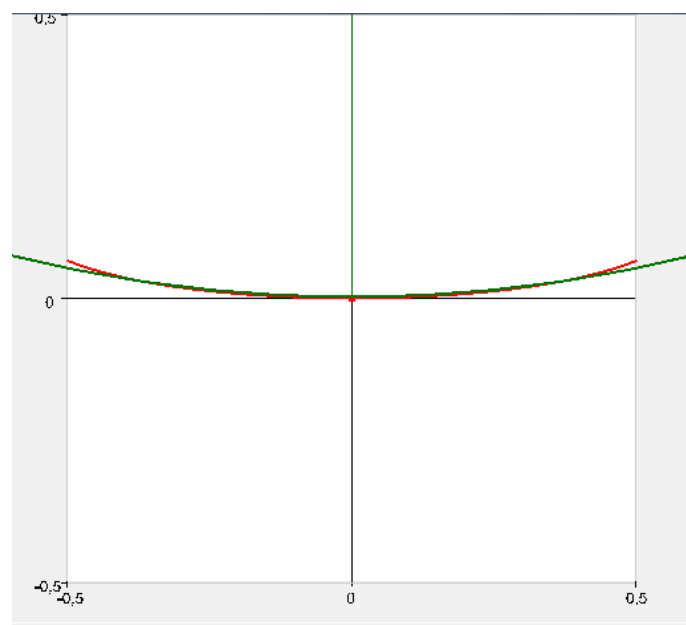
Obr. 2.7: Oskulačná kružnica krivky danej predpisom  $f(x) = x^5 + 0,08x^4 + 0,2x^2$  vo vrchole druhého rádu



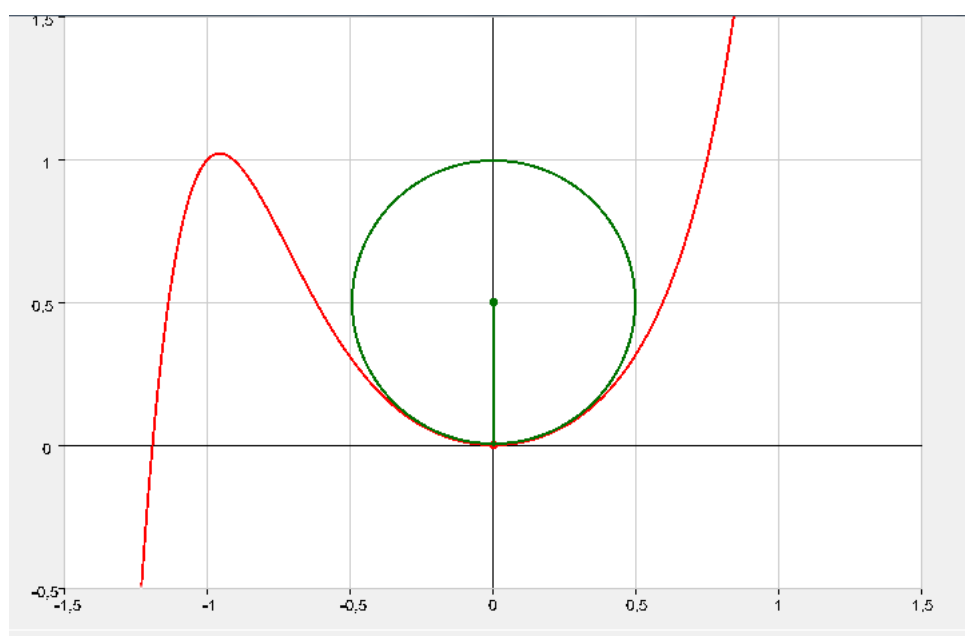
Obr. 2.8: Detail oskulačnej kružnice krivky vo vrchole druhého rádu, krivka prechádza z jednej strany kružnice na druhú



Obr. 2.9: Oskulačná kružnica krivky danej predpisom  $f(x) = x^6 + 0,08x^4 + 0,2x^2$  vo vrchole tretieho rádu



Obr. 2.10: Detail oskulačnej kružnice krivky vo vrchole tretieho rádu, krivka leží na jednej strane kružnice



Obr. 2.11: Oskulačná kružnica krivky danej predpisom  $f(x) = x^7 + x^4 + x^2$  vo vrchole tretieho rádu

## Kapitola 3

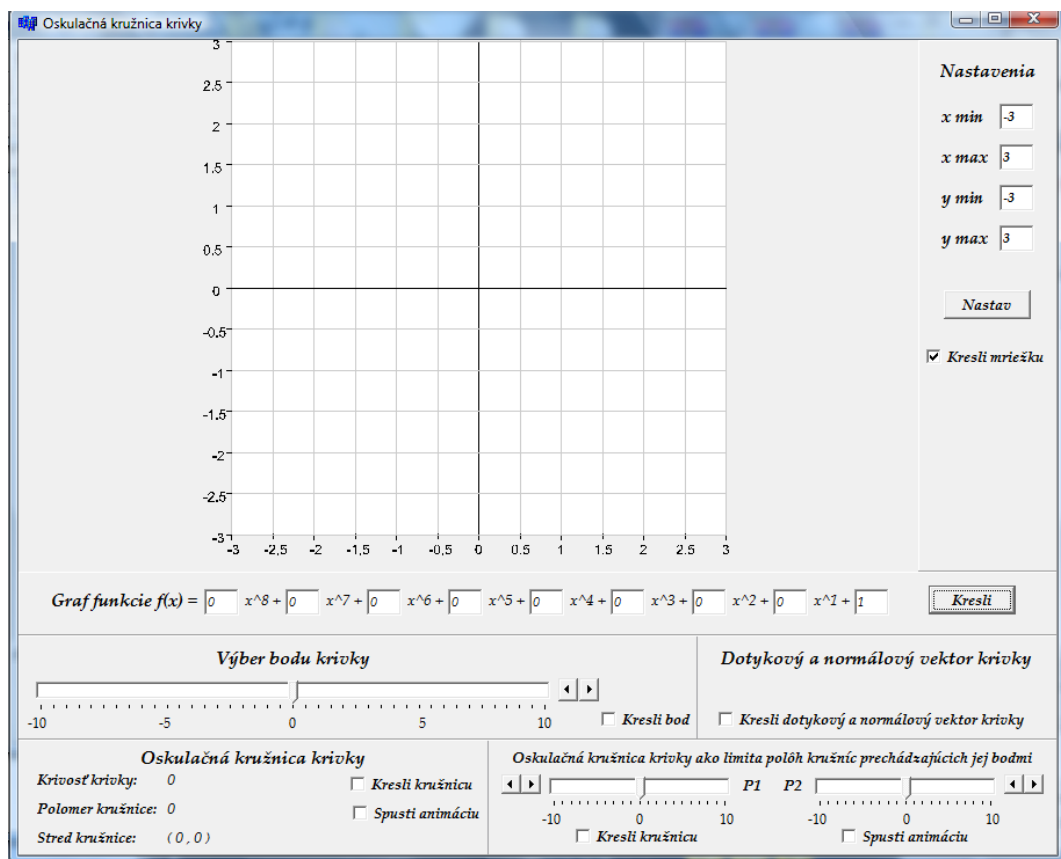
# Vizualizácia vybraných vlastností kriviek a oskulačnej kružnice

Súčasťou diplomovej práce je program slúžiaci predovšetkým na vizualizáciu oskulačnej kružnice krivky v nevrchole, v obyčajnom vrchole ako aj vo vrchole vyššieho rádu. Okrem toho umožňuje sledovať a vizualizovať aj niektoré iné vybrané vlastnosti zvolenej krivky.

Program je napísaný v programovacom jazyku C++, pričom na vykresľovanie sa používa grafická knižnica OpenGL.

Výsledná aplikácia sa skladá z jedného hlavného okna, ktoré je rozdelené na 7 častí. Z toho najväčšia časť slúži na vykresľovanie a ďalších 6 panelov na rôzne nastavenia vykresľovaných objektov.

Napravo od vykresľovacieho okna sa nachádza panel slúžiaci na nastavenie intervalov v  $x$ -ovom a  $y$ -ovom smere, v ktorých sa bude vykresľovať. Užívateľ nastavuje rozsah intervalu v  $x$ -ovom smere zadaním hodnôt  $x_{min}$  a  $x_{max}$  a rozsah v  $y$ -ovom smere voľbou hodnôt  $y_{min}$  a  $y_{max}$ . Aplikácia umožňuje zadávať do príslušných políček buď celé alebo desatinné čísla, pričom z dôvodu jednoduchšej práce s vykresľovaním sa zadané desatinné čísla automaticky prepisujú na najbližšie celé číslo alebo na najbližšie desatinné číslo, ktorého desatinná časť je 0.5. Užívateľ svoju voľbu

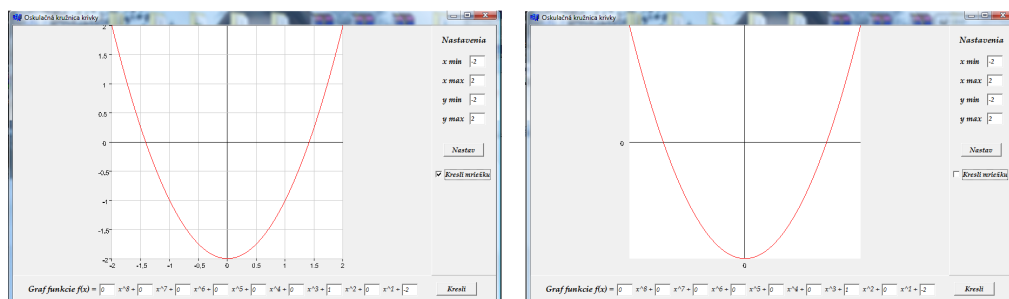


Obr. 3.1: Okno otvorené po spustení programu

potvrďuje stlačením tlačítka *Nastav*, pričom sa to automaticky prejaví aj v okne slúžiacom na vykresľovanie. Na tomto paneli sa nachádza aj zaškrtnuté políčko, ktoré umožňuje voľbu, či sa pri kreslení bude alebo nebude zobrazovať mriežka.

Pod vykresľovacím oknom sa pozdĺž celej šírky hlavného okna nachádzajú ďalšie panely slúžiace na prácu so samotnou krivkou. Prvý z týchto panelov slúži na vykreslenie samotnej krivky. Hlavným dôvodom, pre ktorý tento jednoduchý program vznikol je ten, aby sa vizualizovali výsledky dosiahnuté v práci a vzájomná poloha oskulačnej kružnice a krivky v jej rôznych bodoch. Keďže pri hľadaní príkladov kriviek s vrcholmi vyšších rádov sa pracuje s grafom funkcie  $y = f(x)$ , tento program umožňuje zadávať krivku v tomto tvare. Užívateľ krivku určí zadaním koeficientov pred mocniny premennej  $x$ , pričom najvyššia mocnina je 8. Tieto koeficienty môžu byť rovnako celočíselné, ako aj desatinné čísla. Stlačením tlačítka *Kresli* sa

zvolená krivka vykreslí.



Obr. 3.2: Vykreslenie grafu funkcie s mriežkou a bez mriežky

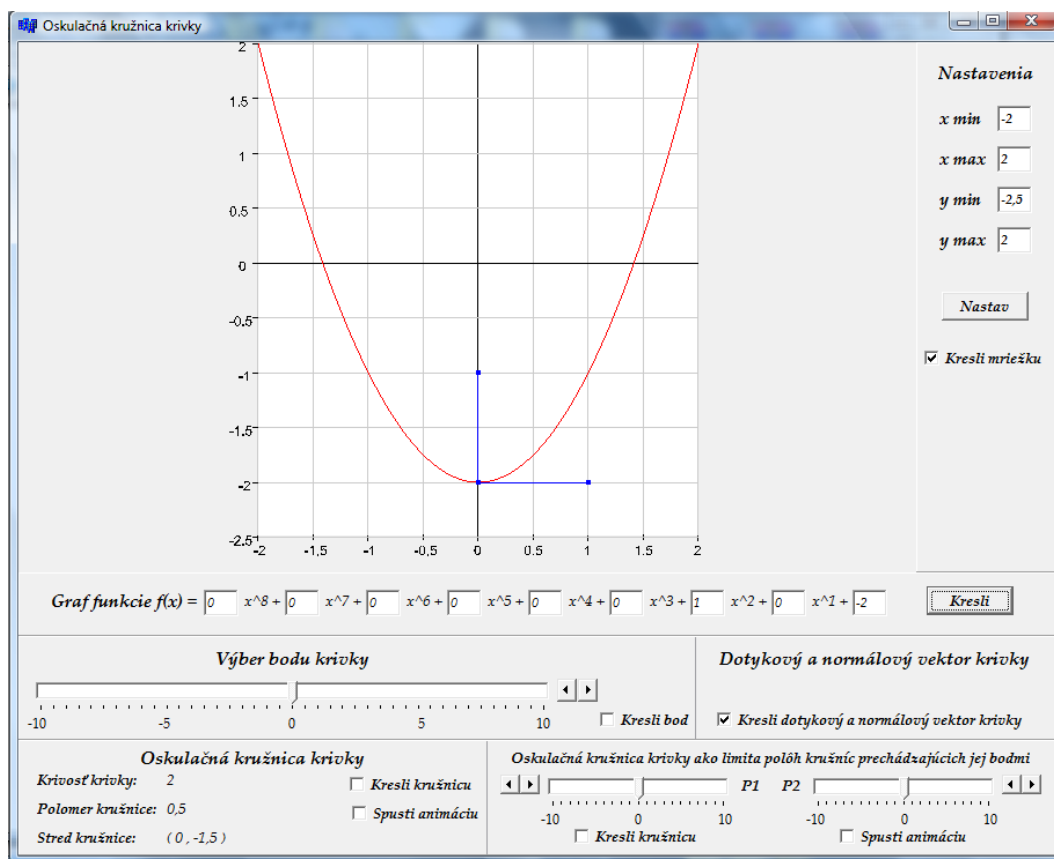
Ďalší panel slúži na výber a vykreslenie bodu na zadanej krivke. Panel obsahuje posuvnú lištu, ktorá určuje  $x$ -ovú súradnicu vybraného bodu. Jej poloha sa mení pomocou šípok umiestnených napravo od lišty. Vybraný bod sa do vykresľovacieho okna nakreslí zaškrtnutím políčka *Kresli bod*.

Napravo od tohto panelu sa nachádza panel, ktorý umožňuje vykresliť dotykový a normálový vektor krivky vo vybranom bode. Na voľbu, či sa majú alebo nemajú tieto vektory kresliť, opäť slúži zaškrtnuté políčko.

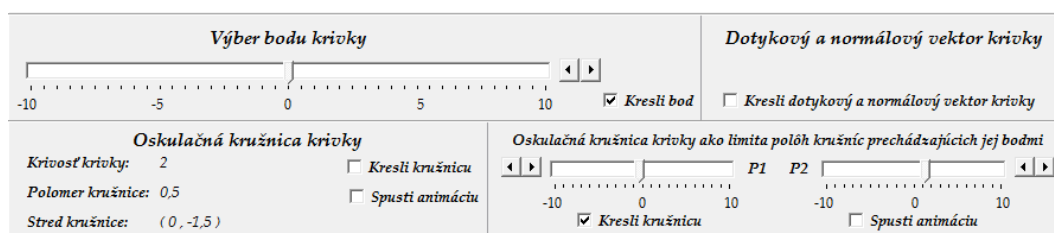
V spodnej časti hlavného okna sa nachádzajú panely slúžiace na prácu s oskulačnou kružnicou krivky.

V ľavom z nich sa vypisujú údaje týkajúce sa oskulačnej kružnice krivky v jej zvolenom bode, t.j. krivosť krivky, polomer a súradnice stredu oskulačnej kružnice. V pravej časti tohto panelu sú umiestnené zaškrtnuté políčka. Prvé z nich slúži na vykreslenie oskulačnej kružnice krivky. Po zaškrtnutí druhého políčka sa spustí animácia, ktorá umožňuje užívateľovi sledovať, ako sa mení poloha oskulačnej kružnice pozdĺž krivky. Poloha zvoleného bodu sa automaticky mení, jeho  $x$ -ová súradnica sa zvyšuje, až kým sa nedosiahne maximálna možná hodnota  $x = 10$  na posuvnom paneli. Potom sa hodnota  $x$ -ovej súradnice začne znižovať, až po minimálnu hodnotu  $x = -10$ . Tento cyklus sa opakuje, až kým sa animácia odškrtnutím príslušného políčka nezastaví.





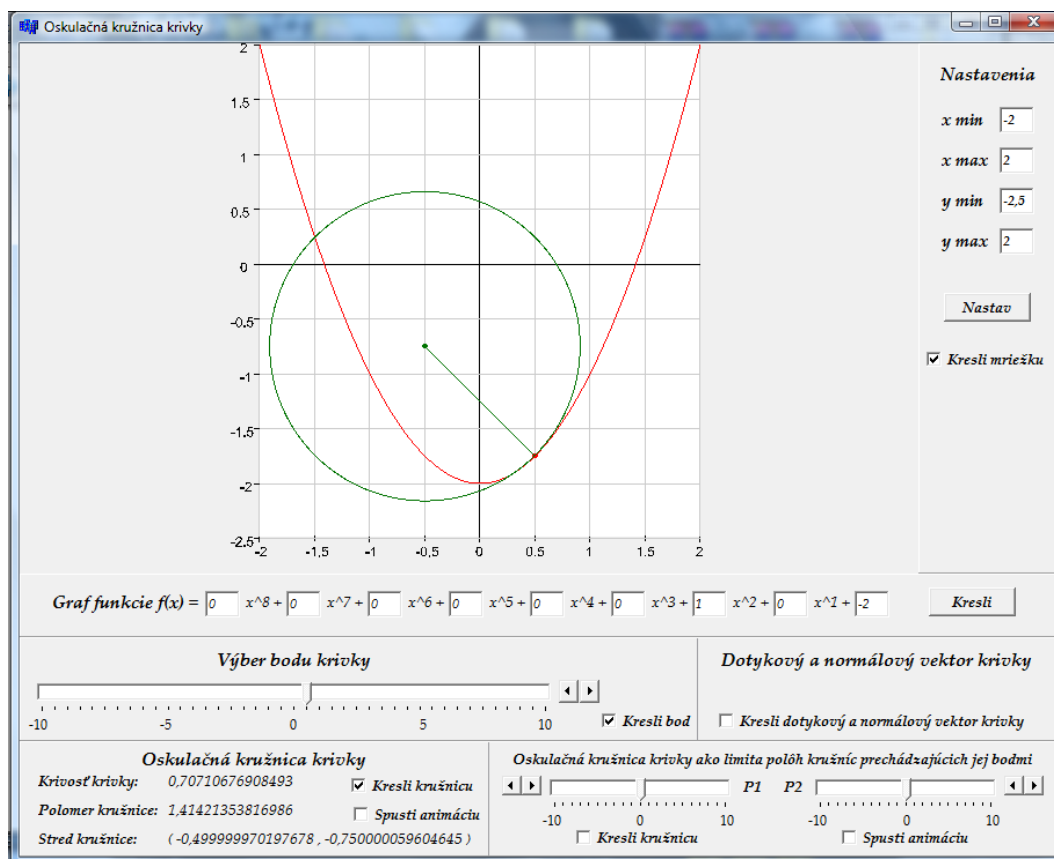
Obr. 3.3: Kreslenie dotykového a normálového vektora krivky



Obr. 3.4: Panely slúžiace na prácu s oskulačnou kružnicou krivky

Posledný panel slúži na vizualizáciu vety, ktorá hovorí o oskulačnej kružnici ako o limite polôh kružníc prechádzajúcich dvoma bodmi krivky blížiacich sa k vybranému bodu. Tento panel obsahuje 2 posúvne lišty slúžiace na voľbu týchto dvoch bodov krivky, bodov  $P_1$  a  $P_2$ .

Zaškrtnutím políčka *Kresli kružnicu* sa nakreslí kružnica prechádzajúca zvoleným bodom krivky a bodmi  $P_1$  a  $P_2$ . Zároveň sa vykreslia aj príslušné body, pričom  $P_1$

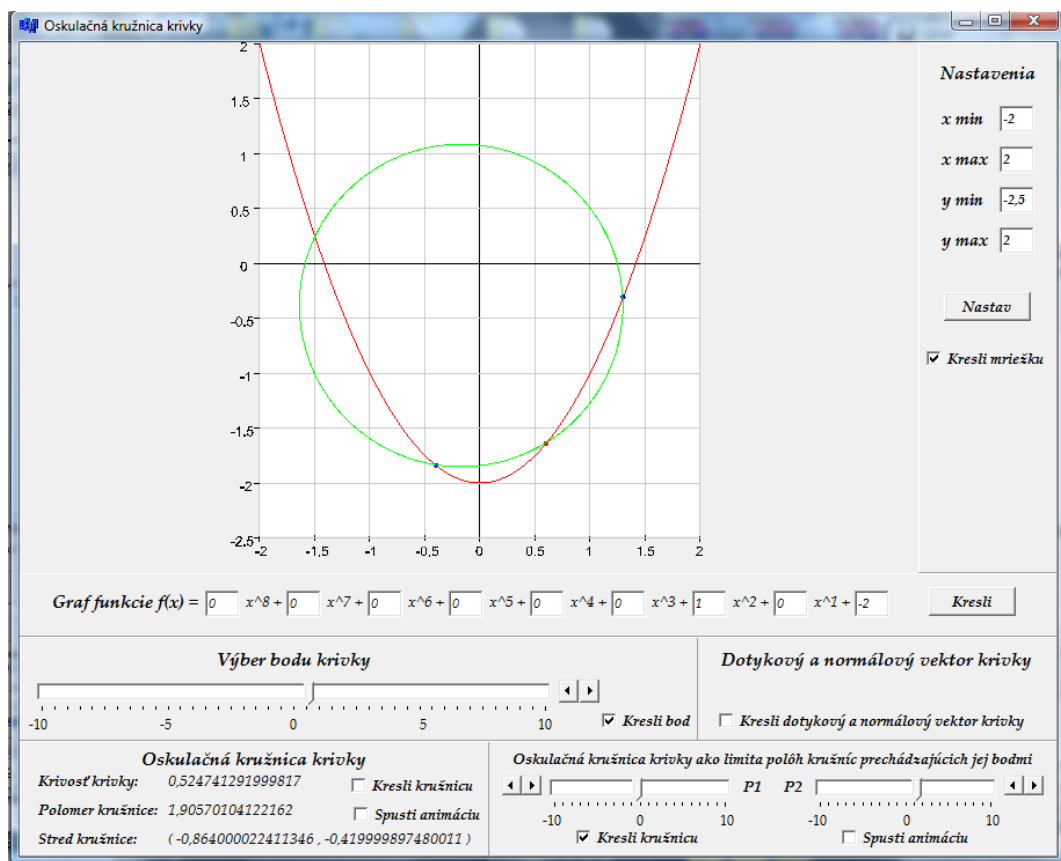


Obr. 3.5: Kreslenie oskulačnej kružnice krivky

a  $P_2$  sú nakreslené modrou farbou, čím sú farebne odlíšené od zvoleného červeného bodu.

Druhé políčko slúži na spustenie animácie, ktorá znázorňuje už spomínanú vetu. Ak sa bod  $P_1$  zvolí naľavo od bodu krivky a  $P_2$  napravo od tohto bodu, tak po spustení animácie sa  $x$ -ová súradnica bodu  $P_1$  zvyšuje a  $x$ -ová súradnica bodu  $P_2$  znižuje, čím sa tieto bod blížia k vybranému bodu krivky. Animácia sa zastaví vo chvíli, keď poloha bodov  $P_1$  a  $P_2$  dosiahne polohu zvoleného bodu krivky a vykreslí sa oskulačná kružnica krivky.

V prípade, že sa body  $P_1$  a  $P_2$  zvolia v inej polohe vzhľadom na vybraný bod krivky, tak sa animácia zastaví až v momente, keď poloha bodu  $P_1$  bude totožná s polohou zvoleného bodu alebo dosiahne maximálnu hodnotu  $x = 10$  a poloha bodu  $P_2$  bude totožná s polohou zvoleného bodu alebo dosiahnu minimálnu hodnotu  $x = -10$ .



Obr. 3.6: Kreslenie kružnice krivky prechádzajúcej jej troma bodmi

Ovládanie programu je naozaj jednoduché a dajú sa pomocou neho vizualizovať niektoré vlastnosti kriviek opísané v tejto práci. Práve pomocou neho vznikla aj väčšina použitých obrázkov.

## Záver

Hlavným cieľom tejto práce bolo ukázať, ako sa osculačná kružnica krivky správa v rôznych bodoch krivky. Vychádzalo sa z poznatkov, že vo všeobecnom bode krivka prechádza z jednej strany osculačnej kružnice na druhú, pričom v obyčajnom vrchole, teda vo vrchole prvého rádu, krivka ostáva na jednej strane osculačnej kružnice.

Na základe toho sa vyslovilo a následne dokázalo tvrdenie, ktoré hovorí, že vo vrchole nepárneho rádu krivka ostáva v blízkosti vrchola na jednej strane osculačnej kružnice a vo vrchole párneho rádu krivka prechádza z jednej strany osculačnej kružnice na druhú. Tento cieľ práce sa podarilo splniť, pričom sa dosiahnuté výsledky aj vizualizovali pre ich lepšiu predstavu.

Pri tvorbe tejto práce sa pracovalo nielen s osculačnou kružnicou krivky, ale aj s vrcholmi vyšších rádo, o ktorých v literatúre nájdeme len málo zmienok. Preto snahou bolo určiť predpis, ktorý by umožnil nájsť vrcholy ľubovoľného rádu vybranej skupiny kriviek. Výpočty ukázali, že tento predpis nevieme len tak ľahko nájsť a keďže to ani nebolo hlavnou úlohou tejto práce, ďalej sa touto náročnou a dlhou cestou neuberalo.

Aj keď predpis krivky s vrcholom ľubovoľného rádu sa nenašiel, našli sa príklady kriviek, ktoré majú vrcholy až rádu 4. V budúcnosti by sa práca mohla rozšíriť tým, že by sa odvodil predpis pre krivku, ktorá by mala vrchol  $n$ -tého rádu.

Veľmi veľkú úlohu pri vizualizácii dosiahnutých výsledkov a ilustrácii niektorých vlastností kriviek zohral program vytvorený k tejto práci. Jeho funkčnosť je opísaná v poslednej kapitole.

# Literatúra

- [BCP03] T. BANCHOFF, S. CHERN, and W. POHL. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Dostupné na internete: [http://www.math.brown.edu/~banchoff/ma106\\_2003/chern1.pdf](http://www.math.brown.edu/~banchoff/ma106_2003/chern1.pdf), 2003.
- [BEL06] A. BELYAEV. *Plane and Space Curves. Curvature. Curvature-based Features*. Dostupné na internete: <http://www.mpi-inf.mpg.de/~ag4-gm/handouts/curves.pdf>, 2006.
- [BOŽ07] M. BOŽEK. *Krivky I - učebné texty*. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského, Bratislava, 2007.
- [BOŽ08] M. BOŽEK. O nesprávnej predstave oskulačnej kružnice rovinatej krivky. In *Zborník príspevkov z konferencie EMATIK 2008*, pages 11–18. ISBN 978-80-89186-55-6, Knížničné a edičné centrum FMFI UK, Bratislava, 2008.
- [GIB01] C. G. GIBSON. *Elementary Geometry of Differentiable Curves: an Undergraduate Introduction*. Cambridge University Press, 2001.
- [HK07] S. HERMANN and R. KLETTE. A Comparative Study on 2D Curvature Estimators. In *Proceedings of the International Conference on Computing: Theory and Applications*. 2007. Dostupné na internete: <http://www.computer.org/portal/web/csdl/doi/10.1109/ICCTA.2007.2>.
- [JAR63] V. JARNÍK. *Diferenciální počet I*. Nakladatelství ČSAV Praha, 1963.

- [JEŽ09] F. JEŽEK. *Diferenciální geometrie - Pomocný učební text - díl I.* Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd, Plzeň, 2009. Dostupné na internete: [http://www.fd.cvut.cz/personal/voracsar/GeometriePG/PGR020/DG\\_Jezek01.pdf](http://www.fd.cvut.cz/personal/voracsar/GeometriePG/PGR020/DG_Jezek01.pdf).
- [OSC] *Curves in Plain - Another approach to the osculating circle.* <http://home.scarlet.be/~ping1339/curves.htm>.
- [SCH10] T. SCHIFRIN. *DIFFERENTIAL GEOMETRY: A First Course in Curves and Surfaces.* University of Georgia, 2010. Dostupné na internete: <http://www.math.uga.edu/~shifrin/ShifrinDiffGeo.pdf>.

# Prílohy

CD

CD obsahuje:

- program slúžiaci na vizualizáciu vybraných vlastností kriviek a oskulačnej kružnice  
krivky