

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky



Diferenciálna geometria kriviek v pseudoeuklidovskej rovine

Písomná práca k dizertačnej skúške

RNDr. Viktória Bakurová

Bratislava 2012

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky



Diferenciálna geometria kriviek v pseudoeuklidovskej rovine

Písomná práca k dizertačnej skúške

Študijný odbor: Geometria a topológia

RNDr. Viktória Bakurová

Bratislava 2012

Čestné prehlásenie

Čestne prehlasujem, že som písomnú prácu k dizertačnej skúške vypracovala samostatne s použitím uvedenej odbornej literatúry.

V Bratislave dňa 25. 02. 2012

.....
Viktória Bakurová

Pod'akovanie

Ďakujem školiteľovi doc. RNDr. Milošovi Božekovi, CSc., za pomoc pri vypracovaní práce, odborné pripomienky, poskytnutú podporu a čas, ktorý mi venoval počas tvorby tejto práce.

Abstrakt

BAKUROVÁ, Viktória. Diferenciálna geometria kriviek v pseudoeuklidovskej rovine [písomná práca k dizertačnej skúške]. Univerzita Komenského v Bratislave. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky; Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky. Bratislava: FMFI UK, 2012.

Pseudoeuklidovská rovina a skúmanie kriviek v nej ležiacich je v súčasnej diferenciálnej geometrii čoraz aktuálnejšia téma. Základný rozdiel medzi klasickou euklidovskou a pseudoeuklidovskou geometriou spočíva v zmene skalárneho súčinu. Pojmy naviazané na skalárny súčin vektorov sa preto v tejto rovine podstatným spôsobom menia. Odlišné vlastnosti pseudoeuklidovskej roviny spôsobujú, že sa menia aj vlastnosti kriviek v nej ležiacich. Stačí spomenúť najdôležitejšie z nich - Frenetove vzorce, krivosť krivky, oskulačná pseudokružnica. Všetky tieto pojmy sú metrického charakteru.

Písomná práca k dizertačnej skúške poskytuje základný prehľad diferenciálnej geometrie kriviek ležiacich v euklidovskej rovine. Následne sa zaoberá geometriou diferencovateľných kriviek ležiacich v pseudoeuklidovskej rovine. Pripravuje aparát na dôkladnejšie skúmanie vlastností kriviek ležiacich v nej a poukazuje na podobnosti a odlišnosti pojmov a vlastností kriviek známych z euklidovskej roviny po prechode k pseudoeuklidovskej. Podrobnejšie sa venuje oskulačnej pseudokružnici a evolútam kriviek.

V závere práce sa navrhujú ciele ďalšieho výskumu. Tie sú zamerané predovšetkým na skúmanie kriviek, ktoré vznikajú metrickými konštrukciami. Cieľom je podrobnejšie sa venovať singularitám, ktoré na týchto krivkách vznikajú.

Kľúčové slová: pseudoeuklidovská rovina, prirodzená parametrizácia krivky, krivosť, pseudokružnica, oskulačná pseudokružnica, evolúta

Obsah

Úvod	1
1 Diferenciálna geometria kriviek v euklidovskej rovine	3
1.1 Prehľad potrebných vlastností kriviek v euklidovskej rovine	3
1.2 Styk krivky a oskulačnej kružnice vo vrchole vyššieho rádu	13
1.2.1 Prirodzená parametrizácia krivky a oskulačnej kružnice a ich derivácie	13
1.2.2 Styk krivky a oskulačnej kružnice vo všeobecnom bode a v obyčajnom vrchole	19
1.2.3 Styk krivky a oskulačnej kružnice vo vrchole vyššieho rádu . .	23
1.3 Metrické konštrukcie kriviek	28
1.3.1 Evolúta krivky v euklidovskej rovine	29
1.3.2 Evolventa krivky v euklidovskej rovine	31
1.3.3 Rovnobežné krivky v euklidovskej rovine	33
1.3.4 Pedálne krivky v euklidovskej rovine	35
2 Geometria diferencovateľných kriviek v pseudoeklidovskej rovine	37
2.1 Geometria pseudoeklidovskej roviny	37
2.2 Krivky v pseudoeklidovskej rovine	40
3 Oskulačná pseudokružnica a evolúta krivky v pseudoeklidovskej rovine	49
3.1 Oskulačná pseudokružnica krivky ležiacej v pseudoeklidovskej rovine	49

3.2	Evolúta krivky ležiacej v pseudoeuclidovskej rovine	55
-----	---	----

	Projekt dizertačnej práce	60
--	----------------------------------	-----------

Zoznam obrázkov

1.1	Oskulačná kružnica krivky	10
1.2	Parametrizácia oskulačnej kružnice vo zvolenej súradnicovej sústave .	14
1.3	Oskulačná kružnica krivky vo všeobecnom bode, krivka a oskulačná kružnica majú v spoločnom bode styk rádu práve 2	22
1.4	Oskulačná kružnica krivky v obyčajnom vrchole, krivka a oskulačná kružnica majú v spoločnom bode styk rádu práve 3	23
1.5	Oskulačná kružnica krivky danej predpisom $f(x) = x^5 + 0,08x^4 + 0,2x^2$ vo vrchole druhého rádu pre $x = 0$	27
1.6	Detail oskulačnej kružnice krivky vo vrchole druhého rádu, krivka a oskulačná kružnica majú v spoločnom bode styk rádu 4	28
1.7	Oskulačná kružnica krivky danej predpisom $f(x) = x^6 + 0,08x^4 + 0,2x^2$ vo vrchole tretieho rádu pre $x = 0$	28
1.8	Detail oskulačnej kružnice krivky vo vrchole tretieho rádu, krivka a oskulačná kružnica majú v spoločnom bode styk rádu 5	29
1.9	Evolúta elipsy a paraboly	31
1.10	Evolventa kružnice, elipsy a paraboly	33
1.11	Rovnoběžné krivky k elipse a parabole	34
1.12	Pedálna krivka kružnice, elipsy a paraboly	36
2.1	Frenetov repér v troch bodoch euklidovskej kružnice	42
3.1	Priestorová (naľavo) a časová (napravo) pseudokružnica so stredom $S = (0, 0)$ a polomerom $r = 1$	50

3.2	Oskulačná pseudokružnica euklidovskej kružnice v parametroch $t =$ $0, t = \frac{\pi}{6}$ a $t = \frac{\pi}{3}$	54
3.3	Oskulačná pseudokružnica euklidovskej kružnice v parametroch $t =$ $0, t = \frac{\pi}{6}$ a $t = \frac{\pi}{3}$	55
3.4	Oskulačná pseudokružnica paraboly v parametroch $t = -2, t = 0$ a $t = 2$	55
3.5	Evolúta euklidovskej kružnice, euklidovskej elipsy a paraboly	58

Úvod

Pseudoeuklidovský priestor a vlastnosti kriviek v ňom ležiacich je v diferenciálnej geometrii čoraz aktuálnejšia téma. Tejto problematike je venovaných stále viac publikácií. Každá z nich k nej pristupuje inak a zameriava sa na inú vybranú vlastnosť kriviek. Diferenciálnou geometriou priestorových kriviek ležiacich vo 4-rozmernom pseudoeuklidovskom priestore sa zaoberá [YT08]. V publikácii [BIN10] sa autor zameriava na geometriu pseudoeuklidovskej roviny.

Niekoľko prác sa venuje štúdiu kriviek ležiacich v pseudoeuklidovskej rovine. Článok [IKA03] poskytuje zovšeobecnenie Euler-Savaryho formuly na pseudoeuklidovskú geometriu. Z nej vychádza práca [BZE10] zaoberajúca sa štúdiom tejto formuly vo svetelnom kuželi. Práce [ABS00] a [KL09] sa venujú zovšeobecneniu tzv. racionálnych Pytagorovských hodografov krivky na pseudoeuklidovskú geometriu. Tejto problematike sa venuje aj [KJ], kde sa porovnávajú geometrické vlastnosti týchto kriviek s ich vlastnosťami v klasickej euklidovskej geometrii. Aj keď všetky spomenuté publikácie pracujú s krivkami ležiacimi v pseudoeuklidovskom priestore, resp. rovine, väčšina z nich poskytuje len veľmi stručný prehľad pojmov a nástrojov súvisiacich s krivkami.

Vychádzajúc z týchto prác budujeme komplexnú a podrobnú teóriu geometrie pseudoeuklidovskej roviny, ako aj kriviek v nej ležiacich. V tejto práci poskytujeme nielen teoretický prehľad najdôležitejších pojmov súvisiacich s rovinnou krivkou ležiacou v pseudoeuklidovskej rovine, ale aj ich porovnanie s vlastnosťami krivky ležiacej v euklidovskej rovine. Špeciálnu pozornosť venujeme oskulačnej pseudokružnici a

evolúte krivky v pseudoeuklidovskej rovine, čím nadväzujeme na prácu [ST11].

Práca je rozdelená na štyri kapitoly. Prvá je venovaná diferenciálnej geometrii kriviek v euklidovskej rovine. V tejto kapitole nájdeme zhrnutie základných vlastností kriviek ležiacich v klasickej euklidovskej rovine, ktoré slúžia na porovnanie a odhalenie zmien, ktoré nastávajú prechodom k pseudoeuklidovskej rovine. V tejto kapitole sa nachádza aj zhrnutie vybraných metrických konštrukcií kriviek v euklidovskej rovine, pričom táto časť nám slúži ako východisko a motivácia pri definovaní cieľov dizertačnej práce.

Druhá a tretia kapitola práce sú venované geometrii diferencovateľných kriviek v pseudoeuklidovskej rovine. Opisujú sa základné vlastnosti tejto roviny, ako aj kriviek v nej ležiacich a porovnávajú sa s euklidovským prípadom. Špeciálna pozornosť sa venuje oskulačnej pseudokružnici a evolútam a opisu ich základných vlastností. Posledná kapitola poskytuje zhrnutie cieľov budúceho výskumu, ako aj metódy, ktoré by sa pri tomto výskume mali použiť.

Kapitola 1

Diferenciálna geometria kriviek v euklidovskej rovine

1.1 Prehľad potrebných vlastností kriviek v euklidovskej rovine

Táto kapitola poskytuje prehľad základných vlastností kriviek ležiacich v euklidovskej rovine. Predpokladáme, že čitateľ ovláda základnú teóriu týkajúcu sa rovinných kriviek a je oboznámený so základnými pojmami, ktoré s nimi súvisia. Preto v tejto kapitole uvedenie iba ich zhrnutie a vyslovíme tvrdenia, ktoré budú v práci ďalej používané. Všetky dôkazy, odvodenia a ďalšie vysvetlenia nájde čitateľ v literatúre zaoberajúcej sa rovinnými krivkami, napr. [GIB01], [BO07], [JE09], [SCH10], [BCP03].

V diferenciálnej geometrii a v počítačovej grafike sa krivky najčastejšie zadávajú parametricky prostredníctvom bodovej funkcie jednej premennej.

Definícia 1.1.1 (Bodová funkcia jednej premennej v rovine a jej derivácia):

Bodová funkcia jednej premennej v rovine je zobrazenie $P : I \rightarrow \mathbb{E}^2$, kde $I \subseteq \mathbb{R}$ je

interval. Ide teda o také zobrazenie, ktoré každému reálnemu číslu z intervalu I priradí bod v rovine. Klasický zápis bodovej funkcie jednej premennej je $P = P(t)$, kde $t \in I$ nazývame parametrom bodu $P(t)$. V súradniciach vyzerá tento zápis nasledovne: $P(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$. V tomto vyjadrení nazývame výsledné funkcie $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$ súradnicami zobrazenia P . Pod deriváciou bodovej funkcie $P(t) = (x(t), y(t))$ v bode $t_0 \in I$ rozumieme vektor $P'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$.

Definícia 1.1.2 (Vektorová funkcia jednej premennej):

Vektorová funkcia jednej premennej v rovine je zobrazenie $\mathbf{u} : I \rightarrow \mathbb{E}^2$, kde $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval. Ide teda o také zobrazenie, ktoré každému reálnemu číslu z intervalu I priradí vektor v rovine. Klasický zápis vektorovej funkcie jednej premennej je $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$, kde $t \in I$. V súradniciach vyzerá tento zápis nasledovne: $\mathbf{u}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$. V tomto vyjadrení nazývame výsledné funkcie $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$ súradnicami zobrazenia \mathbf{u} .

Poznámka: Prvá, ako aj všetky vyššie derivácie bodovej funkcie jednej premennej sú vektorové funkcie jednej premennej. Všetky derivácie vektorovej funkcie sú vektorové funkcie.

Definícia 1.1.3 (Parametrické vyjadrenie krivky v rovine):

Pod parametrickým vyjadrením krivky v rovine rozumieme bodovú funkciu jednej premennej $P : I \rightarrow \mathbb{E}^2$, kde $I \subseteq \mathbb{R}$, pričom požadujeme hladkosť a regulárnosť tejto funkcie. Pod hladkosťou zobrazenia $P(t) = (x(t), y(t))$ rozumieme skutočnosť, že v každom parametri t majú výsledné komponenty x a y derivácie všetkých rádov. Regulárnosť zobrazenia znamená, že pre ľubovoľné $t \in I$ je $P'(t) \neq 0$.

Poznámka: Kvôli prirodzenejšiemu vyjadrovaniu budeme často namiesto "krivka určená parametrizáciou P " jednoducho hovoriť o "krivke P ".

Krivka svojou parametrizáciou nie je určená jednoznačne, rôzne parametrizácie môžu určovať tú istú krivku. Nasledujúca definícia hovorí o tom, ako parametrizáciu zmeniť:

Definícia 1.1.4 (Zmena parametrizácie krivky):

Nech je daná krivka $P(t)$, $t \in I$. Nech J je nejaký interval a na nej nech je definované zobrazenie $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ také, že $t = \varphi(u)$. Od zobrazenia φ požadujeme hladkosť, regulárnosť a surjektívnosť, pričom pod surjektívnosťou tohto zobrazenia rozumieme to, že interval J sa zobrazuje na interval I . Nová parametrizácia $Q(u)$ krivky $P(t)$ bude také parametrické vyjadrenie tejto krivky, pre ktoré bude platiť: $Q(u) = P(\varphi(u))$, $u \in J$. Zmenu parametrizácie krivky nazývame reparametrizácia.

Poznámka: Každá krivka má nekonečne veľa parametrizácií. Dve krivky budeme nazývať parametricky ekvivalentnými, ak jedna krivka vznikla z druhej krivky reparametrizáciou.

Poznámka: Body krivky s parametrizáciou $P(t)$, pre ktoré $P'(t) = \mathbf{0}$, nazývame singulárne body krivky, ostatné body sú regulárne. Obmedzíme sa iba na *izolované singulárne body*, teda také body $P(t_0)$, že $P'(t_0) = \mathbf{0}$ a $P'(t) \neq \mathbf{0}$ v nejakom okolí čísla t_0 . Rozlišujeme viacero typov singulárnych bodov. O nich hovoria nasledujúce definície.

Definícia 1.1.5:

Poldotyčnica sprava krivky $P(t)$, $t \in I$ v bode $P(t_0)$ je polpriamka $P(t_0)\mathbf{x}_+(t_0)$, kde

$$\mathbf{x}_+(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0^+} \frac{P(t) - P(t_0)}{|P(t) - P(t_0)|}.$$

Analogicky sa definuje poldotyčnica zľava $P(t_0)\mathbf{x}_-(t_0)$.

Definícia 1.1.6:

Singulárny bod krivky, v ktorom existuje poldotyčnica zľava i sprava, sa nazýva

- bod zlomu, ak poldotyčnice neležia na jednej priamke
- bod vratu, ak poldotyčnice splývajú
- nepodstatne singulárny bod alebo tiež odstrániteľný singulárny bod, ak sú poldotyčnice navzájom opačné polpriamky.

Dotyčnica v bode vratu resp. v nepodstatne singularnom bode je priamka, na ktorej ležia obe poldotyčnice. Bod vratu rovinatej krivky sa nazýva bodom vratu prvého druhu resp. druhého druhu, ak krivka prechádza z jednej strany dotyčnice na druhú resp. lokálne leží na jednej strane od dotyčnice.

Veta 1.1.1:

Nech $P'(t_0) = \mathbf{0}$ a $k > 1$ je najmenšie také prirodzené číslo, že $P^{(k)}(t_0) \neq \mathbf{0}$. Potom platí:

- Ak je k nepárne, tak $P(t_0)$ je nepodstatne singularný bod a dotyčnica v ňom je určená vektorom $P^{(k)}(t_0)$.
- Ak je k párne, tak $P(t_0)$ je bod vratu a dotyčnica v ňom je určená vektorom $P^{(k)}(t_0)$.
- Nech je krivka rovinná a k je párne. Nech l je najmenšie také prirodzené číslo, že vektory $P^{(k)}(t_0)$ a $P^{(l)}(t_0)$ sú lineárne nezávislé. Potom $P(t_0)$ je bod vratu prvého druhu pre l nepárne a bod vratu druhého druhu pre l párne.

Definícia 1.1.7 (Inflexný bod):

Bod $P(t)$ krivky sa nazýva inflexný bod, ak vektory $P'(t)$ a $P''(t)$ sú lineárne závislé. Bod, ktorý nie je inflexný je neinflexným bodom krivky.

Definícia 1.1.8 (Dotyčnica a normála krivky):

Majme danú krivku $P(t)$, $t \in I$ a nech $t_0 \in I$.

Dotyčnica krivky v regulárnom bode $P(t_0)$ je priamka určená bodom $P(t_0)$ a vektorom $P'(t_0)$. Vektor $P'(t_0)$ sa nazýva dotykový vektor krivky.

Normála krivky v regulárnom bode $P(t_0)$ je priamka určená bodom $P(t_0)$ a vektorom kolmým na dotyčnicu v tomto bode, ktorý vznikol otočením dotykového vektora $P'(t_0)$ o $+90^\circ$. Tento vektor nazývame normálový vektor krivky.

Veta 1.1.2 (Vektor dotyčnice a normály krivky [BO07]):

Na dotyčnici a normále krivky v jej neinflexnom bode ležia jednotkové vektory \mathbf{t} a \mathbf{n} , ktoré vznikajú ortonormalizáciou vektorov P' a P'' :

$$\mathbf{t} = \frac{P'}{|P'|}, \quad \mathbf{n} = \perp \mathbf{t},$$

kde vektor $\perp \mathbf{t}$ vznikne z vektora \mathbf{t} otočením o $+90^\circ$. Nazývajú sa vektor dotyčnice a normály krivky.

Poznámka: Ortonormálne vektory \mathbf{t} a \mathbf{n} tvoria Frenetov repér krivky v rovine.

Definícia 1.1.9 (Prirodzená parametrizácia krivky [JE09]):

Krivka je daná prirodzenou parametrizáciou práve vtedy, ak pre ľubovoľné t platí, že $|P'(t)| = 1$.

Každú regulárnu parametrizáciu krivky $P(t)$ možno vhodnou substitúciou $t = \phi(s)$ zmeniť na prirodzenú parametrizáciu $Q(s)$. Pritom môžeme dosiahnuť, že pre dopredu zvolené hodnoty parametrov t_0 a s_0 platí $Q(s_0) = P(t_0)$.

Veta 1.1.3 ([BO07]):

Základné vlastnosti prirodzenej parametrizácie sú:

1. $|P'(s)| = 1$
2. $P''(s) \perp P'(s)$
3. $\mathbf{t}(s) = P'(s)$, $\mathbf{n}(s) = \text{sgn det}(P', P'') \frac{P''(s)}{|P''(s)|}$

Definícia 1.1.10 (Krivosť krivky danej parametricky [BO07]):

Krivosť rovinatej krivky $k(t)$ v bode krivky $P(t)$ je definovaná ako číslo

$$k(t) = \frac{\det(P'(t), P''(t))}{|P'(t)|^3}$$

Poznámka: V literatúre sa často v súvislosti s krivosťou stretávame s pojmom orientovaná a neorientovaná krivosť krivky. Krivosť zavedená v predchádzajúcej definícii je orientovaná krivosť krivky. Neorientovaná krivosť krivky je absolútna hodnota z orientovanej krivosti, nadobúda iba nezáporné hodnoty. My budeme ďalej pod krivosťou rozumieť orientovanú krivosť krivky.

Veta 1.1.4 (Krivosť krivky danej prirodzenou parametrizáciou, [BO07]):

Krivosť rovinatej krivky $k(s)$ v bode krivky $P(s)$ danou prirodzenou parametrizáciou je definovaná ako číslo $k(s) = \operatorname{sgn} \det(P'(s), P''(s)) |P'''(s)|$.

Veta 1.1.5 (Frenetove vzorce, [SCH10]):

Pre rovinnú krivku danú prirodzenou parametrizáciou platí:

$$\mathbf{t}'(s) = k(s) \mathbf{n}(s) \quad (1.1)$$

$$\mathbf{n}'(s) = -k(s) \mathbf{t}(s) \quad (1.2)$$

Príklad 1: Uvažujme kružnicu $P(t) = (r \cos t, r \sin t)$, $t \in \langle -\frac{1}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi \rangle$. V bodoch kružnice máme \mathbf{t} , \mathbf{n} a k vyjadrené nasledovne:

$$\mathbf{t} = (-\sin t, \cos t)$$

$$\mathbf{n} = (-\cos t, -\sin t)$$

$$k = \frac{1}{r}$$

Príklad 2: Uvažujme elipsu $P(t) = (a \cos t, b \sin t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Označme výraz $a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t$ ako $g(t)$. Pre elipsu máme \mathbf{t} , \mathbf{n} a k vyjadrené nasledovne:

$$\mathbf{t} = \left(-\frac{a \sin t}{g(t)^{\frac{1}{2}}}, \frac{b \cos t}{g(t)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

$$\mathbf{n} = \left(-\frac{b \cos t}{g(t)^{\frac{1}{2}}}, -\frac{a \sin t}{g(t)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

$$k = \frac{ab}{g(t)^{\frac{3}{2}}}$$

Príklad 3: Uvažujme parabolou $P(t) = (\frac{t^2}{2p}, t)$, $t \in (-\infty, \infty)$. Platí:

$$\mathbf{t} = \left(\frac{t}{(t^2 + p^2)^{\frac{1}{2}}}, \frac{p}{(t^2 + p^2)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

$$\mathbf{n} = \left(-\frac{p}{(t^2 + p^2)^{\frac{1}{2}}}, \frac{t}{(t^2 + p^2)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

$$k = -\frac{p^2}{(t^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Definícia 1.1.11 (Oskulačná kružnica rovinnej krivky, [BO08]):

Oskulačnou kružnicou krivky v neinflexnom bode $P(t)$ nazývame kružnicu so stredom v bode $S(t)$ a s polomerom $|r(t)|$, kde $r(t)$ je polomer krivosti v bode $P(t)$ daný ako

$$r(t) = \frac{1}{k(t)}$$

a $S(t)$ je stred krivosti vyjadrený vzťahom

$$S(t) = P(t) + r(t) \mathbf{n}(t). \quad (1.3)$$

Poznámka: Z vyjadrenia stredu oskulačnej kružnice vyplýva, že tento bod leží na normále krivky v danom bode.

Poznámka: Je treba si uvedomiť, že inflexný bod okrem jeho definície charakterizuje aj podmienka $k(t) \neq 0$. Preto o oskulačnej kružnici hovoríme iba v neinflexnom bode.

Poznámka ([GIB01]): Dá sa ukázať, že stred oskulačnej kružnice vieme v súradniciach vyjadriť nasledovne:

$$s_1 = x(t) - \left(\frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)} \right) y'(t) \quad (1.4)$$

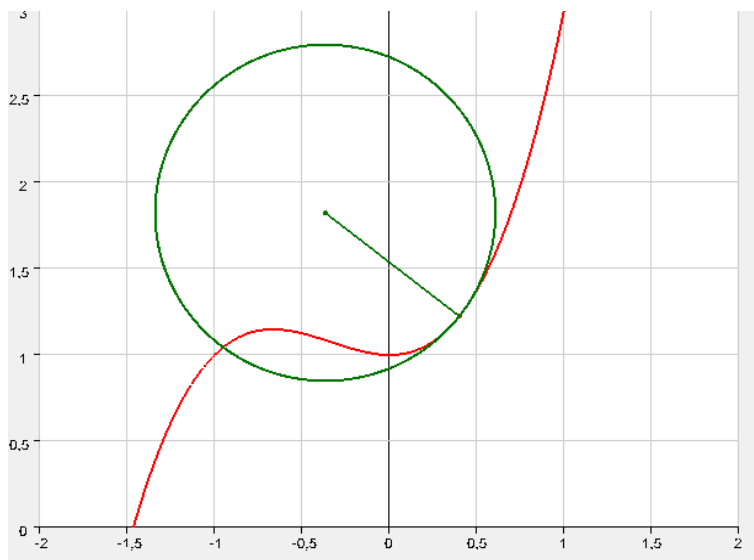
$$s_2 = y(t) + \left(\frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)} \right) x'(t) \quad (1.5)$$

Definícia 1.1.12 (Vrchol krivky [GIB01]):

Nech je daná rovinná krivka $P(t)$, $t \in I$ a nech $k(t)$ je jej krivosť. Vrcholom krivky nazývame taký bod $P(t_0)$, $t_0 \in I$, v ktorom má krivosť krivky stacionárny bod, teda $k'(t_0) = 0$. Vo všeobecnosti je teda vrcholom krivky taký bod, v ktorom má krivosť lokálny extrém.

Definícia 1.1.13 (Obyčajný vrchol krivky [GIB01]):

Nech je daná rovinná krivka $P(t)$, $t \in I$ a bod $P(t_0)$, $t_0 \in I$ je jej vrchol. Vrchol $P(t_0)$ sa nazýva obyčajný vrchol rovinnej krivky, ak pre krivosť krivky platí:



Obr. 1.1: Oskulačná kružnica krivky

$k'(t_0) = 0$ a $k''(t_0) \neq 0$. Obyčajný vrchol krivky budeme nazývať tiež vrcholom prvého rádu.

Poznámka: Body krivky, ktoré nie sú vrcholmi, nazývame všeobecné body krivky.

Definícia 1.1.14 (Vrchol vyššieho rádu [GIB01]):

Nech je daná rovinná krivka $P(t)$, $t \in I$ a nech $P(t_0)$, $t_0 \in I$ je jej vrchol taký, že $k'(t_0) = 0, \dots, k^{(n)}(t_0) = 0$, $n \geq 1$. Potom vrchol $P(t_0)$ nazývame vrchol aspoň n -teho rádu krivky $P(t)$.

Hovoríme, že krivka má v bode $P(t_0)$, $t_0 \in I$ vrchol rádu práve n práve vtedy, ak pre derivácie krivosti tejto krivky platí: $k'(t_0) = 0, \dots, k^{(n)}(t_0) = 0 \wedge k^{(n+1)}(t_0) \neq 0$, $n \geq 1$.

Definícia 1.1.15 ([BAK10]):

Majme danú funkciu $\varphi : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$, $m \geq 1$, diferencovateľnú a takú, že spĺňa podmienku: $\varphi(x_0, 0, \dots, 0) = 0$ pre všetky $x_0 \in \mathbb{R}$. Označme A_m množinu všetkých funkcií, ktoré majú tieto vlastnosti, teda:

$$A_m = \{\varphi : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi \text{ je hladká a } \varphi(x_0, 0, \dots, 0) = 0 \text{ pre všetky } x_0 \in \mathbb{R}\}, m \geq 1$$

Príklad 4: Majme danú funkciu $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ predpisom $\varphi(x, y) = xy$. Táto funkcia je diferencovateľná a platí, že $\varphi(x, 0) = x \cdot 0 = 0$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$, preto patrí do množiny A_1 .

Definícia 1.1.16 ([BAK10]):

Nech $k : I \rightarrow \mathbb{R}$ je hladká funkcia a nech $k^{(1)}(s), \dots, k^{(m)}(s), s \in I$ sú jej derivácie, $m \geq 1$. Potom množinu všetkých zložených funkcií $F(s)$ takých, že $F(s) = \varphi(k(s), k^{(1)}(s), \dots, k^{(m)}(s)), s \in I, \varphi \in A_m, m \geq 1$ budeme označovať $A_m(k)$. Platí:

$$A_m(k) = \{F(s) = \varphi(k(s), k^{(1)}(s), \dots, k^{(m)}(s)), s \in I \wedge \varphi \in A_m\}, m \geq 1$$

O funkcií z množiny $A_m(k)$ budeme tiež hovoriť, že je funkciou typu $A_m(k)$.

Príklad 5: Nech $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je hladká funkcia. Uvažujme funkciu φ z príkladu 4. Potom zložená funkcia $F(s) = \varphi(k(s), k^{(1)}(s)) = k(s)k^{(1)}(s)$ je funkciou typu $A_1(k)$.

Poznámka: Pre danú hladkú funkciu $k(s)$ je funkcia $F(s)$ funkciou typu $A_m(k)$ práve vtedy, keď existuje taká funkcia φ z A_m , že $F(s) = \varphi(k(s), \dots, k^{(m)}(s))$. Funkciu $\varphi(k(s), \dots, k^{(m)}(s))$ budeme v ďalšom texte skrátene zapisovať bez premennej s , teda $\varphi(k, \dots, k^{(m)})$. Všetky funkcie z množiny $A_m(k)$ majú rovnaký definičný obor, ako funkcia k .

Poznámka: Dôvod, prečo uvádzame množinu funkcií $A_m(k)$ je ten, že v niektorých výpočtoch v ďalšej časti práce sa stretáme práve s funkciami z tejto množiny, ktoré obsahujú rôzne kombinácie krivosti krivky (hladkej funkcie) a jej derivácií, pričom nie vždy je dôležitý presný tvar týchto funkcií. Stačí vedieť, derivácie ktorého najvyššieho rádu obsahujú. Tento nástroj bude hrať veľmi dôležitú rolu pri napĺňaní cieľov dizertačnej práce.

Veta 1.1.6 (Pravidlá pre počítanie s funkciami typu $A_m(k)$, [BAK10]):

Nech m, n sú prirodzené čísla a nech $a(k, \dots, k^{(m)}) \in A_m(k), b(k, \dots, k^{(n)}) \in A_n(k), c \in \mathbb{R}$. Potom:

1. $ka(k, \dots, k^{(m)}) \in A_m(k)$
2. $k^{(n)}a(k, \dots, k^{(m)}) \in A_l(k)$, kde $l = \max\{m, n\}$
3. $a(k, \dots, k^{(m)}) + b(k, \dots, k^{(n)}) \in A_l(k)$, kde $l = \max\{m, n\}$
4. $ca(k, \dots, k^{(m)}) \in A_m(k)$
5. $(a(k, \dots, k^{(m)}))' \in A_{m+1}(k)$

Dôkaz. Pri dôkaze prvých štyroch tvrdení si stačí uvedomiť, akú vlastnosť má funkcia $a(k, \dots, k^{(m)}) \in A_m(k)$ a ako sa táto funkcia zmení pri operáciách naznačených vo vete.

Posledné tvrdenie dokážeme podrobnejšie. Je treba si uvedomiť, že $a(k, \dots, k^{(m)})$ je zložená funkcia $a(k, \dots, k^{(m)})(s) = a(k(s), \dots, k^{(m)}(s))$, kde $a(x_0, \dots, x_m)$ je funkcia z množiny A_m . Derivujeme ju podľa pravidiel o derivácii zloženej funkcie. Platí teda:

$$(a(k, \dots, k^{(m)}))' = \frac{\partial a}{\partial x_0} k^{(1)} + \frac{\partial a}{\partial x_1} k^{(2)} + \dots + \frac{\partial a}{\partial x_m} k^{(m+1)} = \psi(k, k^{(1)}, \dots, k^{(m+1)})$$

Z tvaru výslednej derivácie je jasné, že $(a(k, \dots, k^{(m)}))'$ je zložená funkcia s vonkajšou zložkou $\psi(x_0, \dots, x_{m+1}) = \frac{\partial a}{\partial x_0} x_1 + \frac{\partial a}{\partial x_1} x_2 + \dots + \frac{\partial a}{\partial x_m} x_{m+1}$ a s vnútornými zložkami $x_0 = k, x_1 = k^{(1)}, \dots, x_{m+1} = k^{(m+1)}$. Podmienka $\psi(x_0, 0, \dots, 0) = 0$ pre všetky $x_0 \in \mathbb{R}$ je zrejme splnená, preto $\psi \in A_{m+1}$, čiže $(a(k, \dots, k^{(m)}))' \in A_{m+1}(k)$. Tým je veta dokázaná. \square

Definícia 1.1.17 (Styk kriviek, [BO07]):

Nech $P_1(s)$ a $P_2(s)$ sú rovinné krivky vyjadrené v prirodzenej parametrizácii. Potom hovoríme, že krivky $P_1(s)$ a $P_2(s)$ majú v spoločnom bode $P_1(s_1) = P_2(s_2)$ styk rádu aspoň k , ak platí:

$$P_1^{(i)}(s_1) = P_2^{(i)}(s_2) \quad \forall i = 0, \dots, k$$

Krivky $P_1(s)$ a $P_2(s)$ majú v spoločnom bode $P_1(s_1) = P_2(s_2)$ styk rádu práve k , ak platí:

$$P_1^{(i)}(s_1) = P_2^{(i)}(s_2) \quad \forall i = 0, \dots, k \quad \wedge \quad P_1^{(k+1)}(s_1) \neq P_2^{(k+1)}(s_2)$$

1.2 Styk krivky a oskulačnej kružnice vo vrchole vyššieho rádu

1.2.1 Prirodzená parametrizácia krivky a oskulačnej kružnice a ich derivácie

V tejto kapitole sa budeme zaoberať rádom styku oskulačnej kružnice a krivky v spoločnom vrchole, ak bude tento vrchol vyššieho rádu.

V celej podkapitole budeme predpokladať, že krivka je daná prirodzenou parametrizáciou $P_1(s)$. Aby sme mohli na zistenie rádu styku krivky a oskulačnej kružnice použiť priamo definíciu hovoriacu o styku dvoch kriviek, potrebujeme aj oskulačnú kružnicu krivky vyjadriť v prirodzenej parametrizácii. Pretože prirodzená parametrizácia krivky nie je určená jednoznačne, použijeme takú, ktorá nám naše ďalšie výpočty podstatne zjednoduší.

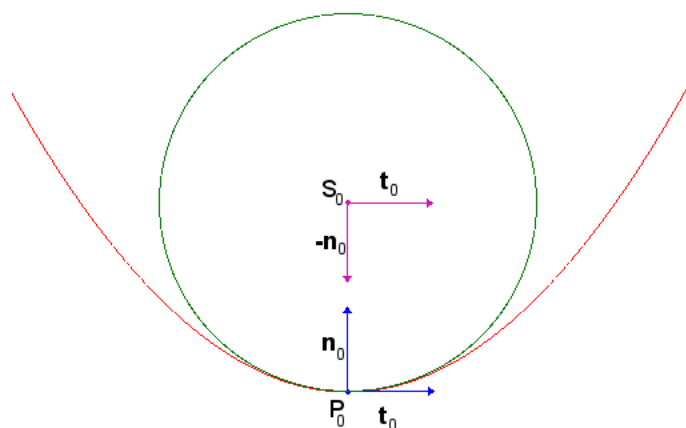
Veta 1.2.1 (Prirodzená parametrizácia oskulačnej kružnice krivky, [BAK11b]):
Nech $P_1(s)$ je krivka daná prirodzenou parametrizáciou. Potom oskulačnú kružnicu danú k tejto krivke v bode $P_1(s_0)$ vieme v prirodzenej parametrizácii vyjadriť takto:

$$P_2(s) = S(s_0) - \left(r_0 \cos \frac{s}{r_0} \right) \mathbf{n}(s_0) + \left(r_0 \sin \frac{s}{r_0} \right) \mathbf{t}(s_0),$$

kde $S(s_0) = P_1(s_0) + \frac{1}{k(s_0)} \mathbf{n}_0$ je stred oskulačnej kružnice, $r_0 = \frac{1}{k(s_0)}$ je jej polomer, $\mathbf{t}(s_0)$ je jednotkový dotykový vektor krivky $P_1(s)$ v bode $P_1(s_0)$ a $\mathbf{n}(s_0)$ je jednotkový normálový vektor krivky $P_1(s)$ v bode $P_1(s_0)$. Spoločný bod oboch kriviek je $P_1(s_0) = P_2(0)$.

Dôkaz. Majme danú krivku a k nej zostrojenú oskulačnú kružnicu v bode $P_1(s_0)$. Majme v tomto bode daný jednotkový dotykový vektor krivky $\mathbf{t}(s_0)$ a jednotkový normálový vektor krivky $\mathbf{n}(s_0)$. Uvažujme súradnicovú sústavu umiestnenú do stredu oskulačnej kružnice takú, že jej súradnicové osi budú na seba kolmé a druhá z nich bude prechádzať spoločným bodom krivky a kružnice, čiže bodom

$P_1(s_0) = P_2(0)$. Keďže o strede osculačnej kružnice vieme, že leží na normále krivky v spoločnom bode, je jasné, že prvý súradnicový vektor zvolenej súradnicovej sústavy je vektor $-\mathbf{n}(s_0)$. Z toho vyplýva, že druhý súradnicový vektor uvažovanej sústavy súradníc je $\mathbf{t}(s_0)$ a teda osculačnú kružnicu vieme pomocou prirodzenej parametrizácie napísať ako $P_2(s) = S(s_0) - \left(r_0 \cos \frac{s}{r_0}\right) \mathbf{n}(s_0) + \left(r_0 \sin \frac{s}{r_0}\right) \mathbf{t}(s_0)$. \square



Obr. 1.2: Parametrizácia osculačnej kružnice vo zvolenej súradnicovej sústave

Poznámka: Kvôli prehľadnosti zápisov v nasledujúcom texte budeme parameter s zo zápisov vynechávať a ak budeme uvažovať o parametri s_0 , použijeme miesto neho jednoducho index 0, napríklad miesto $P(s_0)$ budeme písať P_0 , miesto $\mathbf{n}(s_0)$ napíšeme \mathbf{n}_0 , a pod.

Z definície styku dvoch kriviek vidíme, že rád styku závisí od derivácií vyšších rádov oboch kriviek. Pretože budeme pracovať s týmito deriváciami, nasledujúce vety budú hovoriť o tom, ako vyzerajú derivácie rádu n krivky P_1 a osculačnej kružnice P_2 daných prirodzenou parametrizáciou.

Veta 1.2.2 (Derivácie n -tého rádu prirodzenej parametrizácie osculačnej kružnice, [BAK11b]):

Nech $P_2(s) = S_0 - \left(r_0 \cos \frac{s}{r_0}\right) \mathbf{n}_0 + \left(r_0 \sin \frac{s}{r_0}\right) \mathbf{t}_0$ je osculačná kružnica ku krivke P_1

vyjadrená v prirodzenej parametrizácii, kde S_0 je jej stred, r_0 je jej polomer, \mathbf{t}_0 a \mathbf{n}_0 sú jednotkový dotykový a normálový vektor krivky P_1 v ich spoločnom bode. Potom pre derivácie n -tého rádu prirodzenej parametrizácie tejto krivky platí:

1. ak n je nepárne, tak

$$P_2^{(n)}(s) = (-1)^{\frac{n+3}{2}} \frac{\mathbf{n}_0}{r_0^{n-1}} \sin \frac{s}{r_0} + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\mathbf{t}_0}{r_0^{n-1}} \cos \frac{s}{r_0}, \quad n \geq 1$$

2. ak n je párne, tak

$$P_2^{(n)}(s) = (-1)^{\frac{n}{2}+1} \frac{\mathbf{n}_0}{r_0^{n-1}} \cos \frac{s}{r_0} + (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{\mathbf{t}_0}{r_0^{n-1}} \sin \frac{s}{r_0}, \quad n \geq 2$$

Dôkaz. Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou.

1. Ukážeme, že veta platí pre $n = 1$ a $n = 2$. Pre parametrické vyjadrenie osculačnej kružnice platí: $P_2(s) = S_0 - \left(r_0 \cos \frac{s}{r_0}\right) \mathbf{n}_0 + \left(r_0 \sin \frac{s}{r_0}\right) \mathbf{t}_0$. Derivovaním tohto vzťahu dostávame:

$$P_2^{(1)}(s) = -r_0 \left(-\sin \frac{s}{r_0}\right) \frac{1}{r_0} \mathbf{n}_0 + r_0 \left(\cos \frac{s}{r_0}\right) \frac{1}{r_0} \mathbf{t}_0 = \mathbf{n}_0 \sin \frac{s}{r_0} + \mathbf{t}_0 \cos \frac{s}{r_0}$$

Vzťah pre $n = 1$ naozaj platí. Následným derivovaním ukážeme platnosť aj pre $n = 2$.

$$P_2^{(2)}(s) = \mathbf{n}_0 \left(\cos \frac{s}{r_0}\right) \frac{1}{r_0} + \mathbf{t}_0 \left(-\sin \frac{s}{r_0}\right) \frac{1}{r_0} = \frac{\mathbf{n}_0}{r_0} \cos \frac{s}{r_0} - \frac{\mathbf{t}_0}{r_0} \sin \frac{s}{r_0}$$

2. Nech platí vzťah pre výpočet derivácie $n - 1$ -ého rádu prirodzenej parametrizácie osculačnej kružnice, ak $n - 1$ je nepárne. Ukážeme, že potom platí aj vzťah na výpočet n -tej derivácie párneho rádu.

Vyjadrením derivácie $n - 1$ -ého rádu pre $n - 1$ nepárne a následným derivovaním dostávame:

$$P_2^{(n-1)}(s) = (-1)^{\frac{n+2}{2}} \frac{\mathbf{n}_0}{r_0^{n-2}} \sin \frac{s}{r_0} + (-1)^{\frac{n-2}{2}} \frac{\mathbf{t}_0}{r_0^{n-2}} \cos \frac{s}{r_0}$$

$$\begin{aligned} P_2^{(n)}(s) &= (-1)^{\frac{n+2}{2}} \frac{\mathbf{n}_0}{r_0^{n-2}} \left(\cos \frac{s}{r_0} \right) \frac{1}{r_0} + (-1)^{\frac{n-2}{2}} \frac{\mathbf{t}_0}{r_0^{n-2}} \left(-\sin \frac{s}{r_0} \right) \frac{1}{r_0} \\ &= (-1)^{\frac{n}{2}+1} \frac{\mathbf{n}_0}{r_0^{n-1}} \left(\cos \frac{s}{r_0} \right) + (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{\mathbf{t}_0}{r_0^{n-1}} \left(\sin \frac{s}{r_0} \right), \quad n \geq 2 \end{aligned}$$

Tým je vzťah pre n párne dokázaný.

3. Vzťah pre výpočet derivácie nepárneho rádu prirodzenej parametrizácie oskulačnej kružnice sa ukáže podobne ako pre n párne. \square

Veta 1.2.3 ([BAK11b]):

Majme danú krivku P_1 vyjadrenú v prirodzenej parametrizácii. Potom pre prvé štyri derivácie tejto krivky platí:

1. $P_1^{(1)} = \mathbf{t}$
2. $P_1^{(2)} = k\mathbf{n}$
3. $P_1^{(3)} = k^{(1)}\mathbf{n} - k^2\mathbf{t}$
4. $P_1^{(4)} = \mathbf{n}(k^{(2)} - k^3) + \mathbf{t}(-3kk^{(1)})$

Dôkaz. Keďže krivku P_1 máme vyjadrenú prirodzenou parametrizáciou, je jasné, že pre jej prvú a druhú deriváciu platí: $P_1^{(1)} = \mathbf{t}$ a $P_1^{(2)} = k\mathbf{n}$. Na základe toho ukážeme, že vzťah platí pre $n = 3$ a pre $n = 4$.

Priamym derivovaním druhej derivácie danej krivky dostávame:

$$P_1^{(3)} = k^{(1)}\mathbf{n} - k^2\mathbf{t}$$

Ďalším derivovaním dostávame:

$$\begin{aligned} P_1^{(4)} &= k^{(2)}\mathbf{n} + k^{(1)}(-k\mathbf{t}) - k^2(k\mathbf{t}) - 2kk^{(1)}\mathbf{t} \\ &= \mathbf{n}(k^{(2)} - k^3) + \mathbf{t}(-3kk^{(1)}) \end{aligned}$$

\square

Veta 1.2.4 (Derivácie n -tého rádu krivky danej prirodzenou parametrizáciou, [BAK11b]):

Majme danú krivku P_1 vyjadrenú v prirodzenej parametrizácii. Potom pre derivácie n -tého rádu tejto krivky platí:

1. ak n je nepárne, tak

$$P_1^{(n)} = \mathbf{n} \left(k^{(n-2)} + a_n(k, \dots, k^{(n-4)}) \right) + \mathbf{t} \left((-1)^{\frac{n+3}{2}} k^{n-1} + b_n(k, \dots, k^{(n-3)}) \right), n \geq 5$$

2. ak n je párne, tak

$$P_1^{(n)} = \mathbf{n} \left((-1)^{\frac{n}{2}+1} k^{n-1} + k^{(n-2)} + a_n(k, \dots, k^{(n-4)}) \right) + \mathbf{t} \left(b_n(k, \dots, k^{(n-3)}) \right), n \geq 6$$

kde k je krivosť krivky a $a_n(k, \dots, k^{(n-4)})$ a $b_n(k, \dots, k^{(n-3)})$ sú funkciu typu $A_{n-4}(k)$ resp. $A_{n-3}(k)$.

Dôkaz. Vetu dokážeme matematickou indukciou.

1. Vzťah z vety 1.2.3 pre výpočet štvrtej derivácie krivky vieme pomocou funkcie typu $A_m(k)$ napísať nasledovne:

$$P_1^{(4)} = \mathbf{n} \left(k^{(2)} - k^3 \right) + \mathbf{t} \left(b_4(k, k^{(1)}) \right), \text{ kde } b_4(k, k^{(1)}) = -3kk^{(1)}$$

Derivovaním tohto vzťahu a aplikovaním vety 1.1.6 dostávame:

$$P_1^{(5)} = \mathbf{n} \left(k^{(3)} + a_5(k, k^{(1)}) \right) + \mathbf{t} \left(k^4 + b_5(k, k^{(1)}, k^{(2)}) \right),$$

kde $a_5(k, k^{(1)}) = -3k^2k^{(1)} + kb_4(k, k^{(1)})$ a $b_5(k, k^{(1)}, k^{(2)}) = -kk^{(2)} + b_4(k, k^{(1)})'$.

Tým je vzťah pre $n = 5$ dokázaný.

Ďalším derivovaním a opätovným použitím Frenetových vzorcov a vety 1.1.6

dostaneme pravidlo pre výpočet šiestej derivácie:

$$P_1^{(6)} = \mathbf{n} (k^5 + k^{(4)} + a_6(k, k^{(1)}, k^{(2)})) \\ + \mathbf{t} (b_6(k, k^{(1)}, k^{(2)}, k^{(3)})),$$

kde $a_6(k, k^{(1)}, k^{(2)}) = a_5(k, k^{(1)})' + kb_5(k, k^{(1)}, k^{(2)})$ a $b_6(k, k^{(1)}, k^{(2)}, k^{(3)}) = -kk^{(3)} - ka_5(k, k^{(1)}) + 4k^3k^{(1)} + b_5(k, k^{(1)}, k^{(2)})'$. Ukázali sme teda, že prvý krok indukcie platí.

2. Nech platí vzťah pre výpočet derivácie $n - 1$ -ého rádu krivky, ak $n - 1$ je nepárne. Ukážeme, že potom platí aj vzťah na výpočet n -tej derivácie párneho rádu.

Vyjadrením derivácie $n - 1$ -ého rádu pre $n - 1$ nepárne a následným derivovaním dostávame:

$$P_1^{(n-1)} = \mathbf{n} (k^{(n-3)} + a_{n-1}(k, \dots, k^{(n-5)})) \\ + \mathbf{t} \left((-1)^{\frac{n+2}{2}} k^{n-2} + b_{n-1}(k, \dots, k^{(n-4)}) \right)$$

$$P_1^{(n)} = (-k\mathbf{t}) (k^{(n-3)} + a_{n-1}(k, \dots, k^{(n-5)})) \\ + \mathbf{n} (k^{(n-2)} + a_{n-1}(k, \dots, k^{(n-5)})') \\ + k\mathbf{n} \left((-1)^{\frac{n+2}{2}} k^{n-2} + b_{n-1}(k, \dots, k^{(n-4)}) \right) \\ + \mathbf{t} \left((-1)^{\frac{n+2}{2}} (n-2)k^{n-3}k^{(1)} + b_{n-1}(k, \dots, k^{(n-4)})' \right) \\ = \mathbf{n}(k^{(n-2)} + a_{n-1}(k, \dots, k^{(n-5)})') \\ + (-1)^{\frac{n+2}{2}} kk^{n-2} + kb_{n-1}(k, \dots, k^{(n-4)}) \\ + \mathbf{t}(-kk^{(n-3)} + (-k)a_{n-1}(k, \dots, k^{(n-5)})) \\ + (-1)^{\frac{n+2}{2}} (n-2)k^{n-3}k^{(1)} + b_{n-1}(k, \dots, k^{(n-4)})'$$

Použitím vzťahov pre počítanie s funkciami typu $A_m(k)$ z vety 1.1.6, vyjadrenie n -tej derivácie bude mať nasledovný tvar:

$$P_1^{(n)} = \mathbf{n} \left((-1)^{\frac{n}{2}} k^{n-1} + k^{(n-2)} + a_n(k, \dots, k^{(n-4)}) \right) \\ + \mathbf{t} \left(b_n(k, \dots, k^{(n-3)}) \right), n \geq 6,$$

kde $a_n(k, \dots, k^{(n-4)}) = a_{n-1}(k, \dots, k^{(n-4)})' + kb_{n-1}(k, \dots, k^{(n-4)})$ a $b_n(k, \dots, k^{(n-3)}) = -kk^{(n-3)} + (-k)a_{n-1}(k, \dots, k^{(n-5)}) + (-1)^{\frac{n+2}{2}}(n-2)k^{n-3}k^{(1)} + b_{n-1}(k, \dots, k^{(n-4)})'$. Tým je vzťah pre n párne dokázaný.

3. Vzťah pre výpočet n -tej derivácie párneho rádu sa ukáže podobne ako pre n nepárne.

□

Vety hovoriace o vyjadrení derivácie n -tého rádu krivky a oskulačnej kružnice nám v ďalších častiach práce výrazne pomôžu a uľahčia prácu.

1.2.2 Styk krivky a oskulačnej kružnice vo všeobecnom bode a v obyčajnom vrchole

V tejto kapitole vyslovíme a dokážeme tvrdenia hovoriace o ráde styku oskulačnej kružnice a krivky v spoločnom bode, ktorý je všeobecným bodom alebo obyčajným vrcholom krivky. Následne na základe dokázaných tvrdení vyslovíme hypotézu, ktorú budeme neskôr overovať.

Keďže pri práci so stykom dvoch kriviek skúmame styk v nejakom spoločnom bode týchto kriviek, teda v bode $P_1(s_0) = P_2(0)$, pre jednoduchosť ďalších výpočtov položíme parameter $s_0 = 0$. Substitúciou $s = u - s_0$ vieme potom ďalšie tvrdenia zovšeobecniť, platia teda pre ľubovoľný parameter s_0 .

V dôkazoch viet o ráde styku krivky s oskulačnou kružnicou budeme vždy predpokladať, že krivka je vyjadrená v prirodzenej parametrizácii $P_1(s)$ a že bod styku

je bod $P_1(0)$. Oskulačnú kružnicu v bode $P(0)$ budeme vyjadrovať prirodzenou parametrizáciou $P_2(s)$ z vety 1.2.1.

Veta 1.2.5 (Styk krivky a osculačnej kružnice vo všeobecnom bode, [BAK11b]):
Krivka má s osculačnou kružnicou v ľubovoľnom spoločnom bode styk rádu aspoň 2. Navyše, ak ich spoločný bod je všeobecným bodom krivky, tak rád ich styku je práve 2.

Dôkaz. Chceme ukázať, že krivka a osculačná kružnica majú v ľubovoľnom spoločnom bode styk rádu aspoň 2. To znamená, že prvé a druhé derivácie prirodzených parametrizácií týchto kriviek sa v spoločnom bode $P_1(0) = P_2(0)$ rovnajú. Z viet 1.2.3 a 1.2.2 vieme, že prvá derivácia prirodzenej parametrizácie osculačnej kružnice a krivky vyzerajú nasledovne:

$$P_1^{(1)} = \mathbf{t}$$
$$P_2^{(1)} = \mathbf{n}_0 \sin \frac{s}{r_0} + \mathbf{t}_0 \cos \frac{s}{r_0}$$

Dosadením $s = 0$ do týchto derivácií dostaneme:

$$P_1^{(1)}(0) = \mathbf{t}_0 = P_2^{(1)}(0)$$

Takisto z viet 1.2.3 a 1.2.2 vieme, že druhá derivácia prirodzenej parametrizácie osculačnej kružnice a krivky vyzerajú nasledovne:

$$P_1^{(2)} = k\mathbf{n}$$
$$P_2^{(2)} = \frac{\mathbf{n}_0}{r_0} \cos \frac{s}{r_0} - \frac{\mathbf{t}_0}{r_0} \sin \frac{s}{r_0}$$

Dosadením $s = 0$ do týchto derivácií dostaneme:

$$P_1^{(2)}(0) = k_0\mathbf{n}_0$$
$$P_2^{(2)}(0) = \frac{\mathbf{n}_0}{r_0} = k_0\mathbf{n}_0,$$

pretože $\frac{1}{r_0} = k_0$.

V ľubovoľnom spoločnom bode majú teda krivka a osculačná kružnica styk rádu aspoň 2.

Nech teraz spoločný bod $P_1(0) = P_2(0)$ je všeobecným bodom krivky P_1 . Porovnajme tretie derivácie prirodzených parametrizácií oboch kriviek v tomto bode.

Pre tretiu deriváciu krivky podľa vety 1.2.3 platí:

$$P_1^{(3)} = k^{(1)}\mathbf{n} - k^2\mathbf{t}$$

O bode, ktorý nie je vrcholom krivky, vieme, že $k_0^{(1)} \neq 0$, preto tretia derivácia krivky v bode $P_1(0)$ je vyjadrená ako $P_1^{(3)}(0) = k_0^{(1)}\mathbf{n}_0 - k_0^2\mathbf{t}_0 \neq -k_0^2\mathbf{t}_0$.

Pre tretiu deriváciu prirodzenej parametrizácie osculačnej kružnice platí:

$$P_2^{(3)} = -\frac{\mathbf{n}_0}{r_0^2} \sin \frac{s}{r_0} - \frac{\mathbf{t}_0}{r_0^2} \cos \frac{s}{r_0}$$

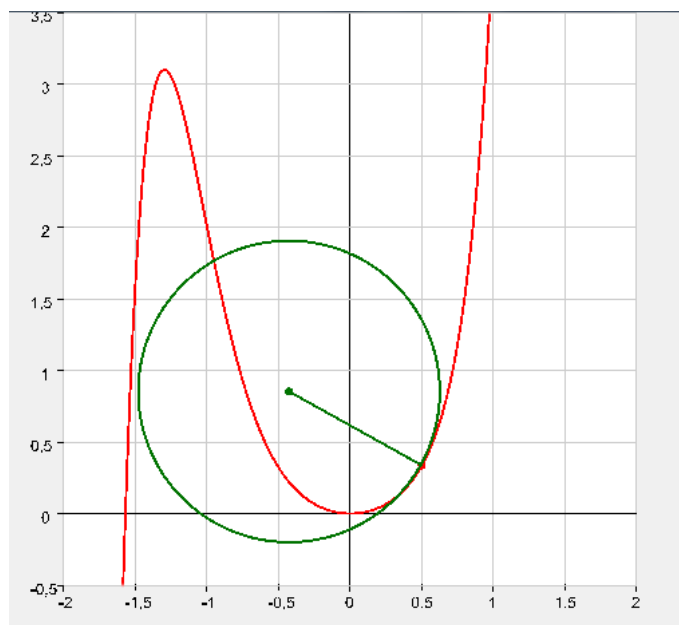
Tretia derivácia prirodzenej parametrizácie osculačnej kružnice v spoločnom bode je teda vyjadrená ako $-\frac{\mathbf{t}_0}{r_0^2} = -k_0^2\mathbf{t}_0$. Teraz je už jasné, že sa tieto derivácie nerovnajú, a preto krivka a osculačná kružnica majú vo všeobecnom bode, ktorý nie je vrcholom, styk rádu práve 2.

□

Veta 1.2.6 (Styk krivky a osculačnej kružnice v obyčajnom vrchole, [BAK11b]):
Krivka a osculačná kružnica krivky majú v spoločnom vrchole styk rádu aspoň 3. Navyše, ak ich spoločný bod je obyčajným vrcholom krivky, tak rád ich styku je práve 3.

Dôkaz. Chceme ukázať, že krivka a osculačná kružnica majú v spoločnom vrchole styk rádu aspoň 3. To znamená, že derivácie prirodzených parametrizácií týchto kriviek až do rádu 3 sa v spoločnom bode $P_1(0) = P_2(0)$ rovnajú. Z predchádzajúcej vety vieme, že prvé a druhé derivácie prirodzených parametrizácií týchto kriviek sa rovnajú v ľubovoľnom spoločnom bode. Stačí teda uvažovať o ich tretej derivácii.

Z dôkazu predchádzajúcej vety vieme aj to, že $P_2^{(3)}(0) = -k_0^2\mathbf{t}_0$ a $P_1^{(3)}(0) = k_0^{(1)}\mathbf{n}_0 - k_0^2\mathbf{t}_0$. Keďže pre vrchol krivky platí, že $k_0^{(1)} = 0$, tak



Obr. 1.3: Oskulačná kružnica krivky vo všeobecnom bode, krivka a osculačná kružnica majú v spoločnom bode styk rádu práve 2

$P_1^{(3)}(0) = -k_0^2 \mathbf{t}_0$ a tým je rovnosť tretích derivácií dokázaná. V spoločnom vrchole majú teda krivka a osculačná kružnica styk rádu aspoň 3.

Nech teraz spoločný bod $P_1(0) = P_2(0)$ je obyčajným vrcholom, teda vrcholom práve prvého rádu krivky P_1 . Porovnajme derivácie rádu 4 oboch kriviek v tomto bode.

Pre štvrtú deriváciu krivky podľa vety 1.2.3 platí:

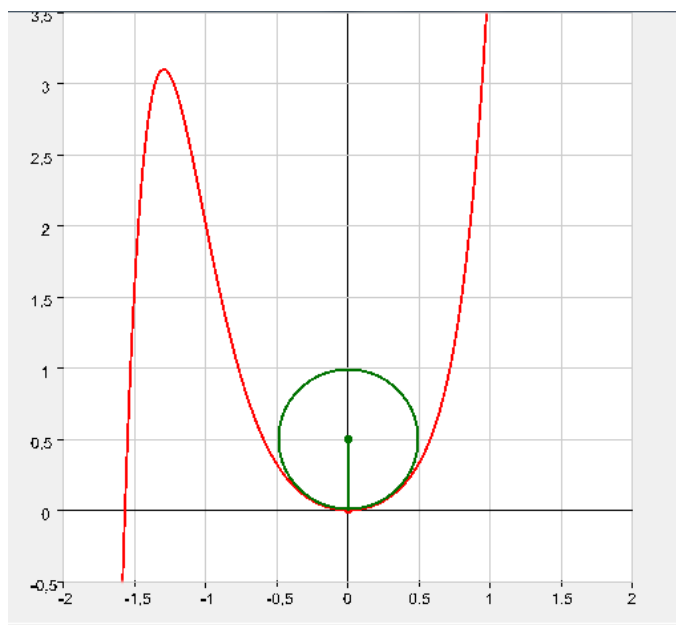
$$P_1^{(4)} = \mathbf{n}(k^{(2)} - k^3) + \mathbf{t}(-3kk^{(1)})$$

O bode, ktorý je vrcholom rádu práve 1, vieme, že $k_0^{(1)} = 0$ a $k_0^{(2)} \neq 0$, preto štvrtá derivácia krivky v bode $P_1(0)$ je vyjadrená ako $P_1^{(4)}(0) = \mathbf{n}_0(k_0^{(2)} - k_0^3) \neq -k_0^3 \mathbf{n}_0$.

Pre štvrtú deriváciu prirodzenej parametrizácie osculačnej kružnice platí:

$$P_2^{(4)} = -\frac{\mathbf{n}_0}{r_0^3} \cos \frac{s}{r_0} + \frac{\mathbf{t}_0}{r_0^3} \sin \frac{s}{r_0}$$

Táto derivácia prirodzenej parametrizácie osculačnej kružnice v spoločnom bode je teda vyjadrená ako $-\frac{\mathbf{n}_0}{r_0^3} = -k_0^3 \mathbf{n}_0$. Teraz je už jasné, že sa tieto derivácie nerovnajú a preto krivka a osculačná kružnica majú vo vrchole rádu práve 1 styk rádu práve 3. □



Obr. 1.4: Oskulačná kružnica krivky v obyčajnom vrchole, krivka a osculačná kružnica majú v spoločnom bode styk rádu práve 3

1.2.3 Styk krivky a osculačnej kružnice vo vrchole vyššieho rádu

Z tvrdení dokázaných v predchádzajúcej podkapitole sa dá očakávať, že rád styku krivky a osculačnej kružnice v spoločnom bode súvisí s tým, aké vlastnosti má spoločný bod týchto kriviek. Ak by sme všeobecný bod krivky považovali za vrchol nultého rádu krivky, tak rád styku týchto kriviek je práve o 2 vyšší. To isté platí aj pre vrchol prvého rádu krivky.

Prirodzene sa preto vyslovuje hypotéza, že krivka a osculačná kružnica majú vo vrchole rádu l styk rádu práve $l + 2$. Túto hypotézu v tejto podkapitole vyslovíme vo forme vety a následne ju dokážeme. Predtým si však sformulujeme pomocné tvrdenia, ktoré nám zjednodušia neskoršiu prácu.

Veta 1.2.7 ([BAK11b]):

Pre deriváciu n -tého rádu prirodzenej parametrizácie osculačnej kružnice v bode $s = 0$ platí:

1. ak n je nepárne, tak

$$P_2^{(n)}(0) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\mathbf{t}_0}{r_0^{n-1}} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} k_0^{n-1} \mathbf{t}_0, n \geq 1$$

2. ak n je párne, tak

$$P_2^{(n)}(0) = (-1)^{\frac{n}{2}+1} \frac{\mathbf{n}_0}{r_0^{n-1}} = (-1)^{\frac{n}{2}+1} k_0^{n-1} \mathbf{n}_0, n \geq 2$$

Dôkaz. Táto veta je priamym dôsledkom vety 1.2.2. Dosadením za $s = 0$ do týchto vzťahov dostaneme priamo tvrdenie vety. \square

Veta 1.2.8 (Derivácia krivky vo vrchole rádu l , [BAK11b]):

Majme danú krivku P_1 vyjadrenú v prirodzenej parametrizácii a nech v bode $s = 0$ má táto krivky vrchol rádu l . Potom pre deriváciu rádu $l + 2$ tejto krivky platí:

1. ak $l + 2$ je nepárne, tak

$$P_1^{(l+2)}(0) = (-1)^{\frac{l+1}{2}} k_0^{l+1} \mathbf{t}_0, l \geq 3$$

2. ak $l + 2$ je párne, tak

$$P_1^{(l+2)}(0) = (-1)^{\frac{l+2}{2}+1} k_0^{l+1} \mathbf{n}_0, l \geq 4$$

Dôkaz. Vieme, že pre vrchol rádu l v bode $s = 0$ platí: $k_0^{(1)} = \dots = k_0^{(l)} = 0$. Z vety 1.2.4 máme, že pre deriváciu krivky rádu $l + 2$ po dosadení bodu $s = 0$ platí:

1. ak $l + 2$ je nepárne, tak

$$P_1^{(l+2)}(0) = \mathbf{n}_0 \left(k_0^{(l)} + a_n(k_0, \dots, k_0^{(l-2)}) \right) + \mathbf{t}_0 \left((-1)^{\frac{l+5}{2}} k_0^{l+1} + b_n(k_0, \dots, k_0^{(l-1)}) \right), l \geq 3$$

2. ak $l + 2$ je párne, tak

$$P_1^{(l+2)}(0) = \mathbf{n}_0 \left((-1)^{\frac{l+2}{2}+1} k_0^{l+1} + k_0^{(l)} + a_n(k_0, \dots, k_0^{(l-2)}) \right) + \mathbf{t}_0 \left(b_n(k_0, \dots, k_0^{(l-1)}) \right), l \geq 4$$

Keďže krivka má v bode $s = 0$ vrchol rádu l , z jeho definície vyplýva, že $a_n(k_0, \dots, k_0^{(l-2)}) = 0$ a $b_n(k_0, \dots, k_0^{(l-1)}) = 0$. Preto predchádzajúce vzťahy budú mať tvar:

1. ak $l + 2$ je nepárne, tak

$$P_1^{(l+2)}(0) = \mathbf{n}_0 \left(k_0^{(l)} \right) + \mathbf{t}_0 \left((-1)^{\frac{l+5}{2}} k_0^{l+1} \right), l \geq 3$$

2. ak $l + 2$ je párne, tak

$$P_1^{(l+2)}(0) = \mathbf{n}_0 \left((-1)^{\frac{l+2}{2}+1} k_0^{l+1} + k_0^{(l)} \right), l \geq 4$$

Pre vrchol rádu l je aj $k_0^{(l)} = 0$, preto platí:

1. ak $l + 2$ je nepárne, tak

$$P_1^{(l+2)}(0) = (-1)^{\frac{l+1}{2}} k_0^{l+1} \mathbf{t}_0, l \geq 3$$

2. ak $l + 2$ je párne, tak

$$P_1^{(l+2)}(0) = (-1)^{\frac{l+2}{2}+1} k_0^{l+1} \mathbf{n}_0, l \geq 4$$

Tým je veta dokázaná. □

Veta 1.2.9 ([BAK11b]):

Majme danú krivku P_1 vyjadrenú v prirodzenej parametrizácii a nech v bode $s = 0$ má táto krivky vrchol rádu práve l . Potom pre deriváciu rádu $l + 3$ tejto krivky v bode $s = 0$ neplatia vzťahy vyjadrené vo vete 1.2.8.

Dôkaz. Vieme, že pre vrchol krivky rádu práve l v bode $s = 0$ platí: $k_0^{(1)} = \dots = k_0^{(l)} = 0$ a $k_0^{(l+1)} \neq 0$. Z vety 1.2.4 máme, že pre deriváciu krivky rádu $l + 3$ po dosadení bodu $s = 0$ platí:

1. ak $l + 3$ je nepárne, tak

$$P_1^{(l+3)}(0) = \mathbf{n}_0 \left(k_0^{(l+1)} + a_n(k_0, \dots, k_0^{(l-1)}) \right) + \mathbf{t}_0 \left((-1)^{\frac{l+6}{2}} k_0^{l+2} + b_n(k_0, \dots, k_0^{(l)}) \right), l \geq 2$$

2. ak $l + 3$ je párne, tak

$$P_1^{(l+3)}(0) = \mathbf{n}_0 \left((-1)^{\frac{l+3}{2}+1} k_0^{l+2} + k_0^{(l+1)} + a_n(k_0, \dots, k_0^{(l-1)}) \right) \\ + \mathbf{t}_0 \left(b_n(k_0, \dots, k_0^{(l)}) \right), l \geq 3$$

Keďže krivka má v bode $s = 0$ vrchol rádu práve l , z jeho definície vyplýva, že $a_n(k_0, \dots, k_0^{(l-1)}) = 0$ a $b_n(k_0, \dots, k_0^{(l)}) = 0$. Preto predchádzajúce vzťahy budú mať tvar:

1. ak $l + 3$ je nepárne, tak

$$P_1^{(l+3)}(0) = \mathbf{n}_0 \left(k_0^{(l+1)} \right) + \mathbf{t}_0 \left((-1)^{\frac{l+6}{2}} k_0^{l+2} \right), l \geq 2$$

2. ak $l + 3$ je párne, tak

$$P_1^{(l+3)}(0) = \mathbf{n}_0 \left((-1)^{\frac{l+3}{2}+1} k_0^{l+2} + k_0^{(l+1)} \right), l \geq 3$$

Pre vrchol rádu práve l je $k_0^{(l+1)} \neq 0$, preto sa tieto vzťahy nerovnajú vzťahom uvedeným vo vete 1.2.8. □

Teraz už môžeme vysloviť a veľmi pohodlne dokázať vetu, ktorá hovorí o vzájomnom vzťahu rádu derivácií krivky a jej osculačnej kružnice a rádu vrchola, v ktorom majú krivka a osculačná kružnica spoločný bod.

Veta 1.2.10 (Rád styku osculačnej kružnice a krivky vo vrchole vyššieho rádu, [BAK11b]):

Majme danú krivku P_1 a k nej zostrojenú osculačnú kružnicu P_2 a nech spoločný bod týchto kriviek je vrcholom rádu aspoň l , potom krivka a osculačná kružnica majú v tomto bode styk rádu aspoň $l + 2$.

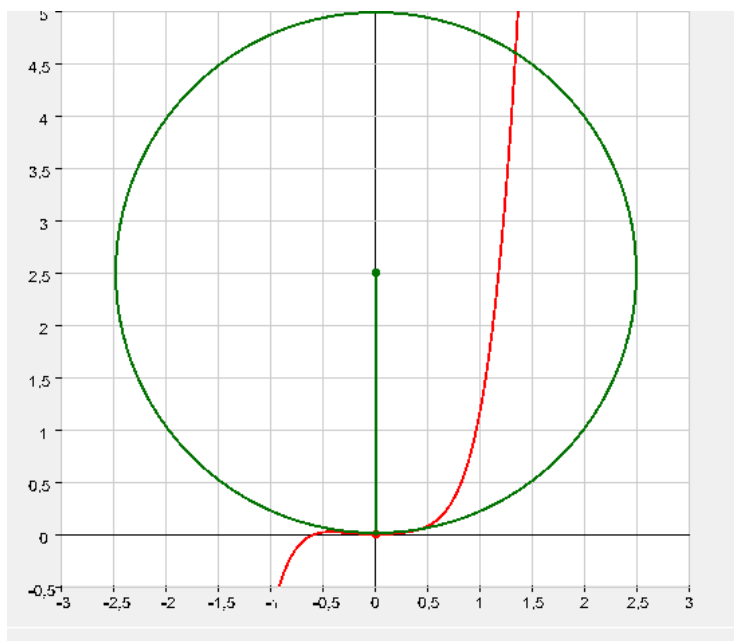
Navyše, ak spoločný bod týchto kriviek je vrcholom rádu práve l , potom krivka a osculačná kružnica majú v tomto bode styk rádu práve $l + 2$.

Dôkaz. Pre dôkaz prvej časti tejto vety stačí ukázať, že v spoločnom bode, ktorý je vrcholom rádu l , sa budú rovnať všetky derivácie prirodzenej parametrizácie krivky

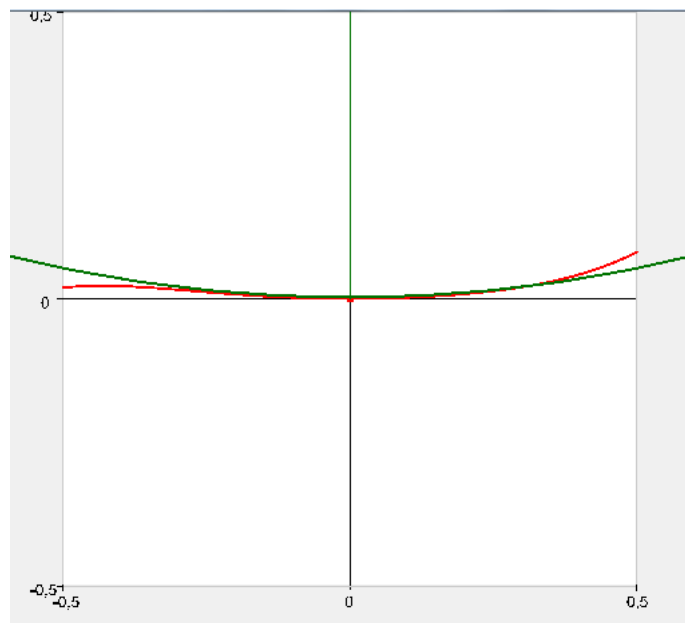
a osculačnej kružnice až po rád $l+2$. Rovnosť týchto derivácií vyplýva priamo z viet 1.2.7 a 1.2.8, pretože vrchol rádu l je aj vrcholom rádu $l-1$.

Pre dôkaz druhej časti vety je treba teda už len ukázať, že v spoločnom bode, ktorý je vrcholom rádu práve l , sa derivácia prirodzenej parametrizácie krivky a osculačnej kružnice rádu $l+3$ nebudú rovnať. To však vyplýva priamo z viet 1.2.7 a 1.2.9. Tým je veta dokázaná. \square

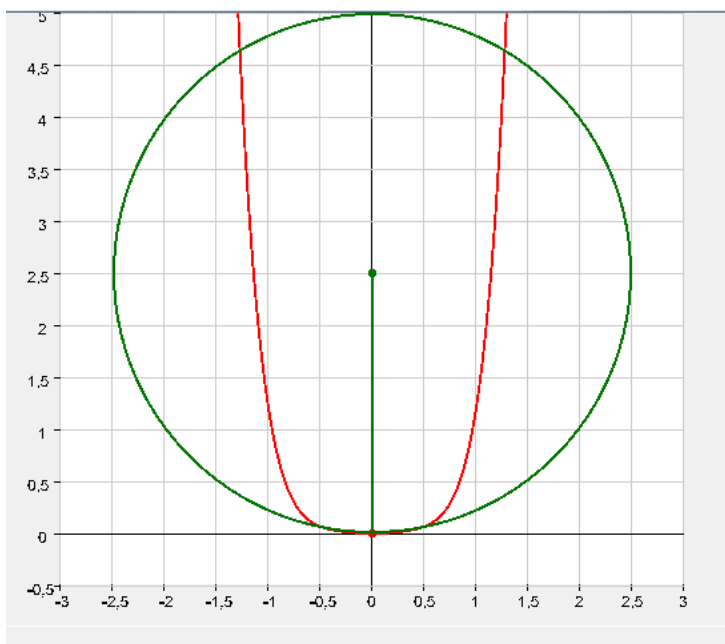
Predchádzajúca veta hovorí to, že čím bude mať spoločný vrchol osculačnej kružnice a krivky vyšší rád, tým budú osculačná kružnica a krivka k sebe v okolí tohto bodu tesnejšie priložené. Tento vzájomný vzťah krivky a osculačnej kružnice ilustrujú nasledujúce obrázky.



Obr. 1.5: Osculačná kružnica krivky danej predpisom $f(x) = x^5 + 0,08x^4 + 0,2x^2$ vo vrchole druhého rádu pre $x = 0$



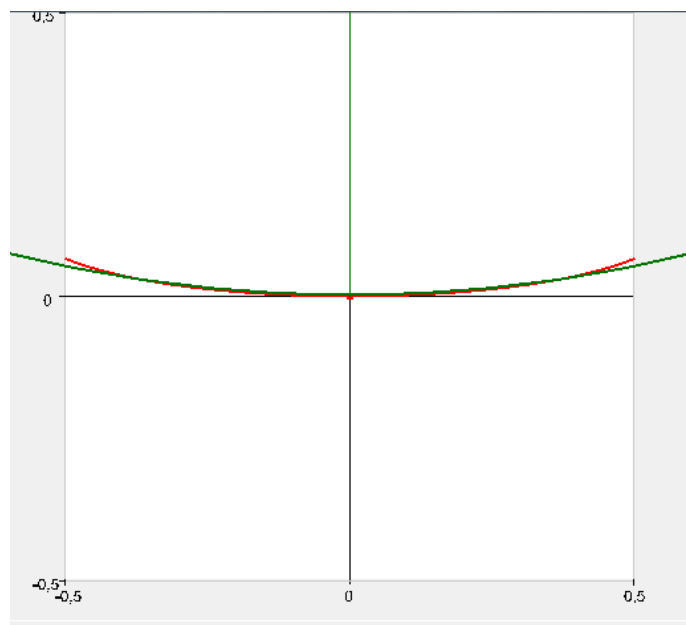
Obr. 1.6: Detail oskulačnej kružnice krivky vo vrchole druhého rádu, krivka a oskulačná kružnica majú v spoločnom bode styk rádu 4



Obr. 1.7: Oskulačná kružnica krivky danej predpisom $f(x) = x^6 + 0,08x^4 + 0,2x^2$ vo vrchole tretieho rádu pre $x = 0$

1.3 Metrické konštrukcie kriviek

V tejto kapitole sa budeme zaoberať krivkami, ktoré vznikajú z pôvodnej krivky metrickými konštrukciami. Poskytneme prehľad a základné vlastnosti niekoľkých



Obr. 1.8: Detail oskulačnej kružnice krivky vo vrchole tretieho rádu, krivka a oskulačná kružnica majú v spoločnom bode styk rádu 5

typov kriviek ležiacich v pseudoeuclidovskej rovine. Dôvod, prečo hovoríme v tejto časti o týchto krivkách je ten, že sa im budeme podrobnejšie venovať v dizertačnej práci. V nej budeme skúmať, ako sa menia ich vlastnosti v pseudoeuclidovskej rovine, kde sa výrazne mení metrika a s ním súvisiace vlastnosti kriviek.

1.3.1 Evolúta krivky v euklidovskej rovine

Uvažujme parametricky vyjadrenú krivku bez inflexných bodov. Každá takáto krivka má v každom svojom bode definovanú oskulačnú kružnicu. Stredy všetkých oskulačných kružníc krivky tvoria evolútu krivky. Prirodzene vzniká nasledujúca definícia:

Definícia 1.3.1 ([BO10]):

Evolúta krivky bez jej inflexných bodov je definovaná ako krivka daná predpisom

$$E(t) = P(t) + \frac{1}{k(t)}\mathbf{n}(t).$$

Poznámka: Evolútu krivky vieme v súradniciach vyjadriť vzťahmi (1.4) a (1.5).

Je omnoho ľahšie použiť tieto vzťahy na výpočet evolúty krivky, ako samotnú definíciu evolúty.

Uvažujme krivku zadanú prirodzenou parametrizáciou. Použitím Frenetových vzorcov sa ukáže, že pre prvé tri derivácie evolúty platí:

$$E'(s) = r'(s)\mathbf{n}(s) \quad (1.6)$$

$$E''(s) = r''(s)\mathbf{n}(s) + r'(s)k(s)\mathbf{t}(s) \quad (1.7)$$

$$E'''(s) = (2r''(s)k(s) + r'(s)k'(s))\mathbf{t}(s) + (r'''(s) + r'(s)k^2(s))\mathbf{n}(s) \quad (1.8)$$

Veta 1.3.1 ([BO10]):

Nech $P(s)$ je krivka daná parametricky a nech $E(s)$ je jej evolúta.

1. Bod $E(s_0)$ evolúty je regulárny práve vtedy, ak bod krivky $P(s_0)$ nie je vrcholom danej krivky.
2. Ak je bod $P(s_0)$ krivky obyčajným vrcholom, tak bod $E(s_0)$ evolúty je bodom vratu prvého druhu.

Dôkaz. 1. Tvrdenie vyplýva priamo z (1.6).

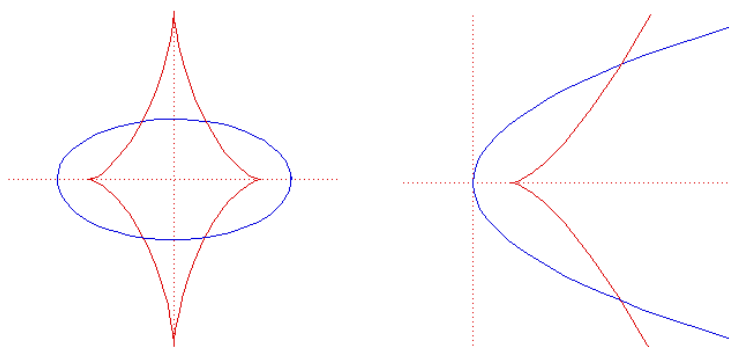
2. Z prvého tvrdenia vyplýva, že ak $P(s_0)$ je vrcholom krivky, $E(s_0)$ je singularným bodom evolúty. Z (1.7) vyplýva, že $P''(s_0) \neq 0$ a je to bod vratu evolúty. Je zrejmé, že vektory $E''(s_0)$ a $E'''(s_0)$ sú lineárne nezávislé, takže $E(s_0)$ je bodom vratu prvého druhu.

□

Príklad 6: Evolúta kružnice $P(t) = (r \cos t, r \sin t)$, $t \in \langle -\frac{1}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi \rangle$ je degenerovaná jednobodová krivka s konštantnou parametrizáciou $E(t) = (0, 0)$.

Príklad 7: Evolúta elipsy $P(t) = (a \cos t, b \sin t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ je vyjadrená v súradniciach nasledovne: $x(t) = \frac{a^2-b^2}{a} \cos^3 t$, $y(t) = -\frac{a^2-b^2}{b} \sin^3 t$. Je zrejmé, že táto krivka je obrazom astroidy $Q(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ v afinnej transformácii $x^* = \frac{a^2-b^2}{a}x$ a $y^* = -\frac{a^2-b^2}{b}y$.

Príklad 8: Evolúta paraboly $P(t) = (\frac{t^2}{2p}, t)$, $t \in (-\infty, \infty)$ je vyjadrená v súradniciach takto: $x(t) = \frac{3}{2p}t^2 + p$, $y(t) = -\frac{1}{p^2}t^3$. Je zrejmé, že táto krivka je obrazom semikubickej paraboly $Q(t) = (t^2, t^3)$ v afinnej transformácii $x^* = \frac{3}{2p}x + p$ a $y^* = -\frac{1}{p^2}y$.



Obr. 1.9: Evolúta elipsy a paraboly

Zdroj: <http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/history/Curves/Curves.html>

1.3.2 Evolventa krivky v euklidovskej rovine

Definícia 1.3.2 ([BO10]):

Evolventou krivky je každá krivka, ktorá kolmo pretína všetky dotyčnice krivky.

Veta 1.3.2 ([BO10]):

Nech $P(s)$ je parametricky vyjadrená krivka a nech $c \in \mathbf{R}$ je konštanta. Potom evolventu krivky $P(s)$ vieme vyjadriť rovnicou

$$I_c(s) = P(s) + (c - s)P'(s), s \in I, \quad (1.9)$$

pričom tento tvar majú všetky jej evolventy.

Dôkaz. Evolventu krivky získame tak, že v každom bode krivky $P(s)$ nájdeme na dotyčnici taký bod $I_c(s) = P(s) + f(s)P'(s)$, že $I'_c(s) \perp P'(s)$. Derivovaním I_c a

využitím Frenetových vzorcov dostávame, že aby bola splnená uvedená podmienka, musí platiť $((1 + f'(s))\mathbf{t}(s) - f(s)k(s)\mathbf{n}(s)) \mathbf{t}(s) = 0$. Z toho dostávame, že $f'(s) = -1$ a teda $f(s) = c - s$, kde c je integračná konštanta. \square

Poznámka: Každá krivka má nekonečne veľa evolvent vyjadrených vzťahom (1.9), kým evolútu má práve jednu.

Veta 1.3.3 ([BO10]):

Nech $P(s)$, $s \in I$ je prirodzená parametrizácia krivky a nech $c \in \mathbf{R}$. Potom platia nasledujúce tvrdenia:

1. Pre parameter $s \neq c$ je bod $I_c(s)$ regulárny a neinflexný bod evolventy.
2. Ak $c \in I$, tak bod $I_c(c)$ evolventy je bodom vratu prvého druhu.

Dôkaz. Z Frenetových vzorcov vyplýva, že $P'' = k\mathbf{n}$ a $P''' = -k^2\mathbf{t} + k'\mathbf{n}$. Odtiaľ dostávame, že prvé tri derivácie evolventy krivky majú tvar:

$$I'_c(s) = (c - s)P''(s) \tag{1.10}$$

$$I''_c(s) = -P''(s) + (c - s)P'''(s) \tag{1.11}$$

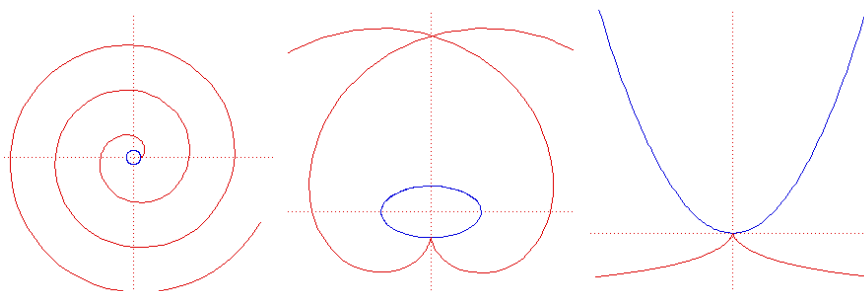
$$I'''_c(s) = -2P'''(s) + (c - s)P^{(4)}(s) \tag{1.12}$$

Odtiaľ priamo vyplývajú tvrdenia vety. \square

Veta 1.3.4 ([BO10]):

Každá krivka, ktorá nemá vrcholy, je evolventou svojej evolúty.

Dôkaz. Stačí si uvedomiť, že dotyčnica evolúty je normálou pôvodnej krivky, preto krivka kolmo pretína dotyčnice svojej evolúty, teda je jej evolventou. \square



Obr. 1.10: Evolventa kružnice, elipsy a paraboly

Zdroj: <http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/history/Curves/Curves.html>

1.3.3 Rovnobežné krivky v euklidovskej rovine

Definícia 1.3.3 (Rovnobežné krivky, [GIB01]):

Nech $P(t)$ je regulárna krivka a nech d je reálne číslo. Rovnobežná krivka $P_d(t)$ ku krivke $P(t)$ vo vzdialenosti d je krivka definovaná takto:

$$P_d(t) = P(t) + d\mathbf{n}(t)$$

V súradniciach vieme rovnobežnú krivku $P_d(t)$ vyjadriť nasledovne:

$$x_d(t) = x(t) - \frac{dy'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}, \quad y_d(t) = y(t) + \frac{dx'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}$$

Veta 1.3.5 ([GIB01]):

Nech $P(t)$ je regulárna krivka a d je nenulové reálne číslo. Potom bod $P_d(t_0)$ je singulárnym bodom rovnobežnej krivky $P_d(t)$ práve vtedy, ak platí: $P_d(t_0) = E(t_0)$.

Dôkaz. Uvažujme krivku $P(t)$ vyjadrenú v prirodzenej parametrizácii. Z Frenetových vzorcov dostávame, že pre prvú deriváciu rovnobežnej krivky $P_d(s)$ prislúchajúcej ku krivke $P(s)$ platí:

$$P'_d(s) = P'(s) + d\mathbf{n}'(s) = P'(s) - dk(s)P'(s) = (1 - dk(s))\mathbf{t}(s)$$

Z toho vyplýva, že bod $P_d(s_0)$ je singulárny práve vtedy, ak $(1 - dk(s_0)) = 0$, čiže ak $k(s_0) = \frac{1}{d}$. Odtiaľ vyplýva tvrdenie vety. \square

Veta 1.3.6 ([MAK11]):

Ak $P(t_0)$ je všeobecný bod regulárnej krivky $P(t)$ a $k(t_0) = \frac{1}{d}$, tak $P_d(t_0)$ je bod vratu prvého druhu rovnobežnej krivky $P_d(t)$.

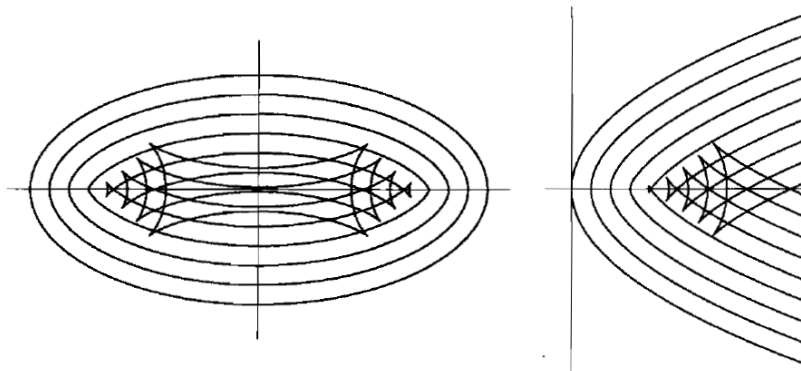
Dôkaz. Z predchádzajúcej vety vyplýva, že ak $P(t_0)$ je všeobecný bod regulárnej krivky $P(t)$ a $k(t_0) = \frac{1}{d}$, tak $P_d(t_0)$ je singulárny bod rovnobežnej krivky $P_d(t)$. Pre druhú a tretiu deriváciu rovnobežnej krivky $P_d(t)$ v parametri t_0 platí:

$$P_d''(t_0) = -dk'(t_0)\mathbf{t}(t_0)$$

$$P_d'''(t_0) = -dk''(t_0)\mathbf{t}(t_0) - 2dk(t_0)k'(t_0)\mathbf{n}(t_0)$$

Keďže $P(t_0)$ je všeobecný bod krivky, $k'(t_0) \neq 0$. Vektory $\mathbf{t}(t_0)$ a $\mathbf{n}(t_0)$ sú lineárne nezávislé, preto lineárne nezávislé sú aj $P_d''(t_0)$ a $P_d'''(t_0)$. Odtiaľ dostávame, že $P_d(t_0)$ je bod vratu prvého druhu rovnobežnej krivky $P_d(t)$.

□



Obr. 1.11: Rovnobežné krivky k elipse a parabole

Zdroj: [GIB01]

1.3.4 Pedálne krivky v euklidovskej rovine

Definícia 1.3.4 (Pedálne krivky, [GIB01]):

Nech $P(t)$ je regulárna krivka a nech Q je bod z roviny. Pre každý parameter t zostrojme kolmý priemet bodu Q na dotyčnicu ku krivke $P(t)$. Z piet kolmíc takejto projekcie vzniká krivka $W(t)$. Nazývame ju pedálna krivka ku krivke $P(t)$ vzhľadom na bod Q . Bod Q nazývame pedálny bod.

Pedálna krivka má nasledovné parametrické vyjadrenie:

$$W(t) = P(t) + \left\{ \frac{(Q - P(t)) \cdot P'(t)}{|P'(t)|^2} \right\} P'(t).$$

Veta 1.3.7 ([GIB01]):

Pedálna krivka má v prirodzenej parametrizácii $P(s)$ základnej krivky tieto alternatívne vyjadrenia:

$$W(s) = P(s) + \{(Q - P(s)) \cdot \mathbf{t}(s)\} \mathbf{t}(s)$$

alebo

$$W(s) = Q - \{(Q - P(s)) \cdot \mathbf{n}(s)\} \mathbf{n}(s).$$

Dôkaz. Tvrdenie vety vyplýva priamo z vlastností prirodzenej parametrizácie. \square

Veta 1.3.8 ([GIB01]):

Nech $P(t)$ je regulárna krivka a $W(t)$ je jej pedálna krivka vzhľadom na bod Q neležiaci na krivke $P(t)$. Potom bod krivky $W(t_0)$ je singulárny práve vtedy, keď je bod $P(t_0)$ krivky $P(t)$ inflexný.

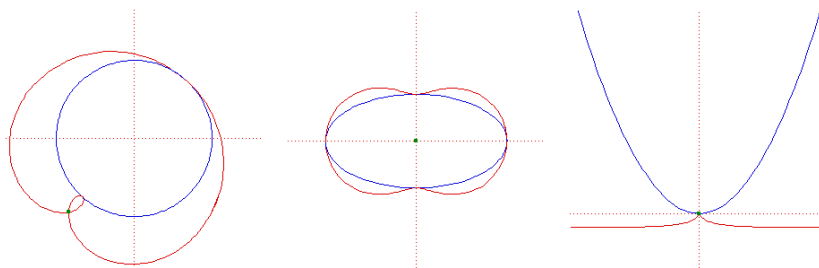
Dôkaz. Keďže $P(t)$ je regulárna krivka, vieme ju vyjadriť v prirodzenej parametrizácii. Predpokladajme, že je tak daná a že bod Q má súradnice $Q = (0, 0)$. Potom pedálna krivka má nasledovné vyjadrenie:

$$W(s) = Q - \{(Q - P(s)) \cdot \mathbf{n}(s)\} \mathbf{n}(s).$$

Derivovaním tohto vzťahu a použitím Frenetových vzorcov dostávame:

$$W'(s) = -k(s) \{((Q - P(s)) \cdot \mathbf{t}(s))\mathbf{n}(s) + (Q - (P(s)) \cdot \mathbf{n}(s))\mathbf{t}(s)\}.$$

Vieme, že vektory $\mathbf{t}(s)$ a $\mathbf{n}(s)$ sú lineárne nezávislé, preto $W'(s) = 0$ práve vtedy, ak $k(s)((Q - P(s)) \cdot \mathbf{t}(s)) = 0$ a $k(s)((Q - P(s)) \cdot \mathbf{n}(s)) = 0$. Je však zrejmé, že aspoň jedno z čísiel $(Q - P(s)) \cdot \mathbf{t}(s)$ a $(Q - P(s)) \cdot \mathbf{n}(s)$ musí byť nenulové, inak by platilo, že $(Q - P(s)) = 0$ a teda $Q \in P(s)$. Z toho vyplýva, že $W'(s) = 0$ práve vtedy, ak $k(s) = 0$. \square



Obr. 1.12: Pedálna krivka kružnice, elipsy a paraboly

Zdroj: <http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/history/Curves/Curves.html>

Kapitola 2

Geometria diferencovateľných kriviek v pseudoeuklidovskej rovine

2.1 Geometria pseudoeuklidovskej roviny

Definícia 2.1.1 (Pseudoeuklidovská rovina):

Pod pseudoeuklidovskou rovinou $\mathbf{E}^{1,1}$ rozumieme reálnu afinnú rovinu \mathbf{A}^2 , pre ktorú máme na jej vektorovej zložke definovanú nesingulárnu kvadratickú formu q so signatúrou $(1, 1)$.

V literatúre sa okrem názvu pseudoeuklidovská rovina stretáme aj s inými, napr. Minkowského rovina, artinovská rovina alebo hyperbolická rovina.

Afinná geometria v pseudoeuklidovskej rovine $\mathbf{E}^{1,1}$ je taká istá, ako v obvyklej euklidovskej geometrii. Sú tam rovnaké body, vektory a priamky. Tak isto sa používajú rovnice priamok, parametrické vyjadrenia priamok, hovoríme o úsečkách, polrovinách, o rovnobežnosti, orientácii a o ďalších afinných pojmoch.

Podstatným rozdielom medzi euklidovskou a pseudoeuklidovskou rovinou je to, že namiesto bežného skalárneho súčinu hovoríme v pseudoeuklidovskej rovine o pseudoskalárnom súčine. Zmena skalárneho súčinu spôsobuje aj zmenu pojmov naň naviazaných.

Definícia 2.1.2 (Pseudoskalárny súčin):

Polárnu formu $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ kvadratickej formy $q(\mathbf{x})$ vyjadrenú v tvare $\frac{1}{4}[q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - q(\mathbf{x} - \mathbf{y})]$ nazývame pseudoskalárny súčin vektorov \mathbf{x} a \mathbf{y} .

Obrátene platí, že $q(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2$. Na základe toho môžeme zaviesť pojem dĺžka vektora.

Definícia 2.1.3 (Dĺžka vektora, [BO11]):

Pre ľubovoľný vektor \mathbf{x} budeme pod jeho dĺžkou rozumieť číslo $|\mathbf{x}| = \sqrt{|\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle|} = |q(\mathbf{x})|^{\frac{1}{2}}$

Poznámka: Jednotkový vektor je vektor \mathbf{x} s vlastnosťou $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle| = 1$, t.j. $\|\mathbf{x}\|^2 = \pm 1$, t.j. $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle| = 1$.

Poznámka: Funkcia, ktorá bodom X a Y priradí dĺžku vektora $Y - X$, nie je metrika v rovine. Touto vlastnosťou sa pseudoeuklidovská rovina významne odlišuje od euklidovskej roviny. Táto skutočnosť spôsobuje v pseudoeuklidovskej rovine technické komplikácie.

Definícia 2.1.4 (Ortonormálna báza):

Hovoríme, že vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ tvoria v pseudoeuklidovskej rovine ortonormálnu bázu, ak sú tieto vektory ortonormálne (z hľadiska pseudoskalárneho súčinu), teda platí $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle = \|\mathbf{e}_1\|^2 = \pm 1$, $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle = 0$, $\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle = \|\mathbf{e}_2\|^2 = \mp 1$.

Definícia 2.1.5 (Pseudokarteziánska sústava súradníc, [BO11]):

Majme danú afinnú sústavu súradníc $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ takú, že súradnicové vektory sú ortonormálne a navyše platí $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle = \|\mathbf{e}_1\|^2 = 1$ a $\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle = \|\mathbf{e}_2\|^2 = -1$. Táto sústava súradníc sa nazýva pseudokarteziánska sústava súradníc.

Poznámka: Ak nepovieme ináč, aktuálnu sústavu súradníc považujeme za pseudokarteziánsku.

Poznámka: Je zrejmé, že súradnicové vyjadrenie kvadratickej formy $q(\mathbf{x})$ a pseudoskalárneho súčinu $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ má v ľubovoľnej pseudokarteziánskej sústave súradníc tvar: $q(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = x_1^2 - x_2^2$, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 - x_2y_2$.

Definícia 2.1.6 (Kolmost' vektorov, [BER09]):

Hovoríme, že vektory \mathbf{x} a \mathbf{y} sú na seba kolmé, ak platí: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$. Kolmost' vektorov zapisujeme zaužívaným symbolom $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$.

Definícia 2.1.7 (Znamienko vektora, [BO11]):

Pre ľubovoľný vektor \mathbf{x} definujeme jeho znamienko $\text{sgn } \mathbf{x} = \text{sgn } q(\mathbf{x})$.

Definícia 2.1.8:

Vektory ležiace v pseudoeuklidovskej rovine rozdeľujeme na tri typy nasledovne: Hovoríme, že vektor \mathbf{x} je priestorový alebo časový alebo svetelný, ak $\text{sgn } \mathbf{x} = 1$ alebo $\text{sgn } \mathbf{x} = -1$ alebo $\text{sgn } \mathbf{x} = 0$.

V pseudokarteziánskej sústave súradníc sa dá toto rozdelenie opísať v súradniciach takto:

ak $|x_1| > |x_2|$, tak vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ je priestorový

ak $|x_1| < |x_2|$, tak vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ je časový

ak $|x_1| = |x_2|$, tak vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ je svetelný.

Definícia 2.1.9 (Operátor kolmosti, [BO11]):

Pre ľubovoľný vektor z pseudoeuklidovskej roviny definujeme operátor kolmosti $\mathbf{x} \rightarrow \perp \mathbf{x}$, ktorý každému vektoru $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ priradí vektor $\perp \mathbf{x} = (\text{sgn } \mathbf{x} x_2, \text{sgn } \mathbf{x} x_1)$.

Poznámka: Pre ľubovoľný vektor \mathbf{x} ležiaci v pseudoeuklidovskej rovine zrejme platí, že $\text{sgn } \perp \mathbf{x} = -\text{sgn } \mathbf{x}$ a $(\perp \mathbf{x}) \perp \mathbf{x}$, $|\perp \mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$. Prvá vlastnosť vektora $\perp \mathbf{x}$ spôsobuje, že kolmost' v pseudoeuklidovskej rovine mení typ vektora. To znamená, že nenulový vektor, ktorý je kolmý na časový, je priestorový a naopak. Platí, že $\text{sgn } \mathbf{x} = -\text{sgn } \mathbf{y}$, ak $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq 0$.

Poznamenajme, že pre vektory \mathbf{x} a $\perp \mathbf{x}$ platí, že $\det(\mathbf{x}, \perp \mathbf{x}) > 0$, preto sa v definícii vektora $\perp \mathbf{x}$ objavuje číslo $\text{sgn } \mathbf{x}$.

Veta 2.1.1 ([BO11]):

Nech je v $\mathbf{E}^{1,1}$ daná ortonormálna báza $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$. Potom vektor \mathbf{x} vieme v súradniciach

vzhľadom na túto bázu vyjadriť takto:

$$\mathbf{x} = \operatorname{sgn} \mathbf{e}_1 \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 + \operatorname{sgn} \mathbf{e}_2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_2 \rangle \mathbf{e}_2 \quad (2.1)$$

Dôkaz. Nech vektor \mathbf{x} je vyjadrený ako $\mathbf{x} = c_1 \mathbf{e}_1 + c_2 \mathbf{e}_2$. Vynásobením tejto rovnosti postupne vektormi \mathbf{e}_1 a \mathbf{e}_2 a využitím toho, že pre ľubovoľný jednotkový vektor \mathbf{e} platí, že $\langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle = \operatorname{sgn} \mathbf{e}$, dostaneme požadované tvrdenie. \square

2.2 Krivky v pseudoeklidovskej rovine

Parametricky vyjadrená krivka a jej diferencovateľnosť sú afinné pojmy, ktoré sú invariantné vzhľadom na afinné súradnicové transformácie. Veľmi veľa pojmov a vlastností kriviek používaných v diferenciálnej geometrii patrí k afinnej geometrii, a preto s nimi môžeme pracovať v pseudoeklidovskej rovine rovnako, ako v euklidovskom prípade. Medzi najdôležitejšie afinné objekty a vlastnosti kriviek patria: bodové a vektorové funkcie jednej reálnej premennej a ich derivácie, parametricky zadaná krivka, vlastnosť bodu byť regulárny resp. singulárny, vlastnosť bodu byť inflexný resp. neinflexný, dotyčnica krivky, polrovina vzhľadom na dotyčnicu v neinflexnom bode, v ktorej krivka lokálne leží, styk dvoch kriviek, rád styku, beta podmienky styku. Niektoré zo spomenutých objektov a vlastností sme spracovali v kapitole 1 pre euklidovskú rovinu.

Na druhej strane, niektoré veľmi dôležité objekty a pojmy diferenciálnej geometrie nemajú afinný, ale metrický charakter. Medzi metrické vlastnosti kriviek v pseudoeklidovskej rovine patria: normála krivky, prirodzená parametrizácia krivky, Frenetov repér, krivosť, stred krivosti, polomer krivosti, oskulačná kružnica, Frenetove vzorce.

Naším cieľom je skúmanie metrických vlastností kriviek v pseudoeklidovskej rovine.

Poznámka: Rovnako ako v euklidovskej rovine, tak aj v pseudoeklidovskej rovine budeme krivky zadávať pomocou bodovej funkcie jednej premennej (pozri

definíciu 1.1.1) a budeme tak hovoriť o parametrizácii krivky (pozri definíciu 1.1.3). V oboch rovinách rovnako platí, že krivka má nekonečne veľa parametrizácií, o tejto vlastnosti parametricky zadaných kriviek hovorí definícia 1.1.4.

Definícia 2.2.1 (Klasifikácia bodov krivky v pseudoeklidovskej rovine, [KJ]):
*Bod $P(t_0)$ krivky $P(t)$, $t \in I$ je priestorový resp. časový resp. svetelný, ak pre vektor $P'(t_0)$ platí: $\|P'(t_0)\|^2 > 0$ resp. $\|P'(t_0)\|^2 < 0$ resp. $\|P'(t_0)\|^2 = 0$.
 Krivka je priestorová resp. časová resp. svetelná, ak je takým každý jej bod.*

Poznámka: Krivka je svetelná práve vtedy, keď leží na svetelnej priamke. Svetelné krivky sú teda nezaujímavé. Budeme sa zaoberať iba priestorovými a časovými krivkami. Poznamenajme, že pre ne je podmienka regulárnosti splnená automaticky. Svetelné body kriviek nebudeme v ďalšom texte uvažovať.

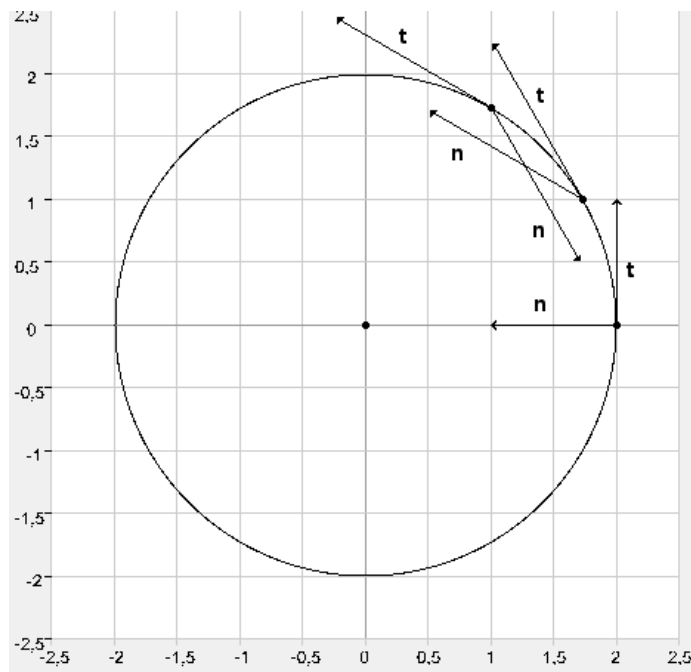
Definícia 2.2.2 (Vektor dotyčnice, [BO11]):
Vektor dotyčnice $\mathbf{t}(t)$ krivky $P(t)$ je jednotkový vektor súhlasne rovnobežný s vektorom $P'(t)$:

$$\mathbf{t}(t) = \frac{P'(t)}{\sqrt{|\langle P'(t), P'(t) \rangle|}}$$

Definícia 2.2.3 (Vektor normály, [BO11]):
Vektor normály $\mathbf{n}(t)$ je taký vektor, že vektory $\mathbf{t}(t)$, $\mathbf{n}(t)$ tvoria kladnú ortonormálnu bázu, čiže platí: $\mathbf{n}(t) = \perp \mathbf{t}(t)$.

Poznámka: Všimnime si, že kým vektor dotyčnice v euklidovskej a pseudoeklidovskej rovine majú rovnaké vyjadrenie, vektor normály bude v pseudoeklidovskej rovine aj napriek podobnej definícii vyzeráť úplne inak. Dôvodom je to, že kolmosť v pseudoeklidovskej rovine je úplne odlišná, ako v euklidovskom prípade.

Definícia 2.2.4 (Frenetov repér krivky):
V ľubovoľnom nesvetelnom a regulárnom bode krivky ležiacej v orientovanej rovine tvoria vektor dotyčnice $\mathbf{t}(t)$ a vektor normály $\mathbf{n}(t)$ Frenetov repér.



Obr. 2.1: Frenetov repér v troch bodoch euklidovskej kružnice

Veľa užitočných vlastností vektorových funkcií sa z euklidovskej roviny prenáša aj do pseudoeklidovskej. O dvoch z nich hovorí nasledujúca veta:

Veta 2.2.1 ([BO11]):

Nech $\mathbf{u}(t)$ a $\mathbf{v}(t)$ sú vektorové funkcie. Potom platí:

$$\mathbf{u}'(t) \perp \mathbf{u}(t), \text{ ak } |\mathbf{u}(t)| \text{ je konštantná} \quad (2.2)$$

$$\langle \mathbf{u}(t), \mathbf{v}'(t) \rangle = -\langle \mathbf{u}'(t), \mathbf{v}(t) \rangle, \text{ ak } \mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t) \text{ sú ortogonálne pre každé } t \quad (2.3)$$

Dôkaz. Tvrdenie vety sa ľahko ukáže jednoduchým derivovaním skalárneho súčinu.

□

Definícia 2.2.5 (Prirodzená parametrizácia krivky):

$P(s)$ je prirodzená parametrizácia krivky, ak $|\langle P'(s), P'(s) \rangle| = 1$ pre všetky s .

Veta 2.2.2 (Vlastnosti prirodzenej parametrizácie):

Krivka zadaná prirodzenou parametrizáciou má nasledovné vlastnosti:

1. Krivka vyjadrená prirodzenou parametrizáciou neobsahuje svetelné body.
2. Krivka vyjadrená prirodzenou parametrizáciou je priestorová alebo časová.
3. Pre krivku s prirodzenou parametrizáciou platí: $P''(s) \perp P'(s)$.
4. Každá krivka bez svetelných a singulárnych bodov má nekonečne veľa prirodzených parametrizácií.
5. Pre prirodzenú parametrizáciu platí:

$$\mathbf{t}(s) = P'(s),$$

$$\mathbf{n}(s) = \det(P'(s), P''(s)) \frac{P''(s)}{\sqrt{|\langle P''(s), P''(s) \rangle|}}.$$

Dôkaz. Vlastnosti 1. a 2. vyplývajú priamo z definície prirodzenej parametrizácie krivky.

Z definície prirodzenej parametrizácie a z (2.2) dostávame, že $\mathbf{t}(s) = P'(s)$ a $P''(s) \perp P'(s)$.

Každú parametrizáciu $P(t)$ regulárnej krivky bez svetelných bodov možno substitúciou $t = \phi(s)$, kde $\phi(s)$ je funkcia inverzná k funkcii $s = \int |P'(t)| dt$, zmeniť na prirodzenú parametrizáciu. Je to priama analógia k euklidovskému prípadu. Posledná vlastnosť vyplýva priamo z definícií prirodzenej parametrizácie a normály krivky v pseudoeklidovskej rovine. \square

Poznámka: Definícia prirodzenej parametrizácie krivky v euklidovskej rovine (definícia 1.1.9) a v pseudoeklidovskej rovine (definícia 2.2.5) sú rovnaké. Tak isto sa zachovávajú aj jej vlastnosti uvedené vo vete 1.1.3.

Definícia 2.2.6 (Krivosť krivky, [BO11]):

Krivosť orientovanej krivky $P(t)$ v orientovanej pseudoeklidovskej rovine je číslo

$$k(t) = \frac{\det(P'(t), P''(t))}{|\langle P'(t), P'(t) \rangle|^{\frac{3}{2}}}.$$

Poznámka: Poznamenajme, že výraz definujúci krivosť krivky v pseudoeklidovskej rovine je identický s výrazom definujúcim odpovedajúci objekt v euklidovskej rovine.

Veta 2.2.3:

Pre krivosť krivky vyjadrenú v prirodzenej parametrizácii platí:

$$k(s) = \det(P'(s), P''(s)).$$

Dôkaz. Veta vyplýva priamo z definície krivosti a prirodzenej parametrizácie krivky v pseudoeuclidovskej rovine. \square

Veta 2.2.4 ([BO11]):

Majme dané ortonormálne vektorové funkcie $\mathbf{u}(t)$ a $\mathbf{v}(t)$. Potom platí:

$$\mathbf{u}'(t) = \omega(t)\mathbf{v}(t), \quad \mathbf{v}'(t) = \omega(t)\mathbf{u}(t),$$

kde

$$\omega(t) = \operatorname{sgn} \mathbf{v}(t) \langle \mathbf{u}'(t), \mathbf{v}(t) \rangle = \operatorname{sgn} \mathbf{u}(t) \langle \mathbf{v}'(t), \mathbf{u}(t) \rangle.$$

Dôkaz. Keďže vektorové polia $\mathbf{u}(t)$ a $\mathbf{v}(t)$ sú ortonormálne, z (2.2) vyplýva, že $\mathbf{u}'(t) \perp \mathbf{u}(t)$ a $\mathbf{v}'(t) \perp \mathbf{v}(t)$. Použijúc rovnosť (2.1) dostávame, že $\mathbf{u}'(t) = \operatorname{sgn} \mathbf{v}(t) \langle \mathbf{u}'(t), \mathbf{v}(t) \rangle \mathbf{v}(t)$ a $\mathbf{v}'(t) = \operatorname{sgn} \mathbf{u}(t) \langle \mathbf{v}'(t), \mathbf{u}(t) \rangle \mathbf{u}(t)$. Pre kolmé vektorové polia platí, že $\operatorname{sgn} \mathbf{u}(t) = -\operatorname{sgn} \mathbf{v}(t)$. Z tejto skutočnosti a z vlastnosti (2.3) dostávame: $\operatorname{sgn} \mathbf{u}(t) \langle \mathbf{v}'(t), \mathbf{u}(t) \rangle = -\operatorname{sgn} \mathbf{v}(t) (-\langle \mathbf{u}'(t), \mathbf{v}(t) \rangle) = \operatorname{sgn} \mathbf{v}(t) \langle \mathbf{u}'(t), \mathbf{v}(t) \rangle$. Tým je veta dokázaná. \square

Veta 2.2.5 (Frenetove vzorce pre orientovanú krivku, [BO11]):

Pre orientovanú krivku v orientovanej pseudoeuclidovskej rovine, ktorá je vyjadrená prirodzenou parametrizáciou, platí:

$$\mathbf{t}'(s) = k(s)\mathbf{n}(s)$$

$$\mathbf{n}'(s) = k(s)\mathbf{t}(s)$$

Dôkaz. Keďže v prípade prirodzenej parametrizácie platí, že $\mathbf{t}(s) = P'(s)$, tak pre deriváciu vektorovej funkcie $\mathbf{t}(s)$ dostávame, že $\mathbf{t}'(s) = P''(s)$. Zároveň platí, že

$P''(s) \perp P'(s)$ a teda $P''(s) \perp \mathbf{t}(s)$.

Uvažujme ortonormálnu bázu $\mathbf{t}(t)$ a $\mathbf{n}(t)$. Z (2.1) dostávame, že

$$P''(s) = \operatorname{sgn} \mathbf{n}(s) \langle P''(s), \mathbf{n}(s) \rangle \mathbf{n}(s). \quad (2.4)$$

Pre krivosť vyjadrenú v prirodzenej parametrizácii teda platí: $k = \det(P'(s), P''(s)) = \operatorname{sgn} \mathbf{n}(s) \langle P''(s), \mathbf{n}(s) \rangle \det(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s))$. Keďže báza $\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)$ je kladne orientovaná, determinant z predchádzajúceho vzťahu je rovný jednej a krivosť sa dá vyjadriť ako $k = \operatorname{sgn} \mathbf{n}(s) \langle P''(s), \mathbf{n}(s) \rangle$. Z (2.4) teraz vyplýva, že prvý Frenetov vzorec má tvar $\mathbf{t}'(s) = P''(s) = k(s)\mathbf{n}(s)$.

Druhý Frenetov vzorec je dôsledkom prvého a vety 2.2.4. \square

Poznámka: Všimnime si, že kým derivácia vektora dotyčnice $\mathbf{t}'(s)$ má v euklidovskej rovine (veta 1.1.5) a pseudoeklidovskej rovine rovnaké vyjadrenie, vo vzorci pre deriváciu narmálového vektora $\mathbf{n}'(s)$ nastáva znamienková zmena.

Definícia 2.2.7 (Vrchol krivky):

Nech je daná rovinná krivka $P(t)$, $t \in I$ a nech $k(t)$ je jej krivosť. Vrcholom krivky nazývame taký bod $P(t_0)$, $t_0 \in I$, v ktorom má krivosť krivky stacionárny bod, teda $k'(t_0) = 0$. Vo všeobecnosti je teda vrcholom krivky taký bod, v ktorom má krivosť lokálny extrém.

Definícia 2.2.8 (Obyčajný vrchol krivky):

Nech je daná rovinná krivka $P(t)$, $t \in I$ a bod $P(t_0)$, $t_0 \in I$ je jej vrchol. Vrchol $P(t_0)$ sa nazýva obyčajný vrchol rovinnnej krivky, ak pre krivosť krivky platí: $k'(t_0) = 0$ a $k''(t_0) \neq 0$. Obyčajný vrchol krivky budeme nazývať vrcholom prvého rádu.

Poznámka: Body krivky, ktoré nie sú vrcholmi, nazývame všeobecné body krivky.

Definícia 2.2.9 (Vrchol vyššieho rádu):

Nech je daná rovinná krivka $P(t)$, $t \in I$ a nech $P(t_0)$, $t_0 \in I$ je jej vrchol taký, že $k'(t_0) = 0, \dots, k^{(k)}(t_0) = 0$, $k \geq 2$. Potom vrchol $P(t_0)$ nazývame vrchol aspoň

k -teho rádu krivky $P(t)$.

Hovoríme, že krivka má v bode $P(t_0)$, $t_0 \in I$ vrchol rádu práve k práve vtedy, ak pre derivácie krivosti tejto krivky platí: $k'(t_0) = 0, \dots, k^{(k)}(t_0) = 0 \wedge k^{(k+1)}(t_0) \neq 0$, $k \geq 2$.

Poznámka: Definícia vrcholu krivky ležiacej v pseudoeklidovskej rovine je formálne taká istá, ako definícia tohto pojmu v euklidovskej rovine. Je treba si však uvedomiť, že vrchol krivky úzko súvisí s krivosťou krivky a to je metrický pojem, čiže je odlišný v euklidovskej a pseudoeklidovskej rovine.

Príklad 9: Uvažujme euklidovskú kružnicu $P(t) = (r \cos t, r \sin t)$, $t \in \langle -\frac{1}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi \rangle$. Body $P(t)$, pre ktoré je $t \in (-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi) \cup (\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi)$ sú časové, body $P(t)$, pre ktoré je $t \in (\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi) \cup (\frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi)$ sú priestorové a body $P(-\frac{1}{4}\pi)$, $P(\frac{1}{4}\pi)$, $P(\frac{3}{4}\pi)$, $P(\frac{5}{4}\pi)$ sú svetelné. V priestorových a časových bodoch kružnice máme \mathbf{t} , \mathbf{n} a k vyjadrené nasledovne:

$$\mathbf{t} = \left(-\frac{\sin t}{|\cos 2t|^{\frac{1}{2}}}, \frac{\cos t}{|\cos 2t|^{\frac{1}{2}}} \right)$$

$$\mathbf{n} = \left(\frac{\cos t}{|\cos 2t|^{\frac{1}{2}}}, -\frac{\sin t}{|\cos 2t|^{\frac{1}{2}}} \right), \text{ ak } t \in \left(\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi \right) \cup \left(\frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi \right)$$

$$\mathbf{n} = \left(-\frac{\cos t}{|\cos 2t|^{\frac{1}{2}}}, \frac{\sin t}{|\cos 2t|^{\frac{1}{2}}} \right), \text{ ak } t \in \left(-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi \right) \cup \left(\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi \right)$$

$$k = \frac{1}{r|\cos 2t|^{\frac{3}{2}}}$$

Poznámka: Porovnaním príkladov 1 a 9 zistíme, že vzorce vektorov dotyčnice \mathbf{t} , normály \mathbf{n} a krivosti krivky k sú v pseudoeklidovskej rovine komplikovanejšie aj napriek tomu, že tieto objekty majú v oboch rovinách rovnaké vyjadrenie. Túto skutočnosť spôsobuje zmena skalárneho súčinu po prechode k pseudoeklidovskej rovine.

Príklad 10: Uvažujme euklidovskú elipsu $P(t) = (a \cos t, b \sin t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Označme výraz $a^2 \sin^2 t - b^2 \cos^2 t$ ako $g(t)$. Body elipsy sú časové, ak $g(t) < 0$, sú priestorové, ak $g(t) > 0$ a sú svetelné, ak $g(t) = 0$. V priestorových a časových bodoch elipsy máme \mathbf{t} , \mathbf{n} a k vyjadrené nasledovne:

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \left(-\frac{a \sin t}{|g(t)|^{\frac{1}{2}}}, \frac{b \cos t}{|g(t)|^{\frac{1}{2}}} \right) \\ \mathbf{n} &= \left(\frac{b \cos t}{|g(t)|^{\frac{1}{2}}}, -\frac{a \sin t}{|g(t)|^{\frac{1}{2}}} \right), \text{ ak } g(t) > 0 \\ \mathbf{n} &= \left(-\frac{b \cos t}{|g(t)|^{\frac{1}{2}}}, \frac{a \sin t}{|g(t)|^{\frac{1}{2}}} \right), \text{ ak } g(t) < 0 \\ k &= \frac{ab}{|g(t)|^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Príklad 11: Uvažujme parabolu $P(t) = \left(\frac{t^2}{2p}, t \right)$, $t \in (-\infty, \infty)$. Body paraboly sú časové, ak $|t| < p$, sú priestorové, ak $|t| > p$ a sú svetelné, ak $|t| = p$. V priestorových a časových bodoch paraboly máme:

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \left(\frac{t}{|t^2 - p^2|^{\frac{1}{2}}}, \frac{p}{|t^2 - p^2|^{\frac{1}{2}}} \right) \\ \mathbf{n} &= \left(\frac{p}{|t^2 - p^2|^{\frac{1}{2}}}, \frac{t}{|t^2 - p^2|^{\frac{1}{2}}} \right), \text{ ak } |t| > p \\ \mathbf{n} &= \left(-\frac{p}{|t^2 - p^2|^{\frac{1}{2}}}, -\frac{t}{|t^2 - p^2|^{\frac{1}{2}}} \right), \text{ ak } |t| < p \\ k &= \frac{p^2}{|t^2 - p^2|^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Poznámka: Porovnaním príkladov 2 a 3 s príkladmi 10 a 11 zistíme, že vektor dotýčnice \mathbf{t} a krivosť krivky k majú v oboch prípadoch veľmi podobné vyjadrenia. Najväčšia zmena nastáva vo vyjadrení normálového vektora \mathbf{n} , čo je spôsobené odlišnosťou kolmosti v euklidovskej a pseudoeklidovskej rovine.

Príklad 12: Uvažujme opäť euklidovskú elipsu $P(t) = (a \cos t, b \sin t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a počítajme jej vrcholy. Vieme, že jej krivosť je vyjadrená ako $k = \frac{ab}{|g(t)|^{\frac{3}{2}}}$, kde $g(t) = a^2 \sin^2 t - b^2 \cos^2 t$. Pre deriváciu krivosti potom platí:

$$\begin{aligned} k' &= -\frac{3ab(a^2 + b^2) \sin 2t}{2 |g(t)|^{\frac{5}{2}}}, \text{ ak } g(t) > 0 \\ k' &= \frac{3ab(a^2 + b^2) \sin 2t}{2 |g(t)|^{\frac{5}{2}}}, \text{ ak } g(t) < 0 \end{aligned}$$

Derivácia krivosti je teda nulová práve pre parametre $t = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$, $t = \pi$, $t = \frac{3\pi}{2}$, v týchto parametroch má elipsa vrcholy.

Príklad 13: Uvažujme opäť euklidovskú kružnicu $P(t) = (r \cos t, r \sin t)$, $t \in \langle -\frac{1}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi \rangle$ a počítajme jej vrcholy. Keďže kružnica je špeciálnym prípadom elipsy, stačí do derivácie krivosti elipsy dosadiť miesto a a b polomer r a dostávame:

$$k' = -\frac{3 \sin 2t}{r |\cos 2t|^{\frac{5}{2}}}, \text{ ak } t \in \left(\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi \right) \cup \left(\frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi \right)$$

$$k' = \frac{3 \sin 2t}{r |\cos 2t|^{\frac{5}{2}}}, \text{ ak } t \in \left(-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi \right) \cup \left(\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi \right)$$

Derivácia krivosti je teda nulová práve pre parametre $t = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$, $t = \pi$, $t = \frac{3\pi}{2}$, v týchto parametroch má kružnica vrcholy.

Príklad 14: Uvažujme parabolou $P(t) = \left(\frac{t^2}{2p}, t \right)$, $t \in (-\infty, \infty)$ a počítajme jej vrcholy. Krivosť paraboly je daná ako $k = \frac{p^2}{|t^2 - p^2|^{\frac{3}{2}}}$. Pre jej deriváciu potom platí:

$$k' = -\frac{3p^2 t}{|t^2 - p^2|^{\frac{5}{2}}}, \text{ ak } |t| > p$$

$$k' = \frac{3p^2 t}{|t^2 - p^2|^{\frac{5}{2}}}, \text{ ak } |t| < p$$

Parabola má teda v pseudoeuklidovskej rovine jediný vrchol pre parameter $t = 0$.

Poznámka: Z príkladov 12 a 14 vidíme, že elipsa a parabola majú tie isté vrcholy v euklidovskej aj v pseudoeuklidovskej rovine. Zmena nastáva opäť v prípade euklidovskej kružnice, pretože kým v euklidovskej rovine sú všetky body kružnice vrcholy, v pseudoeuklidovskej rovine má táto krivka podľa príkladu 13 práve štyri vrcholy.

Kapitola 3

Oskulačná pseudokružnica a evolúta krivky v pseudoeuclidovskej rovine

V tejto kapitole si zdefinujeme oskulačnú pseudokružnicu a evolútu krivky ležiacej v pseudoeuclidovskej rovine a opíšeme ich základné vlastnosti.

3.1 Oskulačná pseudokružnica krivky ležiacej v pseudoeuclidovskej rovine

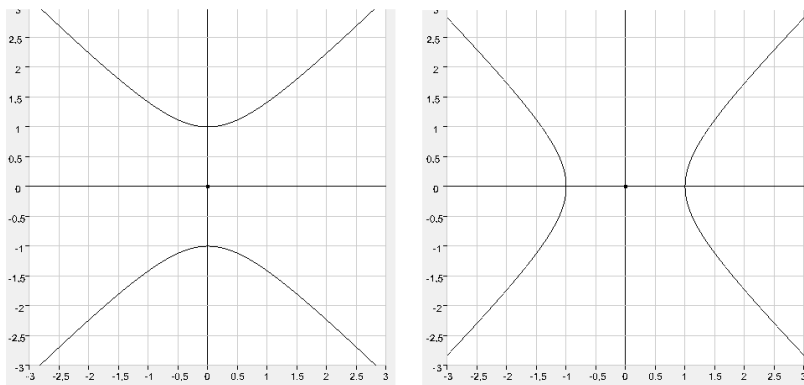
Styk kriviek patrí medzi afinné pojmy, preto sa nemení, ak prejdeme od euclidovskej roviny k pseudoeuclidovskej. Definícia 1.1.17 z kapitoly 1 preto platí rovnako v pseudoeuclidovskej rovine, ako v euclidovskej.

V pseudoeuclidovskej rovine, úlohu kružníc preberajú rovnoosé hyperboly s rovnicou $(x_1 - s_1)^2 - (x_2 - s_2)^2 = \delta r^2$, kde $S = (s_1, s_2)$ je stred, $r > 0$ je polomer pseudokružnice a $\delta \in \{-1, 1\}$.

Príklad 15: Uvažujme pseudokružnicu so stredom v bode $S = (0, 0)$, polomerom r a nech $\delta = 1$, čiže pseudokružnicu s rovnicou $|X - S|^2 = r^2$. Túto pseudokružnicu vieme parametricky vyjadriť nasledovne: $P(t) = (\pm r \cosh t, r \sinh t)$, $t \in (-\infty, \infty)$. Pre vektor prvej derivácie parametrického vyjadrenia platí:

$P'(t) = (\pm r \sinh t, r \cosh t)$, $t \in (-\infty, \infty)$. Keďže $\text{sgn } P'(t) = \text{sgn} \langle P'(t), P'(t) \rangle = -r^2 < 0$, tento vektor je časový pre každé t , preto aj všetky body ležiace na danej pseudokružnici sú časové. Túto pseudokružnicu budeme preto nazývať *časová pseudokružnica*.

Príklad 16: Uvažujme pseudokružnicu so stredom v bode $S = (0, 0)$, polomerom r a nech $\delta = -1$, čiže pseudokružnicu s rovnicou $|X - S|^2 = -r^2$. Túto pseudokružnicu vieme parametricky vyjadriť nasledovne: $P(t) = (r \sinh t, \pm r \cosh t)$, $t \in (-\infty, \infty)$. Podobne ako v príklade 15 sa ukáže, že všetky body ležiace na danej pseudokružnici sú priestorové. Túto pseudokružnicu budeme preto nazývať *priestorová pseudokružnica*.



Obr. 3.1: Priestorová (naľavo) a časová (napravo) pseudokružnica so stredom $S = (0, 0)$ a polomerom $r = 1$

Zo súradnicového vyjadrenia pseudokružnice vyplýva, že ju môžeme zapísať aj v tvare $\langle P(t) - S, P(t) - S \rangle = \delta r^2$. Nech $P : I \rightarrow \mathbf{E}^{1,1}$ je krivka daná parametricky a nech $P(t_0)$, $t_0 \in I$ je regulárny bod tejto krivky. Nech pseudokružnica prechádza týmto bodom. Platí teda: $\langle P(t_0) - S, P(t_0) - S \rangle = \delta r^2$. Definujme funkciu styku krivky P a pseudokružnice takto:

Definícia 3.1.1:

Funkcia styku pseudokružnice so stredom v bode S a polomerom r a krivky P ležiacej v pseudoeklidovskej rovine je hladká funkcia f taká, že $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ a platí: $f(t) = \langle P(t) - S, P(t) - S \rangle - \delta r^2$.

Na základe uvedených definícií zavedieme podmienky styku rádu k pseudokružnice a krivky v spoločnom bode.

Definícia 3.1.2 (Styk krivky a pseudokružnice):

Hovoríme, že pseudokružnica má s krivkou P styk rádu k v bode $P(t_0)$, ak pre funkciu styku f pseudokružnice a krivky platia nasledovné podmienky:

$$f(t_0) = 0, f'(t_0) = 0, \dots, f^{(k)}(t_0) = 0$$

Poznámka: Nech $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\perp \mathbf{a} = \text{sgn}\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle (a_2, a_1)$ a $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ sú vektory. Počítajme $\langle \perp \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$: $\langle \perp \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \text{sgn}\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \langle (a_2, a_1), (b_1, b_2) \rangle = -\text{sgn}\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Veta 3.1.1 ([BAK11a]):

V neinflexnom a nesvetelnom bode krivky existuje práve jedna pseudokružnica majúca s krivkou v spoločnom bode styk rádu aspoň dva, pričom pre jej stred S a polomer r platí:

$$S = P(t) - \frac{1}{k(t)} \mathbf{n}, \quad r = \frac{1}{k} \quad (3.1)$$

Dôkaz. Nech $P(t)$ je parameticky vyjadrená krivka. Uvažujme funkciu styku tejto krivky s pseudokružnicou, ktorá je daná vzťahom $f(t) = \langle P(t) - S, P(t) - S \rangle - \delta r^2$, $\delta \in \{-1, 1\}$. Podmienky tyku rádu aspoň dva týchto kriviek sú $f(t_0) = 0$, $f'(t_0) = 0$ a $f''(t_0) = 0$. Kvôli prehľadnejšiemu zápisu budeme v ďalšej časti dôkazu miesto parametra t_0 zjednodušene písať t . Dostávame teda rovnice pre neznáme S , r a δ :

$$\langle P(t) - S, P(t) - S \rangle - \delta r^2 = 0 \quad (3.2)$$

$$2\langle P(t) - S, P'(t) \rangle = 0 \quad (3.3)$$

$$2\langle P(t) - S, P''(t) \rangle + 2\langle P'(t), P'(t) \rangle = 0 \quad (3.4)$$

Z druhej podmienky máme $P' \perp P(t) - S$, takže platí $P(t) - S = c\mathbf{n}$. Konštantu c vypočítame z tretej rovnice:

$$c = -\frac{\langle P'(t), P'(t) \rangle}{\langle \mathbf{n}, P''(t) \rangle}$$

Z rovnosti $\mathbf{n} = \perp \mathbf{t} = \perp \frac{P'(t)}{|\langle P'(t), P'(t) \rangle|^{\frac{1}{2}}}$ dostávame $c = -\frac{\langle P'(t), P'(t) \rangle |\langle P'(t), P'(t) \rangle|^{\frac{1}{2}}}{\langle P'(t), P''(t) \rangle}$.

Použitím vzťahu z predchádzajúcej poznánky dostávame:

$$c = -\frac{\langle P'(t), P'(t) \rangle |\langle P'(t), P'(t) \rangle|^{\frac{1}{2}}}{-\operatorname{sgn} \langle P'(t), P'(t) \rangle \det(P'(t), P''(t))} = \frac{|\langle P'(t), P'(t) \rangle|^{\frac{3}{2}}}{\det(P'(t), P''(t))} = \frac{1}{k}.$$

Nakoniec z prvej rovnice dostávame, že $c^2 \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = \delta r^2$ a teda $\delta = \operatorname{sgn} \mathbf{n} = \operatorname{sgn} k$, čiže polomer tejto pseudokružnice je $r = \frac{1}{k}$. Vyjadrenie jej stredy vyzerá nasledovne:

$$S = P(t) - \frac{|\langle P'(t), P'(t) \rangle|^{\frac{3}{2}}}{\det(P'(t), P''(t))} \mathbf{n} = P(t) - \frac{1}{k(t)} \mathbf{n}$$

□

Definícia 3.1.3:

Pseudokružnicu so stredom $S = P(t) - \frac{1}{k(t)} \mathbf{n}$ a polomerom $r = \frac{1}{k}$ majúcu s krivkou styk rádu aspoň dva nazývame oskulačná pseudokružnica danej krivky. Navyše, ak $\delta = -1$, tak hovoríme o priestorovej oskulačnej pseudokružnici a ak $\delta = 1$, tak hovoríme o časovej oskulačnej pseudokružnici.

Poznámka: Prechod od euclidovskej k pseudoeuclidovskej rovine spôsobil, že kým polomer oskulačnej kružnice a oskulačnej pseudokružnice sú v oboch rovinách vyjadrené rovnako, zmena nastáva vo vyjadrení ich stredov, stačí porovnať vzorce (1.3) a (3.1).

Pretože v tejto práci pracujeme s krivkou a jej oskulačnou pseudokružnicou a zaujíma sa o ich styk, je potrebné uviesť vetu hovoriacu o vzťahu oskulačnej pseudokružnice a krivky v spoločnom bode.

Veta 3.1.2 ([BAK11a]):

Nech $P(t) = (x(t), y(t))$ je parametricky vyjadrená krivka ležiaca v pseudoeuclidovskej rovine a nech bod $P_0 = P(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$ je neinflexný a nesvetelný bod tejto krivky. Nech $P_1 = P(t_1) = (x(t_1), y(t_1))$ a $P_2 = P(t_2) = (x(t_2), y(t_2))$ sú dva rôzne body tejto krivky také, že sa "blížia" k bodu P_0 a také, že $t_1 < t_0 < t_2$. Oskulačná pseudokružnica tejto krivky je limitou polôh pseudokružníc prechádzajúcich bodom P_0, P_1 a P_2 .

Dôkaz. Nech $(x-a)^2 - (x-b)^2 - \delta r^2 = 0$ je rovnica pseudokružnice, ktorá prechádza bodmi P_0, P_1 a P_2 . Definujme funkciu $g(t) = (x-a)^2 - (x-b)^2 - \delta r^2$. Je zrejmé, že platí: $g(t_0) = g(t_1) = g(t_2) = 0$, pričom $t_1 < t_0 < t_2$. Podľa Rolleho vety existujú také body $P_3 = P(t_3) = (x(t_3), y(t_3))$ a $P_4 = P(t_4) = (x(t_4), y(t_4))$, že $t_1 < t_3 < t_0$ a $t_0 < t_4 < t_2$ a pre deriváciu funkcie g platí: $g'(t_3) = g'(t_4) = 0$. Z toho dostávame:

$$\begin{aligned} g'(t) &= 2(x(t) - a)x'(t) - 2(y(t) - b)y'(t) \\ g'(t_3) &= 2(x(t_3) - a)x'(t_3) - 2(y(t_3) - b)y'(t_3) = 0, \quad t_1 < t_3 < t_0 \\ g'(t_4) &= 2(x(t_4) - a)x'(t_4) - 2(y(t_4) - b)y'(t_4) = 0, \quad t_0 < t_4 < t_2 \end{aligned}$$

Ak na funkciu $g'(t)$ opäť použijeme Rolleho vetu, dostaneme existenciu bodu $P_5 = P(t_5) = (x(t_5), y(t_5))$ takého, že $t_3 < t_5 < t_4$ a pre druhú deriváciu funkcie g platí: $g''(t_5) = 0$. Z toho dostávame:

$$g''(t_5) = 2[(x'(t_5))^2 + (x(t_5) - a)x''(t_5)] - 2[(y'(t_5))^2 + (y(t_5) - b)y''(t_5)] = 0$$

Prejdúc k limite pre t_1 a t_2 idúce k t_0 dostávame, že aj t_3, t_4 a t_5 idú v limite k t_0 . Z týchto skutočností dostávame tri rovnice s tromi neznámymi:

$$(x(t_0) - a)^2 - (y(t_0) - b)^2 - \delta r^2 = 0 \tag{3.5}$$

$$(x(t_0) - a)x'(t_0) - (y(t_0) - b)y'(t_0) = 0 \tag{3.6}$$

$$\left[(x'(t_0))^2 + (x(t_0) - a)x''(t_0) \right] - \left[(y'(t_0))^2 + (y(t_0) - b)y''(t_0) \right] = 0$$

Všimnime si, že tieto rovnice sú vzťahy (3.2), (3.3) a (3.4) zapísané v súradniciach. Riešením daného systému rovníc je teda stred a polomer oskulačnej pseudokružnice krivky v bode P_0 : $S = P(t_0) - \frac{1}{k(t_0)}\mathbf{n}(t_0)$ a $r = \frac{1}{k(t_0)}$. Limitná kružnica je teda oskulačná pseudokružnica krivky □

Poznámka: Predchádzajúca veta hovorí, že oskulačná pseudokružnica je najtesnejšie priloženou kružnicou ku krivke spomedzi všetkých pseudokružníc zostrojených v danom bode.

Poznámka: Z rovníc (3.5) a (3.6) dostávame nasledovné vyjadrenie súradníc stredu oskulačnej pseudokružnice:

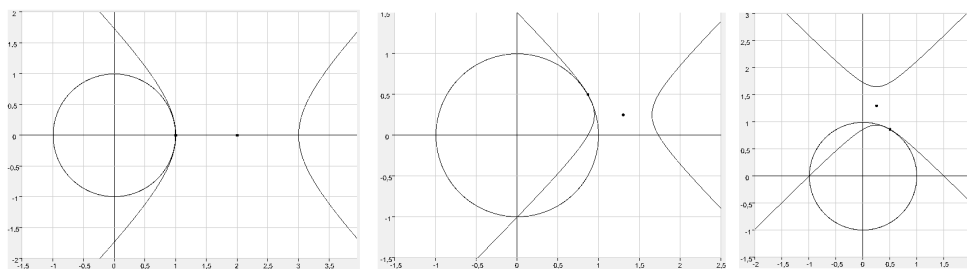
$$a = x(t_0) - \frac{((x'(t_0))^2 - (y'(t_0))^2)}{x'(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'(t_0)}y'(t_0) \quad (3.7)$$

$$b = y(t_0) - \frac{((x'(t_0))^2 - (y'(t_0))^2)}{x'(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'(t_0)}x'(t_0) \quad (3.8)$$

Príklad 17: Uvažujme euklidovskú kružnicu $P(t) = (r \cos t, r \sin t)$, $t \in \langle -\frac{1}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi \rangle$. Stred a polomer oskulačnej pseudokružnice sú vyjadrené takto:

$$S = (r \cos t, r \sin t) + r \cos 2t(\cos t, -\sin t), \text{ ak } t \notin \{-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}\}$$

$$r_c = r |\cos 2t|^{\frac{3}{2}}$$

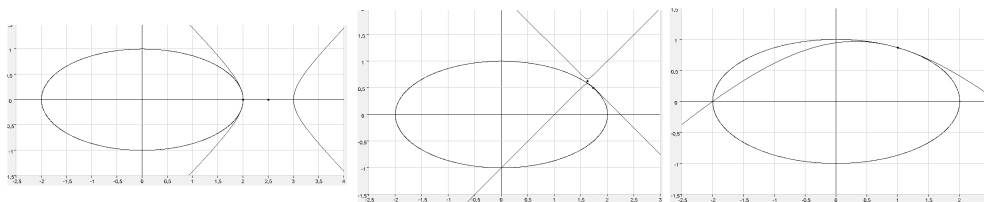


Obr. 3.2: Oskulačná pseudokružnica euklidovskej kružnice v parametroch $t = 0$, $t = \frac{\pi}{6}$ a $t = \frac{\pi}{3}$

Príklad 18: Uvažujme euklidovskú elipsu $P(t) = (a \cos t, b \sin t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Označme výraz $a^2 \sin^2 t - b^2 \cos^2 t$ ako $g(t)$. Stred a polomer oskulačnej pseudokružnice sú vyjadrené takto:

$$S = (a \cos t, b \sin t) - \frac{g(t)}{ab}(b \cos t, -a \sin t), \text{ ak } g(t) \neq 0$$

$$r = \frac{|g(t)|^{\frac{3}{2}}}{ab}$$

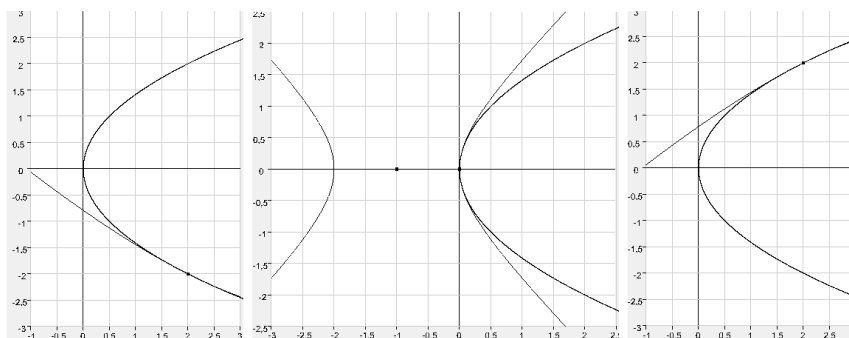


Obr. 3.3: Oskulačná pseudokružnica euklidovskej kružnice v parametroch $t = 0$, $t = \frac{\pi}{6}$ a $t = \frac{\pi}{3}$

Príklad 19: Uvažujme parabolou $P(t) = (\frac{t^2}{2p}, t)$, $t \in (-\infty, \infty)$. Stred a polomer oskulačnej pseudokružnice sú teda vyjadrené takto:

$$S = (t^2p, t) + \frac{t^2 - p^2}{p} \left(1, \frac{t}{p}\right), \text{ ak } |t| \neq p$$

$$r = \frac{|t^2 - p^2|^{\frac{3}{2}}}{p^2}$$



Obr. 3.4: Oskulačná pseudokružnica paraboly v parametroch $t = -2$, $t = 0$ a $t = 2$

3.2 Evolúta krivky ležiacej v pseudoeuklidovskej rovine

Rovnako ako v euklidovskej rovine, evolúta krivky je poloha stredov všetkých oskulačných pseudokružníc krivky. Na základe toho zavádzame nasledovnú definíciu:

Veta 3.2.1 ([BAK11a]):

Evolúta krivky bez jej inflexných a svetelných bodov je definovaná ako krivka daná predpisom $E(t) = P(t) - \frac{1}{k(t)}\mathbf{n}(t)$.

Dôkaz. Veta je dôsledkom vety 3.1.1. □

Poznámka: Poznamenajme, že evolútu krivky vieme v súradniciach vyjadriť vzťahmi (3.7) a (3.8). Je omnoho ľahšie použiť tieto vzťahy na výpočet evolúty krivky.

Body evolúty krivky ležiacej v pseudoeklidovskej rovine majú podobné vlastnosti ako v prípade, že uvažujeme euklidovskú rovinu. O týchto vlastnostiach hovorí ďalšia veta.

Pripomeňme, že vrchol parametrickej krivky $P(t)$ je bod $P(t_0)$, v ktorom je prvá derivácia krivosti nulová, t.j. platí: $k'(t_0) = 0$. Bod $P(t_0)$ nazývame obyčajný vrchol, ak platí: $k'(t_0) = 0$ a $k''(t_0) \neq 0$. Regulárny bod krivky je taký, že $P'(t) \neq 0$. Uvažujme krivku zadanú prirodzenou parametrizáciou. Použitím Frenetových vzorcov sa ukáže, že pre prvé tri derivácie evolúty platí:

$$E'(t) = \frac{k'(t)}{k^2(t)} \mathbf{n}(t) \quad (3.9)$$

$$E''(t) = \frac{k'(t)}{k(t)} \mathbf{t}(t) + \left(\frac{k''(t)}{k^2(t)} - 2 \frac{(k'(t))^2}{k^3(t)} \right) \mathbf{n}(t) \quad (3.10)$$

$$E'''(t) = \left(2 \frac{k''(t)}{k(t)} - 3 \frac{(k'(t))^2}{k^2(t)} \right) \mathbf{t}(t) + \left(k'(t) + \frac{k'''(t)}{k^2(t)} - 6 \frac{k'(t)k''(t)}{k^3(t)} + 6 \frac{(k'(t))^3}{k^4(t)} \right) \mathbf{n}(t) \quad (3.11)$$

Veta 3.2.2 ([BAK11a]):

Nech $P(t)$ je krivka daná parametricky a nech $E(t)$ je jej evolúta.

1. *Bod $E(t_0)$ evolúty je regulárny práve vtedy, ak bod krivky $P(t_0)$ nie je vrcholom danej krivky.*
2. *Ak je bod $P(t_0)$ krivky obyčajným vrcholom, tak bod $E(t_0)$ evolúty je bodom vratu prvého druhu.*

Dôkaz. 1. Tvrdenie vyplýva priamo z (3.9).

2. Z prvého tvrdenia vyplýva, že ak $P(t_0)$ je vrcholom krivky, $E(t_0)$ je singulárnym bodom evolúty. Z (3.10) a (3.11) vyplýva, že pre druhú a tretiu deriváciu evolúty v obyčajnom vrchole platí:

$$E''(t_0) = \frac{k''(t_0)}{k^2(t_0)} \mathbf{n}(t_0)$$

$$E'''(t_0) = 2 \frac{k''(t_0)}{k^2(t_0)} \mathbf{t}(t_0) + \frac{k'''(t_0)}{k^2(t_0)} \mathbf{n}(t_0)$$

Je zrejmé, že vektory $E''(t_0)$ a $E'''(t_0)$ sú lineárne nezávislé, takže $E(t_0)$ je bodom vratu prvého druhu. □

Poznámka: Poznamenajme, že rovnaká veta o evolúte a jej bodoch platí aj v euklidovskej rovine (veta 1.3.1).

Príklad 20: Z príkladu 17 vyplýva, že evolúta euklidovskej kružnice $P(t) = (r \cos t, r \sin t)$, $t \in \langle -\frac{1}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi \rangle$ je vyjadrená nasledovne:

$$E(t) = (r \cos t, r \sin t) + r \cos 2t (\cos t, -\sin t), \text{ ak } t \notin \{-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi\}$$

V súradniciach máme takéto vyjadrenie evolúty euklidovskej kružnice: $x(t) = 2r \cos^3 t$, $y(t) = 2r \sin^3 t$. Je zrejmé, že táto krivka je obrazom astroidy $Q(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ v afinnej transformácii $x^* = 2rx$ a $y^* = 2ry$, pozri obrázok 3.5 vľavo.

Príklad 21: Z príkladu 18 vyplýva, že evolúta euklidovskej elipsy $P(t) = (a \cos t, b \sin t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ je vyjadrená nasledovne:

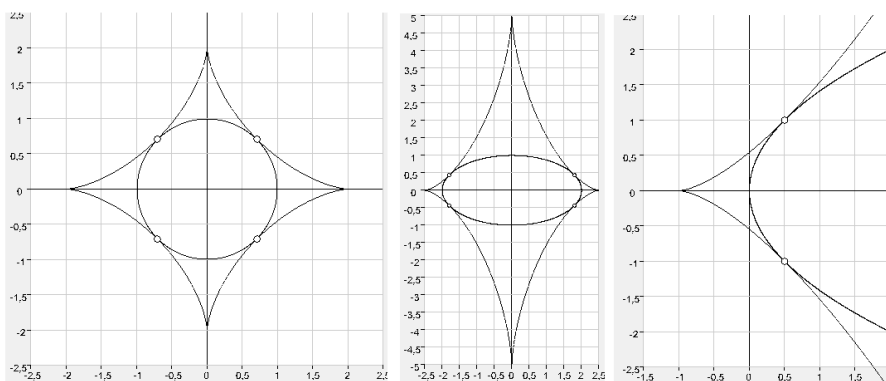
$$E(t) = (a \cos t, b \sin t) - \frac{g(t)}{ab} (b \cos t, -a \sin t), \text{ ak } g(t) \neq 0$$

V súradniciach máme takéto vyjadrenie evolúty elipsy: $x(t) = \frac{a^2+b^2}{a} \cos^3 t$, $y(t) = \frac{a^2+b^2}{b} \sin^3 t$. Je zrejmé, že táto krivka je obrazom astroidy $Q(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ v afinnej transformácii $x^* = \frac{a^2+b^2}{a}x$ a $y^* = \frac{a^2+b^2}{b}y$, pozri obrázok 3.5 v strede.

Príklad 22: Z príkladu 19 vyplýva, že evolúta paraboly $P(t) = (\frac{t^2}{2p}, t)$, $t \in (-\infty, \infty)$ je vyjadrená takto:

$$E(t) = (t^2 p, t) + \frac{t^2 - p^2}{p} \left(1, \frac{t}{p}\right), \text{ ak } |t| \neq p$$

V súradniciach máme takéto vyjadrenie evolúty paraboly: $x(t) = \frac{3}{2p}t^2 - \frac{p}{2}$, $y(t) = \frac{1}{p^2}t^3$. Je zrejmé, že táto krivka je obrazom semikubickej paraboly $Q(t) = (t^2, t^3)$ v afinnej transformácii $x^* = \frac{3}{2p}x - \frac{p}{2}$ a $y^* = \frac{1}{p^2}y$, pozri obrázok 3.5 vpravo.



Obr. 3.5: Evolúta euklidovskej kružnice, euklidovskej elipsy a paraboly

Poznámka: Z príkladu 21 a príkladu 22 jasne vyplýva, že evolúty paraboly a elipsy v pseudoeklidovskej rovine vyzerajú podobne ako tie v euklidovskej rovine, pozri príklady 7 a 8. Na druhej strane, evolúta euklidovskej kružnice z príkladu 20 je veľmi odlišná od evolúty v euklidovskej rovine z príkladu 6. Kým evolúta v euklidovskej rovine degeneruje na jeden bod, v pseudoeklidovskom prípade je to krivka.

Poznámka: Všimnime si, že z obrázku 3.5 jasne vyplýva, že na evolútach uvažovaných kriviek vznikajú body vratu prvého druhu práve v ich vrcholoch vypočítaných v príkladoch 12, 13 a 14, tak ako o tejto vlastnosti bodov evolúty hovorí veta 3.2.2.

Poznámka: Iná veľmi dôležitá vlastnosť evolúty v pseudoeklidovskej rovine je, že krivka nepretína svoju evolútu [ST11], Proposition 3.3. Ako je dobre známe,

Evolúta krivky ležiacej v pseudoeklidovskej rovine

toto neplatí v euklidovskej rovine, lebo napríklad elipsa pretína svoju evolútu, pozri obrázok 1.9.

Projekt dizertačnej práce

V tejto kapitole navrhujeme plán našej ďalšej práce. Naš výskum bude zameraný na štúdium vybraných metrických konštrukcií kriviek, ako sú evolúty, evolventy a pedálne krivky. Pozornosť bude venovaná aj oskulačnej pseudokružnici krivky ležiacej v pseudoeuklidovskej rovine. Cieľom bude skúmať singularity vznikajúce na spomínaných krivkách.

Kapitola je rozdelená do štyroch podkapitol. Každá z nich opisuje možnosti výskumu v stanovenej oblasti.

Oskulačná pseudokružnica krivky

Oskulačnej pseudokružnici krivky ležiacej v pseudoeuklidovskej rovine je v tejto práci venovaná podkapitola 3.1. Opísali sme základné vlastnosti pseudokružníc, ktoré sú z pohľadu euklidovskej geometrie rovnoosé hyperboly. Zdefinovali sme oskulačnú pseudokružnicu krivky a uviedli jej základné vlastnosti v pseudoeuklidovskej rovine, pričom sme poukázali na odlišnosti oproti euklidovskému prípadu, ktoré sú spôsobené zmenou skalárneho súčinu. Príklady v podkapitole 3.1 nám umožnili ilustráciu oskulačnej pseudokružnice vybraných kriviek.

V predchádzajúcom výskume sme sa zaoberali opisom styku krivky a oskulačnej kružnice ležiacej v klasickej euklidovskej rovine, pričom sme skúmali rád styku týchto kriviek vo vrchole vyššieho rádu. Výsledky dosiahnuté v tomto výskume sú opísané v podkapitole 1.2. Zistilo sa, že čím má spoločný vrchol oskulačnej kružnice a krivky vyšší rád, tým budú tieto krivky k sebe tesnejšie priložené v okolí spoločného bodu.

Prechodom k pseudoeuklidovskej geometrii sa euklidovská oskulačná kružnica mení na oskulačnú pseudokružnicu, čiže z euklidovského pohľadu sa kružnica nahradí rovnoosou hyperbolou. Otvára sa teda otázka, či rád styku krivky a oskulačnej pseudokružnice bude opäť závisieť od rádu spoločného vrchola. Keďže styk kriviek je afinná vlastnosť, nemení sa pri zmene euklidovskej roviny na pseudoeuklidovskú. Predpokladáme teda, že rád vrchola aj v tomto prípade ovplyvní rád styku uvažovaných kriviek. Naším cieľom je podrobne dokázať túto vlastnosť pre krivky a k nim prislúchajúce oskulačné pseudokružnice ležiace v pseudoeuklidovskej rovine. Idea postupu je rovnaká, ako sa uvádza v podkapitole 1.2. V prvom rade si vhodne parametrizujeme oskulačnú pseudokružnicu prirodzenou parametrizáciou a následne vyjadríme derivácie n -tého rádu tejto parametrizácie. Podobne budeme uvažovať krivku danú prirodzenou parametrizáciou a počítať n -tú deriváciu tejto parametrizácie. Veľmi užitočným nástrojom pri tomto počítaní budú Frenetove vzorce z vety 2.2.5 a funkcie typu $A_m(k)$ z definície 1.1.16. Následne budeme uvažovať, že spoločným bodom krivky a oskulačnej pseudokružnice je vrchol vyššieho rádu a použitím definície 1.1.17 ukážeme, ako rád spoločného vrcholu ovplyvní rád ich styku.

Evolúta krivky v pseudoeuklidovskej rovine

Evolúte krivky ležiacej v pseudoeuklidovskej rovine je venovaná podkapitola 3.2. Zaviedla sa jej definícia a vo vete 3.2.2 sa ukázalo, že body evolúty majú v tejto rovine podobné vlastnosti ako v euklidovskej rovine. Vizualizáciou evolúty niektorých vybraných kriviek (obrázok 3.5) sa ukázalo, že v pseudoeuklidovskej rovine sa evolúta kružnice výrazne líši od jej evolúty v euklidovskej rovine.

Vieme, že vrcholom krivky prislúcha na jej evolúte singulárny bod. Cieľom je skúmať, ako rád vrchola krivky ovplyvní singularitu vznikajúcu na evolúte. Budeme sa snažiť nájsť súvis medzi rádom vrchola krivky a typom singularity na evolúte.

Pri skúmaní singularít bude naše úsilie zamerané na preskúmanie konkrétnych prí-

kladov, na základe ktorých sformulujeme hypotézu hovoriacu o súvisi rádu singularity bodu evolúty krivky a vrcholu krivky. Na základe nej vyslovíme tvrdenie hovoriace o tomto vzťahu, ktoré sa budeme snažiť dokázať. Opäť budeme pracovať s deriváciou evolúty všeobecného rádu. Keďže už jej tretia derivácia sa ukazuje byť pomerne komplikovaná (pozri (3.11)), pri vyjadrení n -tej derivácie budeme opäť pracovať s funkciami typu $A_m(k)$. Samozrejmosťou je používanie Frenetových vzorcov.

Z vizualizácie evolút (obrázok 3.5) sa vynárajú ďalšie hypotézy o evolútach. Pre nesvetelné body krivky nie je evolúta definovaná, lebo v nich nie je definovaná krivosť. Podľa obrázku 3.5 by sa dalo očakávať, že prejdúc k limite pre parameter blížiaci sa k hodnote parametra svetelného bodu sa dá chýbajúci bod evolúty dedefinovať tak, aby vznikla regulárna krivka. Okrem toho sa z vizualizácie dá usúdiť aj to, že evolúta uzavretej krivky leží vždy vo vonkajšej oblasti vzhľadom na pôvodnú krivku. Ďalším z cieľov bude presnejšia formulácia a dôkaz tvrdení hovoriacich o týchto vlastnostiach evolúty.

Evolventa, rovnobežné krivky a pedálne krivky v pseudo-euklidovskej rovine

Konstruktívne evolvent, rovnobežných a pedálnych kriviek patria medzi metrické konštrukcie. Tieto krivky a ich vlastnosti sú relatívne podrobne opísané v euklidovskej rovine. Rovnako ako na evolúte, aj na týchto krivkách vznikajú v euklidovskej rovine singulárne body. Ich definícií a opisu singularít na nich vznikajúcich sú venované podkapitoly 1.3.2, 1.3.3 a 1.3.4.

Evolventám, rovnobežným ani pedálnym krivkám sme sa v doterajšom výskume nevenovali. Naším cieľom je zaviesť ich definície a vysloviť tvrdenia o singularitách na nich vznikajúcich v pseudo-euklidovskej rovine. Tieto tvrdenia budú pravdepodobne veľmi podobné tým, ktoré platia v euklidovskom prípade. Následne sa budeme venovať klasifikácii singularít týchto kriviek, ktoré v prípade evolventy prislúchajú vr-

cholom rôzneho rádu na krivke a v prípade pedálnej krivky inflexným bodom rôzneho rádu. V prípade rovnobežných kriviek budeme skúmať singularitu pre situáciu, keď je odpovedajúci bod pôvodnej krivky vrcholom ľubovoľného rádu.

Singularity vznikajúce na rovnobežných krivkách v euklidovskej geometrii boli spracované v diplomovej práci [MAK11]. Singularitami na pedálnych krivkách v euklidovskom prípade sa venuje pripravovaná diplomová práca [FOL12].

Vizualizácia dosiahnutých výsledkov

Súčasťou našej budúcej práce bude aj vypracovanie vizualizačných nástrojov, ktoré budú slúžiť na priblíženie výsledkov dosiahnutých počas nášho výskumu. Tieto výsledky priblížime nielen formou obrázkov, ale aj animácií. Tie môžu podporiť tvorbu nových hypotéz o vlastnostiach skúmaných metrických konštrukcií kriviek a singularít na nich vznikajúcich.

Literatúra

- [ABS00] R. AIT-HADDOU, L. BIARD, and M.A. SLAWINSKI. Minkowski Isoperimetric-hodograph Curves. *Computer Aided Geometric Design* 17, Elsevier Science B.V., 2000.
- [BAK10] V. BAKUROVÁ. Oskulačná kružnica krivky vo vrchole vyššieho rádu, Diplomová práca. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského, Bratislava, 2010.
- [BAK11a] V. BAKUROVÁ. On osculating pseudo-circles of curves in the pseudo-euclidean plane. In *Proceedings of Symposium on Computer Geometry SCG 2011*, pages 5–12. ISBN 978-80-227-3580-3, Slovak University of Technology in Bratislava, Publishing House of STU, 2011.
- [BAK11b] V. BAKUROVÁ. Styk krivky a oskulačnej kružnice vo vrchole vyššieho rádu. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského, Bratislava, 2011.
- [BCP03] T. BANCHOFF, S. CHERN, and W. POHL. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Dostupné na internete: http://www.math.brown.edu/~banchoff/ma106_2003/chern1.pdf, 2003.
- [BER09] M. BERGER. *Geometry II*. ISBN 978-3-540-17015-0, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009.
- [BIN10] BING YE WU. Some results on the geometry of Minkowski plane. pages 177–184. *Archivum Mathematicum*, Brno, 2010.

- [BO07] M. BOŽEK. *Krivky I - učebné texty*. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského, Bratislava, 2007.
- [BO08] M. BOŽEK. O nesprávnej predstave oskulačnej kružnice rovinnej krivky. In *Zborník príspevkov z konferencie EMATIK 2008*, pages 11–18. ISBN 978-80-89186-55-6, Knižničné a edičné centrum FMFI UK, Bratislava, 2008.
- [BO10] M. BOŽEK. *Krivky III - učebné texty*. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského, Bratislava, 2010.
- [BO11] M. BOŽEK. On geometry of differentiable curves in the pseudo-euclidean plane. In *Proceedings of Symposium on Computer Geometry SCG 2011*, pages 23–28. ISBN 978-80-227-3580-3, Slovak University of Technology in Bratislava, Publishing House of STU, 2011.
- [BZE10] H. BALGETIR ÖZTEKIN and M. ERGÜT. Euler-Savary's Formula for the Planar Curves in Two Dimensional Lightlike Cone. page Vol. 1. International Journal of Mathematical Combinatorics, 2010.
- [FOL12] G. FOLTÁN. Rovinné pedálne krivky, Pripravovaná diplomová práca. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského, Bratislava, 2012.
- [GIB01] C. G. GIBSON. *Elementary Geometry of Differentiable Curves: an Undergraduate Introduction*. Cambridge University Press, 2001.
- [IKA03] T. IKAWA. Euler - Savary's Formula on Minkowski Geometry. page Vol.8. Balkan Journal of Geometry and Its Applications, Geometry Balkan Press, 2003.
- [JE09] F. JEŽEK. *Diferenciální geometrie - Pomocný učební text - díl I*. Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd, Plzeň,

2009. Dostupné na internete: http://www.fd.cvut.cz/personal/voracsar/GeometriePG/PGR020/DG_Jezek01.pdf.
- [KJ] J. KOSINKA and B. JÜTTLER. Cubic Helices in Minkowski Space. page 69. Johannes Kepler University, Institute of Applied Geometry, Linz, Austria.
- [KL09] J. KOSINKA and M. LÁVIČKA. On Rational Minkowski Pythagorean Hodograph Curves. University of Oslo, 2009.
- [MAK11] S. MAKÚCHOVÁ. Rovnobežky hladkých kriviek, Diplomová práca. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského, Bratislava, 2011.
- [SCH10] T. SCHIFRIN. *DIFFERENTIAL GEOMETRY: A First Course in Curves and Surfaces*. University of Georgia, 2010. Dostupné na internete: <http://www.math.uga.edu/~shifrin/ShifrinDiffGeo.pdf>.
- [ST11] A. SALOOM and F. TARI. *Curves in the Minkowski plane and their contact with pseudo-circles*. Durham University, Department of Mathematical Sciences, Durham, UK, 2011.
- [YT08] S. YILMAZ and M. TURGUT. On the Differential Geometry of the Curves in Minkowski Space-time I. page Vol. 3. Int. J. Contemp. Math. Sciences, 2008.