UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Styk krivky a oskulačnej kružnice vo vrchole vyššieho rádu

Rigorózna práca

Viktória Bakurová

Bratislava 2010

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Styk krivky a oskulačnej kružnice vo vrchole vyššieho rádu

Rigorózna práca

Študijný odbor: Počítačová grafika a geometria

Viktória Bakurová

Bratislava 2010

Čestné prehlásenie

Čestne prehlasujem, že som rigoróznu prácu vypracovala samostatne s použitím uvedenej odbornej literatúry.

V Bratislave dňa 10. 01. 2011

. . . .

Viktória Bakurová

Abstrakt

BAKUROVÁ, Viktória. Styk krivky a oskulačnej kružnice vo vrchole vyššieho rádu [rigorózna práca]. Univerzita Komenského v Bratislave. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky; Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky. Bratislava: FMFI UK, 2010.

Rigorózna práca *Styk oskulačnej kružnice a krivky vo vrchole vyššieho rádu* sa zaoberá problematikou styku krivky a k nej zostrojenej oskulačnej kružnice vo vrchole vyššieho rádu. Keďže táto práca vznikla ako pokračovanie diplomovej práce *Oskulačná kružnica krivky vo vrchole vyššieho rádu*, pre úplné pochopenie celého textu práce by mal byť čitateľ oboznámený aj s niektorými pojmami, ktoré sa objavujú v texte diplomovej práce.

Hlavným cieľom práce je ukázať, ako rád spoločného vrchola krivky a oskulačnej kružnice ovplyvňuje rád styku týchto dvoch kriviek. Ukazuje sa, že oskulačná kružnica je ku krivke tým tesnejšie priložená, čím je rád ich spoločného vrchola vyšší. Vyslovené tvrdenia sú v práci ilustrované aj pomocou obrázkov.

Kľúčové slová: krivka, prirodzená parametrizácia krivky, styk kriviek, oskulačná kružnica, vrchol krivky, vrchol vyššieho rádu

Obsah

Zoznam obrázkov

Úvod

Motivácia pre vznik práce *Styk krivky a oskulačnej kružnice vo vrchole vyššieho rádu* vznikala postupne v čase tvorby inej práce s podobným názvom a predsa iným obsahom. Je to práca *Oskulačná kružnica krivky vo vrchole vyššieho rádu*, ktorá bola na jar roku 2010 úspešne obhájená ako diplomová práca na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky na Univerzite Komenského v Bratislave.

Spomínaná diplomová práca sa zaoberá vzájomným vzťahom oskulačnej kružnice a krivky vo vrcholoch vyššieho rádu. V literatúre zaoberajúcej sa pojmom rovinná krivka a oskulačná kružnica sa málokedy spomína pojem vrchol vyššieho rádu. Preto bolo zaujímavé zistiť, že rád vrcholu a oskulačná kružnica majú súvis. Zistilo sa, že vzájomná poloha oskulačnej kružnice a krivky v okolí ich spoločného bodu závisí od parity rádu vrchola, v ktorom je oskulačná kružnica k danej rovinnej krivke zostrojená.

Pri vizualizácii výsledkov dosiahnutých v práci *Oskulačná kružnica krivky vo vrchole vyššieho rádu* sa črtala iná zaujímavá vlastnosť oskulačnej kružnice a krivky vo vrchole vyššieho rádu. Vznikla hypotéza, že rád vrcholu má súvis aj s rádom styku týchto dvoch kriviek. Táto hypotéza sa v rámci tvorby diplomovej práce kvôli časovým obmedzeniam nedokázala ani nevyvrátila.

Táto práca poskytuje dostatočný priestor na to, aby sme spomínanú hypotézu overili. Systematicky budujeme úvahy o styku krivky a oskulačnej kružnice v rôznych bodoch krivky, vyslovujeme pomocné vety, ktoré následne dokazujeme a postupne sa dopracujeme až k vysloveniu hlavného tvrdenia práce, ktoré hovorí o vzťahu rádu spoločného vrchola krivky a oskulačnej kružnice a rádu styku týchto kriviek.

Práca je rozdelená na dve kapitoly. Prvá kapitola je zhrnutím základných pojmov a viet z práce *Oskulačná kružnica krivky vo vrchole vyššieho rádu*, ktorých osvojenie je nevyhnutné k porozumeniu tejto práce. Hlavnú časť práce tvorí druhá kapitola nazvaná *Styk krivky a oskulačnej kružnice vo vrchole vyššieho rádu*. V tejto kapitole sú vyslovené a dokázané tvrdenia hovoriace o styku krivky a oskulačnej kružnice vo všeobecnom bode a v obyčajnom vrchole. Následne sa hovorí o vzťahu rádu styku a rádu vrchola, ktorý je spoločným bodom týchto kriviek.

Kapitola 1

Rovinné krivky a ich vybrané vlastnosti

Vzniku tejto práce predchádzal vznik diplomovej práce s názvom *Oskulačná kružnica krivky vo vrchole vyššieho rádu.* V diplomovej práci sa zisťovalo to, aká je vzájomná poloha oskulačnej kružnice a krivky vo vrcholoch rôzneho rádu. Pri tvorbe tejto práce sa objavila iná zaujímavá vlastnosť kriviek, ktorá súvisí so stykom oskulačnej kružnice a krivky vo vrchole vyššieho rádu. V tejto práci sa budeme snažiť ukázať, ako rád styku oskulačnej kružnice a krivky závisí od rádu spoločného vrchola týchto dvoch kriviek.

Keďže táto práca vychádza už zo spomínanej diplomovej práce, predpokladáme, že čitateľ ovláda základnú teóriu týkajúcu sa rovinných kriviek a je oboznámený s pojmami, ktoré sa objavili a používali v práci *Oskulačná kružnica krivky vo vrchole vyššieho rádu.* V prvej kapitole tejto práce uvedemie iba zhrnutie najdôležitejších pojmov týkajúcich sa kriviek a vyslovíme tvrdenia, ktoré budú v práci ďalej používané. Všetky dôkazy, odvodenia a ďalšie vysvetlenia nájde čitateľ v diplomovej práci [BAK10], ako aj v literatúre zaoberajúcej sa rovinnými krivkami, napr. [GIB01], [BO07], [JE09], [SCH10], [BCP03].

1.1 Zhrnutie potrebných poznatkov o krivke

Keďže v práci budeme pracovať s krivkou, ktorá je daná prirodzenou parametrizáciou, preto aj vety, ktoré uvedieme, sa budú týkať väčšinou krivky vyjadrenej v prirodzenej parametrizácii. Na úvod uvedieme definíciu parametrizácie krivky a definíciu prirodzenej parametrizácie krivky a jej základné vlastnosti.

Definícia 1.1.1 (Parametrické vyjadrenie krivky v rovine)**:**
Pod parametrickým vyjadrením krivky v rovine rozumieme bodovú funkciu jednej premennej $P : I \to \mathbb{E}^2$*, kde* $I \subseteq \mathbb{R}$*, pričom požadujeme hladkosť a regulárnosť tejto funkcie. Pod hladkosťou zobrazenia* $P(t) = (x(t), y(t))$ *rozumieme skutočnosť, že v každom parametri* t *majú výsledné komponenty* x *a* y *derivácie všetkých rádov. Regulárnosť zobrazenia znamená, že pre ľubovoľné* $t \in I$ *je* $P'(t) \neq 0$*.*

Na základe zavedenia pojmu parametrického vyjadrenia krivky teraz môžeme krivku chápať takto: krivka je určená svojou parametrizáciou, t.j. hladkou a regulárnou (až na výnimku konečného počtu bodov) bodovou funkciou jednej premennej.

Definícia 1.1.2 (Prirodzená parametrizácia krivky [JE09])**:**
Krivka je daná prirodzenou parametrizáciou práve vtedy, ak pre ľubovoľné $t \in \langle a, b\rangle$ *platí, že* $|P'(t)| = 1$*.*

Veta 1.1.1 ([BO07])**:**
Základné vlastnosti prirodzenej parametrizácie sú:

1. $|P'(s)| = 1$
2. $P''(s) \perp P'(s)$
3. $\mathbf{t}(s) = P'(s)$, $\mathbf{n}(s) = \dfrac{P''(s)}{|P''(s)|}$

Veta 1.1.2 (Vektor dotyčnice a normály krivky [BO07])**:**
Na dotyčnici a normále krivky v jej neinflexnom bode ležia jednotkové vektory $\mathbf{t}$ *a* $\mathbf{n}$*, ktoré vznikajú ortonormalizáciou vektorov* P' *a* P''*:*

$$\mathbf{t} = \frac{P'}{|P'|},\ \mathbf{n} = \frac{(P'P')P'' - (P'P'')P'}{|(P'P')P'' - (P'P'')P'|}$$

Nazývajú sa vektor dotyčnice a normály krivky.

Poznámka: Ortonormálne vektory $\mathbf{t}$ a $\mathbf{n}$ tvoria Frenetov repér krivky v rovine.

Definícia 1.1.3 (Krivosť krivky danej parametricky [BO07]):
Krivosť rovinnej krivky $k(t)$ v bode krivky $P(t)$ je definovaná ako číslo

$$k(t) = \frac{|\det(P'(t), P''(t))|}{|P'(t)|^3}$$

Definícia 1.1.4 (Krivosť krivky danej prirodzenou parametrizáciou, [BO07]):
Krivosť rovinnej krivky $k(s)$ v bode krivky $P(s)$ danou prirodzenou parametrizáciou je definovaná ako číslo $k(s) = |\mathbf{t}'(s)| = |P''(s)|$, kde $\mathbf{t}(s)$ je vektor dotyčnice danej krivky.

Veta 1.1.3 (Frenetove vzorce, [SCH10]):
Pre rovinnú krivku danú prirodzenou parametrizáciou platí:

$$\mathbf{t}'(s) = k(s)\,\mathbf{n}(s) \tag{1.1}$$

$$\mathbf{n}'(s) = -k(s)\,\mathbf{t}(s) \tag{1.2}$$

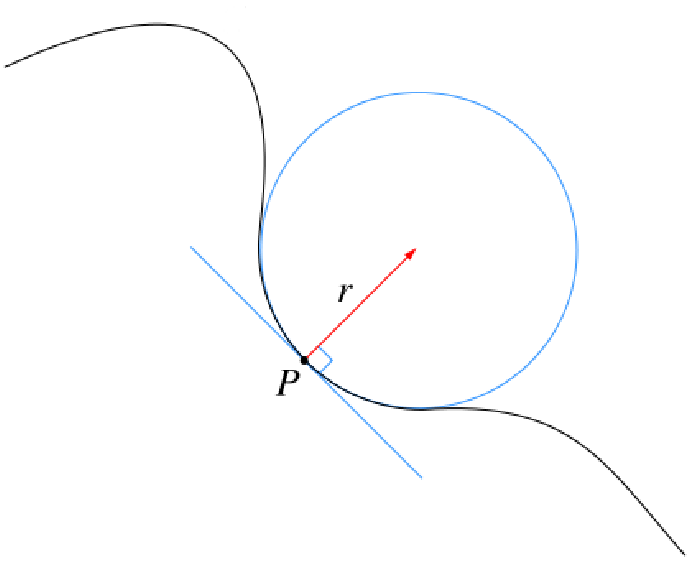
Definícia 1.1.5 (Oskulačná kružnica rovinnej krivky, [BO08]):
Oskulačnou kružnicou krivky v regulárnom bode $P(t)$ nazývame kružnicu so stredom v bode $S(t)$ a s polomerom $r(t)$, kde $S(t)$ je stred krivosti vyjadrený vzťahom

$$S(t) = P(t) + r(t)\,\mathbf{n}(t)$$

a $r(t)$ je polomer krivosti v bode $P(t)$ daný ako

$$r(t) = \frac{1}{k(t)} = \frac{1}{|P''(s)|}.$$

Poznámka: Z vyjadrenia stredu oskulačnej kružnice vyplýva, že tento bod leží na normále krivky v danom bode.



Obr. 1.1: Oskulačná kružnica krivky

Zdroj: Wikipedia: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Osculating_circle.svg

Definícia 1.1.6 (Obyčajný vrchol krivky [BO08]):
Nech je daná rovinná krivka $P(t)$, $t \in I$ *a bod* $P(t_0)$, $t_0 \in I$ *je jej vrchol. Vrchol* $P(t_0)$ *sa nazýva obyčajný vrchol rovinnej krivky, ak pre krivosť krivky platí:* $k'(t_0) = 0$ *a* $k''(t_0) \neq 0$. *Obyčajný vrchol krivky budeme nazývať vrcholom prvého rádu.*

Poznámka: Body krivky, ktoré nie sú vrcholmi, nazývame všeobecné body krivky.

Definícia 1.1.7 (Vrchol vyššieho rádu [GIB01]):
Nech je daná rovinná krivka $P(t)$, $t \in I$ *a nech* $P(t_0)$, $t_0 \in I$ *je jej vrchol taký, že* $k'(t_0) = 0, \ldots, k^{(k)}(t_0) = 0$, $k \geq 2$. *Potom vrchol* $P(t_0)$ *nazývame vrchol aspoň* k*-teho rádu krivky* $P(t)$.
Hovoríme, že krivka má v bode $P(t_0)$, $t_0 \in I$ *vrchol rádu práve* k *práve vtedy, ak pre derivácie krivosti tejto krivky platí:* $k'(t_0) = 0, \ldots, k^{(k)}(t_0) = 0 \wedge k^{(k+1)}(t_0) \neq 0$, $k \geq 2$.

Definícia 1.1.8 ([BAK10]):
Majme danú funkciu $\varphi : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}$, $m \geq 1$, *diferencovateľnú a takú, že spĺňa*

podmienku: $\varphi(x_0,0,\ldots,0)=0$ *pre všetky* $x_0\in\mathbb{R}$. *Označme* A_m *množinu všetkých funkcií, ktoré majú tieto vlastnosti, teda:*

$$A_m=\{\varphi:\mathbb{R}^{m+1}\to\mathbb{R},\varphi \text{ je hladká a } \varphi(x_0,0,\ldots,0)=0 \text{ pre všetky } x_0\in\mathbb{R}\},\ m\geq 1$$

Definícia 1.1.9 ([BAK10]):
Nech je daná funkcia φ *majúca vlastnosti uvedené v predchádzajúcej definícii, teda* $\varphi\in A_m$, $m\geq 1$, *nech* $k:I\to\mathbb{R}$ *je hladká funkcia a* $k^{(1)}(s),\ldots,k^{(m)}(s), s\in I$ *sú jej príslušné derivácie. Potom množinu všetkých zložených funkcií* $F(s)=\varphi\left(k(s),k^{(1)}(s),\ldots,k^{(m)}(s)\right), s\in I$ *budeme označovať* $A_m(k)$ *a teda platí:*

$$A_m(k)=\{F(s)=\varphi\left(k(s),k^{(1)}(s),\ldots,k^{(m)}(s)\right), s\in I\wedge\varphi\in A_m\},\ m\geq 1$$

O funkcii z množiny $A_m(k)$ *budeme tiež hovoriť, že je funkciou typu* $A_m(k)$.

Poznámka: Pre danú hladkú funkciu $f(s)$ je funkcia $F(s)$ funkciou typu $A_m(k)$ práve vtedy, keď existuje taká funkcia φ z A_m, že $F(s)=\varphi(k(s),...,k^{(m)}(s))$.

Poznámka: Dôvod, prečo uvádzame množinu funkcií $A_m(k)$ je ten, že v niektorých výpočtoch v ďalšej časti práce sa stretneme práve s funkciami z tejto množiny, ktoré obsahujú rôzne kombinácie krivosti krivky (hladkej funkcie) a jej derivácií, pričom nie vždy je dôležitý presný tvar týchto funkcií. Stačí vedieť, derivácie ktorého najvyššieho rádu obsahujú.

Veta 1.1.4 (Pravidlá pre počítanie s funkciami typu $A_m(k)$, [BAK10]):
Nech m, n *sú prirodzené čísla a nech* $a\left(k,\ldots k^{(m)}\right)\in A_m(k)$, $b\left(k,\ldots k^{(n)}\right)\in A_n(k)$, $c\in\mathbb{R}$. *Potom:*
1. $ka\left(k,\ldots k^{(m)}\right)\in A_m(k)$
2. $k^{(n)}a\left(k,\ldots k^{(m)}\right)\in A_l(k)$, *kde* $l=\max\{m,n\}$
3. $a\left(k,\ldots k^{(m)}\right)+b\left(k,\ldots k^{(n)}\right)\in A_l(k)$, *kde* $l=\max\{m,n\}$
4. $ca\left(k,\ldots k^{(m)}\right)\in A_m(k)$
5. $\left(a\left(k,\ldots k^{(m)}\right)\right)'\in A_{m+1}(k)$

Poznámka: V tejto práci budeme často pracovať s deriváciami rôznych rádov. V ďalšom texte budeme pod nultou deriváciou funkcie f rozumieť funkciu samu, to znamená, že $f^{(0)} = f$.

Po zhrnutí najdôležitejších poznatkov o rovinnej krivke, oskulačnej kružnici a o vrchole vyššieho rádu, ktoré sa ďalej v práci objavujú a používajú, môžeme pristúpiť k vysloveniu tvrdení týkajúcich sa hlavnej témy práce, a to styku oskulačnej kružnice a krivky.

Kapitola 2

Styk krivky a oskulačnej kružnice vo vrchole vyššieho rádu

2.1 Styk kriviek

Ako aj samotný názov práce a tejto kapitoly napovedá, v tejto kapitole sa budeme bližšie zaoberať pojmom styk kriviek a neskôr ukážeme, ako súvisí styk krivky a jej oskulačnej kružnice s vrcholom vyššieho rádu.

Definícia 2.1.1 (Styk kriviek, [BO07])**:**
Nech $P_1(s)$ a $P_2(s)$ sú rovinné krivky vyjadrené v prirodzenej parametrizácii. Potom hovoríme, že krivky $P_1(s)$ a $P_2(s)$ majú v spoločnom bode $P_1(s_0) = P_2(s_0)$ styk rádu aspoň k, ak platí:

$$P_1^{(i)}(s_0) = P_2^{(i)}(s_0) \qquad \forall i = 0, \ldots, k$$

Krivky $P_1(s)$ a $P_2(s)$ majú v spoločnom bode $P_1(s_0) = P_2(s_0)$ styk rádu práve k, ak platí:

$$P_1^{(i)}(s_0) = P_2^{(i)}(s_0) \;\; \forall i = 0, \ldots, k \quad \wedge \quad P_1^{(k+1)}(s_0) \neq P_2^{(k+1)}(s_0)$$

Z predchádzajúcej definície je zrejmé, že styk kriviek vyjadruje, ako "tesne"sú dve krivky v spoločnom bode k sebe priložené. Samotná definícia styku dvoch kriviek sa na zisťovanie rádu styku používa málokedy, pretože nájsť prirodzenú parametrizáciu krivky nemusí byť vždy jednoduché. Aj keď v tejto práci budeme túto definíciu na zisťovanie rádu styku krivky a jej oskulačnej kružnice používať, pre úplnosť teórie hovoriacej o styku kriviek uvedieme vetu, ktorá umožňuje zisťovanie styku kriviek s ľubovoľnou, nie nutne prirodzenou parametrizáciou. Vetu uvedieme bez dôkazu. Ten čitateľ nájde v literatúre pojednávajúcej o krivkách.

Veta 2.1.1 (Beta podmienky styku rádu 2, [BO07])**:**
Krivky $P_1(t)$ a $P_2(t)$ majú v spoločnom bode $P_1(t_1) = P_2(t_2)$ styk rádu 2 práve vtedy, keď existujú také čísla β_1 a β_2, pričom $\beta_1 \neq 0$, že platí:

$$P_2^{(1)}(t_2) = \beta_1 P_1^{(1)}(t_1),$$

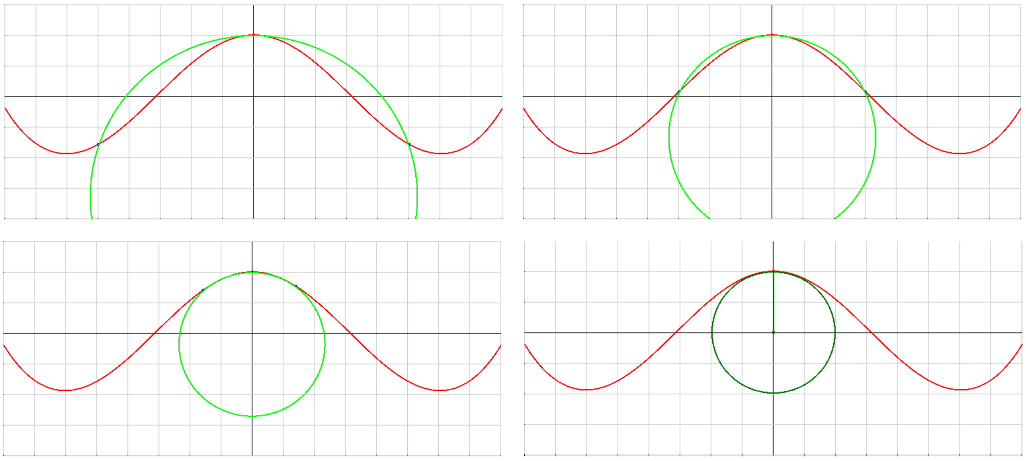
$$P_2^{(2)}(t_2) = \beta_1^2 P_1^{(2)}(t_1) + \beta_2 P_1^{(1)}(t_1).$$

Poznámka: Predchádzajúca veta hovorí o beta podmienkach styku rádu 2. Analogicky sa dajú napísať aj beta podmienky styku vyššieho rádu. Napríklad, pre styk rádu 3 by k uvedeným podmienkam pribudla podmienka v tvare $\mathrm{P}_2^{(3)}(t_2) = \beta_1^3 P_1^{(3)}(t_1) + 3\beta_1\beta_2 P_1^{(2)}(t_1) + \beta_3 P_1^{(1)}(t_1)$.

Poznámka: Podmienky styku rádu 2 majú analogickú štruktúru ako vzorce pre výpočet prvej a druhej derivácie zloženej funkcie. Táto podobnosť nie je náhodná a platí aj pre styk rádov vyšších ako 2.

Pretože v tejto práci pracujeme s krivkou a jej oskulačnou kružnicou a hovoríme o ich styku, je potrebné uviesť vetu hovoriacu o vzťahu oskulačnej kružnici a krivky v spoločnom bode.

Veta 2.1.2 ([OSC])**:**
Oskulačná kružnica krivky $P(t)$ v bode $P_0 = P(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$ je limitou polôh kružníc prechádzajúcich bodom P_0 a dvoma rôznymi bodmi $P_1 = P(t_1) = (x(t_1), y(t_1))$ a $P_2 = P(t_2) = (x(t_2), y(t_2))$, ktoré sa "blížia" k bodu P_0, t.j. parametre t_1 a t_2 idú v limite k t_0 a platí, že $t_1 < t_0 < t_2$.



Obr. 2.1: Oskulačná kružnica krivky P v bode P_0 ako limita bodov blížiacich sa k bodu P_0

Poznámka: Predchádzajúca veta hovorí, že oskulačná kružnica je najtesnejšie priloženou kružnicou ku krivke spomedzi všetkých kružníc zostrojených v danom bode. Dôkaz vety neuvádzame, nájdete ho v práci *Oskulačná kružnica krivky vo vrchole vyššieho rádu* [BAK10].

2.2 Prirodzená parametrizácia krivky a oskulačnej kružnice a ich derivácie

V tejto práci sa budeme zaoberať rádom styku oskulačnej kružnice a krivky v spoločnom vrchole, ak bude tento vrchol vyššieho rádu. Pripomeňme si, že ku každej krivke vieme zostrojiť v nejakom jej bode oskulačnú kružnicu. Táto kružnica je najtesnejšie priloženou kružnicou k danej krivke spomedzi všetkých kružníc prechádzajúcich spoločným bodom krivky a kružnice. O styku krivky a oskulačnej kružnice je známe, že je rádu 2 alebo vyšší [GIB01](Lemma 8.2). Chceme ukázať, že rád ich styku súvisí s rádom vrchola, v ktorom je oskulačná kružnica zostrojená.

V celej podkapitole budeme predpokladať, že krivka je daná prirodzenou parametrizáciou $P_1(s)$. Aby sme mohli na zistenie rádu styku krivky a oskulačnej kružnice použiť priamo definíciu hovoriacu o styku dvoch kriviek, potrebujeme aj oskulačnú kružnicu krivky vyjadriť v prirodzenej parametrizácii. Pretože prirodzená parametrizácia krivky nie je určená jednoznačne, použijeme takú, ktorá nám naše ďalšie výpočty podstatne zjednoduší.

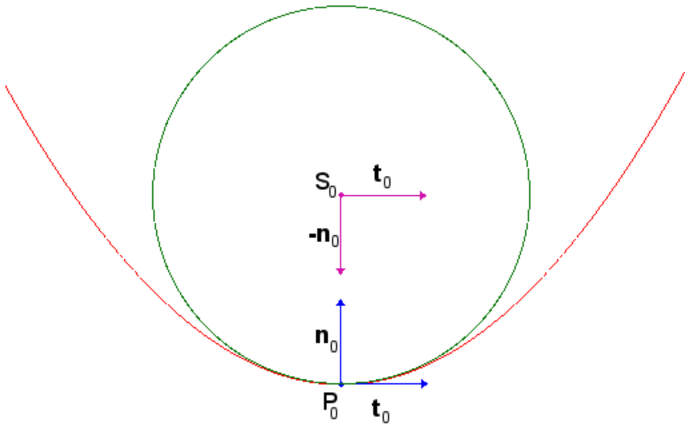
Veta 2.2.1 (Prirodzená parametrizácia oskulačnej kružnice krivky)**:**
Nech $P_1(s)$ je krivka daná prirodzenou parametrizáciou. Potom oskulačnú kružnicu danú k tejto krivke v bode $P_1(s_0)$ vieme v prirodzenej parametrizácii vyjadriť takto:

$$P_2(s) = S(s_0) - \left(r_0 \cos\frac{s}{r_0}\right)\mathbf{n}(s_0) + \left(r_0 \sin\frac{s}{r_0}\right)\mathbf{t}(s_0),$$

kde $S(s_0) = P_1(s_0) + \frac{1}{k(s_0)}\mathbf{n_0}$ je stred oskulačnej kružnice, $r_0 = \frac{1}{k(s_0)}$ je jej polomer, $\mathbf{t}(s_0)$ je jednotkový dotykový vektor krivky $P_1(s)$ v bode $P_1(s_0)$ a $\mathbf{n}(s_0)$ je jednotkový normálový vektor krivky $P_1(s)$ v bode $P_1(s_0)$. Spoločný bod oboch kriviek je $P_1(s_0) = P_2(0)$.

Dôkaz. Majme danú krivku a k nej zostrojenú oskulačnú kružnicu v bode $P_1(s_0)$. Majme v tomto bode daný jednotkový dotykový vektor krivky $\mathbf{t}(s_0)$ a $\mathbf{n}(s_0)$ jednotkový normálový vektor krivky. Uvažujme súradnicovú sústavu umiestnenú do stredu oskulačnej kružnice takú, že jej súradnicové osi budú na seba kolmé a druhý z nich bude prechádzať spoločným bodom krivky a kružnice, čiže bodom $P_1(s_0) = P_2(0)$. Keďže o strede oskulačnej kružnice vieme, že leží na normále krivky v spoločnom bode, je jasné, že prvý súradnicový vektor zvolenej súradnicovej sústavy je vektor $-\mathbf{n}(s_0)$. Z toho vyplýva, že druhý súradnicový vektor uvažovanej sústavy súradníc je $\mathbf{t}(s_0)$ a teda osklulačnú kružnicu vieme pomocou prirodzenej parametrizácie napísať ako $\mathrm{P}_2(s) = S(s_0) - \left(r_0 \cos\frac{s}{r_0}\right)\mathbf{n}(s_0) + \left(r_0 \sin\frac{s}{r_0}\right)\mathbf{t}(s_0)$. □

Poznámka: Kvôli prehľadnosti zápisov v nasledujúcom texte budeme parameter s zo zápisov vynechávať a ak budeme uvažovať o parametri s_0, použijeme miesto neho jednoducho index 0, napríklad miesto $P(s_0)$ budeme písať P_0, miesto $\mathbf{n}(s_0)$ napíšeme $\mathbf{n}_0$, a pod.



Obr. 2.2: Parametrizácia oskulačnej kružnice vo zvolenej súradnicovej sústave

Z definície styku dvoch kriviek vidíme, že rád styku závisí od derivácií vyšších rádov oboch kriviek. Pretože budeme pracovať s týmito deriváciami, nasledujúce vety budú hovoriť o tom, ako vyzerajú derivácie rádu n krivky P_1 a oskulačnej kružnice P_2 daných prirodzenou parametrizáciou.

Veta 2.2.2 (Derivácie n-tého rádu prirodzenej parametrizácie oskulačnej kružnice)**:** *Nech* $P_2(s) = S_0 - \left(r_0 \cos \frac{s}{r_0}\right) \mathbf{n}_0 + \left(r_0 \sin \frac{s}{r_0}\right) \mathbf{t}_0$ *je oskulačná kružnica ku krivke* P_1 *vyjadrená v prirodzenej parametrizácii, kde* S_0 *je jej stred,* r_0 *je jej polomer,* $\mathbf{t}_0$ *a* $\mathbf{n}_0$ *sú jednotkový dotykový a normálový vektor krivky* P_1 *v ich spoločnom bode. Potom pre derivácie n-tého rádu prirodzenej parametrizácie tejto krivky platí:*

1. *ak n je nepárne, tak*

$$P_2^{(n)}(s) = (-1)^{\frac{n+3}{2}} \frac{\mathbf{n}_0}{r_0^{n-1}} \sin \frac{s}{r_0} + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\mathbf{t}_0}{r_0^{n-1}} \cos \frac{s}{r_0}, \quad n \geq 1$$

2. *ak n je párne, tak*

$$P_2^{(n)}(s) = (-1)^{\frac{n}{2}+1} \frac{\mathbf{n}_0}{r_0^{n-1}} \cos \frac{s}{r_0} + (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{\mathbf{t}_0}{r_0^{n-1}} \sin \frac{s}{r_0}, \quad n \geq 2$$

Dôkaz. Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou.

1. Ukážeme, že veta platí pre $n = 1$ a $n = 2$. Pre parametrické vyjadrenie oskulačnej kružnice platí: $P_2(s) = S_0 - \left(r_0 \cos \frac{s}{r_0}\right) \mathbf{n}_0 + \left(r_0 \sin \frac{s}{r_0}\right) \mathbf{t}_0$. Derivovaním tohto vzťahu dostávame:

$$P_2^{(1)}(s) = -r_0 \left(-\sin \frac{s}{r_0}\right) \frac{1}{r_0}\mathbf{n}_0 + r_0 \left(\cos \frac{s}{r_0}\right) \frac{1}{r_0}\mathbf{t}_0 = \mathbf{n}_0 \sin \frac{s}{r_0} + \mathbf{t}_0 \cos \frac{s}{r_0}$$

Vzťah pre $n = 1$ naozaj platí. Následným derivovaním ukážeme platnosť aj pre $n = 2$.

$$P_2^{(2)}(s) = \mathbf{n}_0 \left(\cos \frac{s}{r_0}\right) \frac{1}{r_0} + \mathbf{t}_0 \left(-\sin \frac{s}{r_0}\right) \frac{1}{r_0} = \frac{\mathbf{n}_0}{r_0} \cos \frac{s}{r_0} - \frac{\mathbf{t}_0}{r_0} \sin \frac{s}{r_0}$$

2. Nech platí vzťah pre výpočet derivácie $n-1$-ého rádu prirodzenej parametrizácie oskulačnej kružnice, ak $n-1$ je nepárne. Ukážeme, že potom platí aj vzťah na výpočet n-tej derivácie párneho rádu.

Vyjadrením derivácie $n-1$-ého rádu pre $n-1$ nepárne a následným derivovaním dostávame:

$$P_2^{(n-1)}(s) = (-1)^{\frac{n+2}{2}} \frac{\mathbf{n}_0}{r_0^{n-2}} \sin \frac{s}{r_0} + (-1)^{\frac{n-2}{2}} \frac{\mathbf{t}_0}{r_0^{n-2}} \cos \frac{s}{r_0}$$

$$\begin{aligned} P_2^{(n)}(s) &= (-1)^{\frac{n+2}{2}} \frac{\mathbf{n}_0}{r_0^{n-2}} \left(\cos \frac{s}{r_0}\right) \frac{1}{r_0} + (-1)^{\frac{n-2}{2}} \frac{\mathbf{t}_0}{r_0^{n-2}} \left(-\sin \frac{s}{r_0}\right) \frac{1}{r_0} \\ &= (-1)^{\frac{n}{2}+1} \frac{\mathbf{n}_0}{r_0^{n-1}} \left(\cos \frac{s}{r_0}\right) + (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{\mathbf{t}_0}{r_0^{n-1}} \left(\sin \frac{s}{r_0}\right), \quad n \geq 2 \end{aligned}$$

Tým je vzťah pre n párne dokázaný.

3. Nech teraz platí vzťah pre výpočet derivácie $n-1$-ého rádu prirodzenej parametrizácie oskulačnej kružnice, ak $n-1$ je párne, ukážeme, že potom platí aj vzťah pre výpočet derivácie nepárneho rádu prirodzenej parametrizácie oskulačnej kružnice.

Vyjadrením derivácie $n-1$-ého rádu pre $n-1$ párne a následným derivovaním dostávame:

$$P_2^{(n-1)}(s) = (-1)^{\frac{n-1}{2}+1} \frac{\mathbf{n}_0}{r_0^{n-2}} \cos\frac{s}{r_0} + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\mathbf{t}_0}{r_0^{n-2}} \sin\frac{s}{r_0}$$

$$\begin{aligned} P_2^{(n)}(s) &= (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{\mathbf{n}_0}{r_0^{n-2}} \left(-\sin\frac{s}{r_0}\right)\frac{1}{r_0} + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\mathbf{t}_0}{r_0^{n-2}} \left(\cos\frac{s}{r_0}\right)\frac{1}{r_0} \\ &= (-1)^{\frac{n+3}{2}} \frac{\mathbf{n}_0}{r_0^{n-1}} \left(\sin\frac{s}{r_0}\right) + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\mathbf{t}_0}{r_0^{n-1}} \left(\cos\frac{s}{r_0}\right), \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

Tým je vzťah pre n nepárne dokázaný. □

Veta 2.2.3:

Majme danú krivku P_1 vyjadrenú v prirodzenej parametrizácii. Potom pre prvé štyri derivácie tejto krivky platí:

1. $P_1^{(1)} = \mathbf{t}$
2. $P_1^{(2)} = k\mathbf{n}$
3. $P_1^{(3)} = k^{(1)}\mathbf{n} - k^2\mathbf{t}$
4. $P_1^{(4)} = \mathbf{n}\left(k^{(2)} - k^3\right) + \mathbf{t}\left(-3kk^{(1)}\right)$

Dôkaz. Keďže krivku P_1 máme vyjadrenú prirodzenou parametrizáciou, je jasné, že pre jej prvú a druhú deriváciu platí: $P_1^{(1)} = \mathbf{t}$ a $P_1^{(2)} = k\mathbf{n}$. Na základe toho ukážeme, že vzťah platí pre $n = 3$ a pre $n = 4$.

Priamym derivovaním druhej derivácie danej krivky dostávame:

$$P_1^{(3)} = k^{(1)}\mathbf{n} - k^2\mathbf{t}$$

Ďalším derivovaním dostávame:

$$\begin{aligned} P_1^{(4)} &= k^{(2)}\mathbf{n} + k^{(1)}(-k\mathbf{t}) - k^2(k\mathbf{t}) - 2kk^{(1)}\mathbf{t} \\ &= \mathbf{n}\left(k^{(2)} - k^3\right) + \mathbf{t}\left(-3kk^{(1)}\right) \end{aligned}$$

□

Veta 2.2.4 (Derivácie n-tého rádu krivky danej prirodzenou parametrizáciou)**:** *Majme danú krivku P_1 vyjadrenú v prirodzenej parametrizácii. Potom pre derivácie n-tého rádu tejto krivky platí:*

1. *ak n je nepárne, tak*

$$\begin{aligned} P_1^{(n)} &= \mathbf{n}\left(k^{(n-2)} + a_n(k,\ldots,k^{(n-4)})\right) \\ &\quad + \mathbf{t}\left((-1)^{\frac{n+3}{2}}k^{n-1} + b_n(k,\ldots,k^{(n-3)})\right), n \geq 5 \end{aligned}$$

2. *ak n je párne, tak*

$$\begin{aligned} P_1^{(n)} &= \mathbf{n}\left((-1)^{\frac{n}{2}+1}k^{n-1} + k^{(n-2)} + a_n(k,\ldots,k^{(n-4)})\right) \\ &\quad + \mathbf{t}\left(b_n(k,\ldots,k^{(n-3)})\right), n \geq 6 \end{aligned}$$

kde k je krivosť krivky a $a_n(k,\ldots,k^{(n-4)})$ a $b_n(k,\ldots,k^{(n-3)})$ sú funkciu typu $A_{n-4}(k)$ resp. $A_{n-3}(k)$.

Dôkaz. Vetu dokážeme matematickou indukciou.

1. Vzťah z vety 2.2.3 pre výpočet štvrtej derivácie krivky vieme pomocou funkcie typu $A_m(k)$ napísať nasledovne:

$$\begin{aligned} P_1^{(4)} &= \mathbf{n}\left(k^{(2)} - k^3\right) + \mathbf{t}\left(-3kk^{(1)}\right) \\ &= \mathbf{n}\left(k^{(2)} - k^3\right) + \mathbf{t}\left(b_4(k,k^{(1)})\right) \end{aligned}$$

   Derivovaním tohto vzťahu dostávame:

$$\begin{aligned} P_1^{(5)} &= -k\mathbf{t}(k^{(2)} - k^3) + \mathbf{n}(k^{(3)} - 3k^2k^{(1)}) \\ &\quad + k\mathbf{n}(b_4(k,k^{(1)})) + \mathbf{t}(b_4(k,k^{(1)})') \end{aligned}$$

   Použitím vzťahov pre počítanie s funkciami typu $A_m(k)$ z vety 1.1.4, vyjadrenie piatej derivácie bude mať nasledovný tvar:

$$P_1^{(5)} = \mathbf{n}\left(k^{(3)} + a_5(k, k^{(1)})\right)$$
$$+\, \mathbf{t}\left(k^4 + b_5(k, k^{(1)}, k^{(2)})\right),$$

kde $a_5(k, k^{(1)}) = -3k^2k^{(1)} + kb_4(k, k^{(1)})$ a $b_5(k, k^{(1)}, k^{(2)}) = -kk^{(2)} + b_4(k, k^{(1)})'$.
Tým je vzťah pre $n = 5$ dokázaný.
Ďalším derivovaním dostaneme vzťah pre výpočet šiestej derivácie:

$$P_1^{(6)} = -k\mathbf{t}(k^{(3)} + a_5(k, k^{(1)})) + \mathbf{n}\left(k^{(4)} + a_5(k, k^{(1)})'\right)$$
$$+\, k\mathbf{n}\left(k^4 + b_5(k, k^{(1)}, k^{(2)})\right) + \mathbf{t}\left(4k^3k^{(1)} + b_5(k, k^{(1)}, k^{(2)})'\right)$$

Použitím vzťahov pre počítanie s funkciami typu $A_m(k)$ z vety 1.1.4, vyjadrenie šiestej derivácie bude mať nasledovný tvar:

$$P_1^{(6)} = \mathbf{n}\left(k^5 + k^{(4)} + a_6(k, k^{(1)}, k^{(2)})\right)$$
$$+\, \mathbf{t}\left(b_6(k, k^{(1)}, k^{(2)}, k^{(3)})\right),$$

kde $a_6(k, k^{(1)}, k^{(2)}) = a_5(k, k^{(1)})' + kb_5(k, k^{(1)}, k^{(2)})$ a $b_6(k, k^{(1)}, k^{(2)}, k^{(3)}) = -kk^{(3)} - ka_5(k, k^{(1)}) + 4k^3k^{(1)} + b_5(k, k^{(1)}, k^{(2)})'$. Ukázali sme teda, že prvý krok indukcie platí.

2. Nech platí vzťah pre výpočet derivácie $n-1$-ého rádu krivky, ak $n-1$ je nepárne. Ukážeme, že potom platí aj vzťah na výpočet n-tej derivácie párneho rádu.

   Vyjadrením derivácie $n-1$-ého rádu pre $n-1$ nepárne a následným derivovaním dostávame:

$$P_1^{(n-1)} = \mathbf{n}\left(k^{(n-3)} + a_{n-1}(k, \ldots, k^{(n-5)})\right)$$
$$+\, \mathbf{t}\left((-1)^{\frac{n+2}{2}}k^{n-2} + b_{n-1}(k, \ldots, k^{(n-4)})\right)$$

$$\begin{aligned} P_1^{(n)} &= (-k\mathbf{t})\left(k^{(n-3)} + a_{n-1}(k,\dots,k^{(n-5)})\right) \\ &+ \mathbf{n}\left(k^{(n-2)} + a_{n-1}(k,\dots,k^{(n-5)})'\right) \\ &+ k\mathbf{n}\left((-1)^{\frac{n+2}{2}}k^{n-2} + b_{n-1}(k,\dots,k^{(n-4)})\right) \\ &+ \mathbf{t}\left((-1)^{\frac{n+2}{2}}(n-2)k^{n-3}k^{(1)} + b_{n-1}(k,\dots,k^{(n-4)})'\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \mathbf{n}(k^{(n-2)} + a_{n-1}(k,\dots,k^{(n-5)})' \\ &+ (-1)^{\frac{n+2}{2}}kk^{n-2} + kb_{n-1}(k,\dots,k^{(n-4)})) \\ &+ \mathbf{t}(-kk^{(n-3)} + (-k)a_{n-1}(k,\dots,k^{(n-5)}) \\ &+ (-1)^{\frac{n+2}{2}}(n-2)k^{n-3}k^{(1)} + b_{n-1}(k,\dots,k^{(n-4)})') \end{aligned}$$

Použitím vzťahov pre počítanie s funkciami typu $A_m(k)$ z vety 1.1.4, vyjadrenie n-tej derivácie bude mať nasledovný tvar:

$$\begin{aligned} P_1^{(n)} &= \mathbf{n}\left((-1)^{\frac{n}{2}}k^{n-1} + k^{(n-2)} + a_n(k,\dots,k^{(n-4)})\right) \\ &+ \mathbf{t}\left(b_n(k,\dots,k^{(n-3)})\right), n \geq 6, \end{aligned}$$

kde $a_n(k,\dots,k^{(n-4)}) = a_{n-1}(k,\dots,k^{(n-4)})' + kb_{n-1}(k,\dots,k^{(n-4)})$ a $b_n(k,\dots,k^{(n-3)}) = -kk^{(n-3)}+(-k)a_{n-1}(k,\dots,k^{(n-5)})+(-1)^{\frac{n+2}{2}}(n-2)k^{n-3}k^{(1)}+ b_{n-1}(k,\dots,k^{(n-4)})'$. Tým je vzťah pre n párne dokázaný.

3. Nech platí vzťah pre výpočet derivácie $n-1$-ého rádu krivky, ak n je nepárne. Ukážeme, že potom platí aj vzťah na výpočet n-tej derivácie párneho rádu. Vyjadrením derivácie $n-1$-ého rádu pre $n-1$ párne a následným derivovaním dostávame:

$$\begin{aligned} P_1^{(n-1)} &= \mathbf{n}\left((-1)^{\frac{n+1}{2}}k^{n-2} + k^{(n-3)} + a_{n-1}(k,\dots,k^{(n-5)})\right) \\ &+ \mathbf{t}\left(b_{n-1}(k,\dots,k^{(n-4)})\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P_1^{(n)} &= (-k\mathbf{t})\left((-1)^{\frac{n+1}{2}}k^{n-2} + k^{(n-3)} + a_{n-1}(k,\dots,k^{(n-5)})\right) \\
&+ \mathbf{n}\left((-1)^{\frac{n+1}{2}}(n-2)k^{n-3}k^{(1)} + k^{(n-2)} + a_{n-1}(k,\dots,k^{(n-5)})'\right) \\
&+ (-k\mathbf{n})\left(b_{n-1}(k,\dots,k^{(n-4)})\right) \\
&+ \mathbf{t}\left((b_{n-1}(k,\dots,k^{(n-4)})'\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbf{n}((-1)^{\frac{n+1}{2}}(n-2)k^{n-3}k^{(1)} + k^{(n-2)} + a_{n-1}(k,\dots,k^{(n-5)})' \\
&+ (-k)\left(b_{n-1}(k,\dots,k^{(n-4)})\right) \\
&+ \mathbf{t}((-1)^{\frac{n+1}{2}+1}kk^{n-2} + (-1)^{\frac{n-1}{2}+1}kk^{(n-3)} + (-k)a_{n-1}(k,\dots,k^{(n-5)}) \\
&+ (b_{n-1}(k,\dots,k^{(n-4)})')
\end{aligned}
$$

Použitím vzťahov pre počítanie s funkciami typu $A_m(k)$ z vety 1.1.4, vyjadrenie n-tej derivácie bude mať nasledovný tvar:

$$
\begin{aligned}
P_1^{(n)} = \mathbf{n}&\left(k^{(n-2)} + a_n(k,\dots,k^{(n-4)})\right) \\
&+ \mathbf{t}\left((-1)^{\frac{n+3}{2}}k^{n-1} + b_n(k,\dots,k^{(n-3)})\right), n \geq 5,
\end{aligned}
$$

kde $a_n(k,\dots,k^{(n-4)}) = (-1)^{\frac{n+1}{2}}(n-2)k^{n-3}k^{(1)} + a_{n-1}(k,\dots,k^{(n-5)})'$ $+(-k)\left(b_{n-1}(k,\dots,k^{(n-4)}\right)$ a $b_n(k,\dots,k^{(n-3)}) = (-1)^{\frac{n-1}{2}+1}kk^{(n-3)}$ $+(-k)a_{n-1}(k,\dots,k^{(n-5)}) + (b_{n-1}(k,\dots,k^{(n-4)})'$ Tým je vzťah pre n nepárne dokázaný.

□

Vety hovoriace o vyjadrení derivácie n-tého rádu krivky a oskulačnej kružnice nám v ďalších častiach práce výrazne pomôžu a uľahčia prácu.

2.3 Styk krivky a oskulačnej kružnice vo všeobecnom bode a v obyčajnom vrchole

V tejto podkapitole vyslovíme a dokážeme tvrdenia hovoriace o ráde styku oskulačnej kružnice a krivky v spoločnom bode, ktorý je všeobecným bodom alebo obyčajným vrcholom krivky. Následne na základe dokázaných tvdení vyslovíme hypotézu, ktorú budeme overovať v ďalšej časti práce.

Keďže pri práci so stykom dvoch kriviek skúmame styk v nejakom spoločnom bode týchto kriviek, teda v bode $P_1(s_0) = P_2(0)$, pre jednoduchosť ďalších výpočtov položíme parameter $s_0 = 0$. Substitúciou $s = u - s_0$ vieme potom ďalšie tvrdenia zovšeobecniť, platia teda pre ľubovoľný parameter s_0.

V dôkazoch viet o ráde styku krivky s oskulačnou kružnicou budeme vždy predpokladať, že krivka je vyjadrená v prirodzenej paramatrizácii $P_1(s)$ a že bod styku je bod $P_1(0)$. Vektory Frenetovho repéru, krivosť a polomer krivosti krivky v tomto bode budeme kvôli jednoduchosti skrátene zapisovať s indexom 0, teda $\mathbf{t_0}, \mathbf{n_0}, k_0, r_0$. Oskulačnú kružnicu v bode $P(0)$ budeme vyjadrovať prirodzenou parametrizáciou $P_2(s)$ z vety 2.2.1.

Veta 2.3.1 (Styk krivky a oskulačnej kružnice vo všeobecnom bode)**:**
Krivka má s oskulačnou kružnicou v ľubovoľnom spoločnom bode styk rádu aspoň 2. *Navyše, ak ich spoločný bod je všeobecným bodom krivky, tak rád ich styku je práve* 2.

Dôkaz. Cheme ukázať, že krivka a oskulačná kružnica majú v ľubovoľnom spoločnom bode styk rádu aspoň 2. To znamená, že prvé a druhé derivácie prirodzených parametrizácií týchto kriviek sa v spoločnom bode $P_1(0) = P_2(0)$ rovnajú. Z viet 2.2.2 a 2.2.3 vieme, že prvá derivácia prirodzenej parametrizácie oskulačnej kružnice a krivky vyzerajú nasledovne:

$$P_1^{(1)} = \mathbf{t}$$

$$P_2^{(1)} = \mathbf{n}_0 \sin\frac{s}{r_0} + \mathbf{t}_0 \cos\frac{s}{r_0}$$

Dosadením $s = 0$ do týchto derivácií dostaneme:

$$P_1^{(1)}(0) = \mathbf{t_0} = P_2^{(1)}(0)$$

Takisto z viet 2.2.2 a 2.2.3 vieme, že druhá derivácia prirodzenej parametrizácie oskulačnej kružnice a krivky vyzerajú nasledovne:

$$P_1^{(2)} = k\mathbf{n}$$

$$P_2^{(2)} = \frac{\mathbf{n}_0}{r_0}\cos\frac{s}{r_0} - \frac{\mathbf{t}_0}{r_0}\sin\frac{s}{r_0}$$

Dosadením $s = 0$ do týchto derivácií dostaneme:

$$P_1^{(2)}(0) = k_0\mathbf{n_0}$$

$$P_2^{(2)}(0) = \frac{\mathbf{n}_0}{r_0} = k_0\mathbf{n_0},$$

pretože $\dfrac{1}{r_0} = k_0$.

V ľubovoľnom spoločnom bode majú teda krivka a oskulačná kružnica styk rádu aspoň 2.

Nech teraz spoločný bod $P_1(0) = P_2(0)$ je všeobecným bodom krivky P_1. Porovnajme tretie derivácie prirodzených parametrizácií oboch kriviek v tomto bode.

Pre tretiu deriváciu krivky podľa vety 2.2.3 platí:

$$P_1^{(3)} = k^{(1)}\mathbf{n} - k^2\mathbf{t}$$

O bode, ktorý nie je vrcholom krivky, vieme, že $k_0^{(1)} \neq 0$, preto tretia derivácia krivky v bode $P_1(0)$ je vyjadrená ako $P_1^{(3)}(0) = k_0^{(1)}\mathbf{n_0} - k_0^2\mathbf{t_0} \neq -k_0^2\mathbf{t_0}$.

Pre tretiu deriváciu prirodzenej parametrizácie oskulačnej kružnice platí:

$$P_2^{(3)} = -\frac{\mathbf{n}_0}{r_0^2}\sin\frac{s}{r_0} - \frac{\mathbf{t}_0}{r_0^2}\cos\frac{s}{r_0}$$

Tretia derivácia prirodzenej parametrizácie osklulačnej kružnice v spoločnom bode je teda vyjadrená ako $-\dfrac{\mathbf{t}_0}{r_0^2} = -k_0^2\mathbf{t_0}$. Teraz je už jasné, že sa tieto derivácie nerovnajú, a preto krivka a oskulačná kružnica majú vo všeobecnom bode, ktorý nie je vrcholom, styk rádu práve 2.

□

Obr. 2.3: Oskulačná kružnica krivky vo všeobecnom bode, krivka a oskulačná kružnica majú v spoločnom bode styk rádu práve 2

Veta 2.3.2 (Styk krivky a oskulačnej kružnice v obyčajnom vrchole)**:** *Krivka a oskulačná kružnica krivky majú v spoločnom vrchole styk rádu aspoň* 3. *Navyše, ak ich spoločný bod je obyčajným vrcholom krivky, tak rád ich styku je práve* 3.

Dôkaz. Chceme ukázať, že krivka a oskulačná kružnica majú v spoločnom vrchole styk rádu aspoň 3. To znamená, že derivácie prirodzených parametrizácií týchto kriviek až do rádu 3 sa v spoločnom bode $P_1(0) = P_2(0)$ rovnajú. Z predchádzajúcej vety vieme, že prvé a druhé derivácie prirodzených parametrizácií týchto kriviek sa rovnajú v ľubovoľnom spoločnom bode. Stačí teda uvažovať o ich tretej derivácii. Z dôkazu predchádzajúcej vety vieme aj to, že $P_2^{(3)}(0) = -k_0^2\mathbf{t_0}$ a $P_1^{(3)}(0) = k_0^{(1)}\mathbf{n_0} - k_0^2\mathbf{t_0}$. Keďže pre vrchol krivky platí, že $k_0^{(1)} = 0$, tak $P_1^{(3)}(0) = -k_0^2\mathbf{t_0}$ a tým je rovnosť tretích derivácií dokázaná. V spoločnom vrchole majú teda krivka a oskulačná kružnica styk rádu aspoň 3.

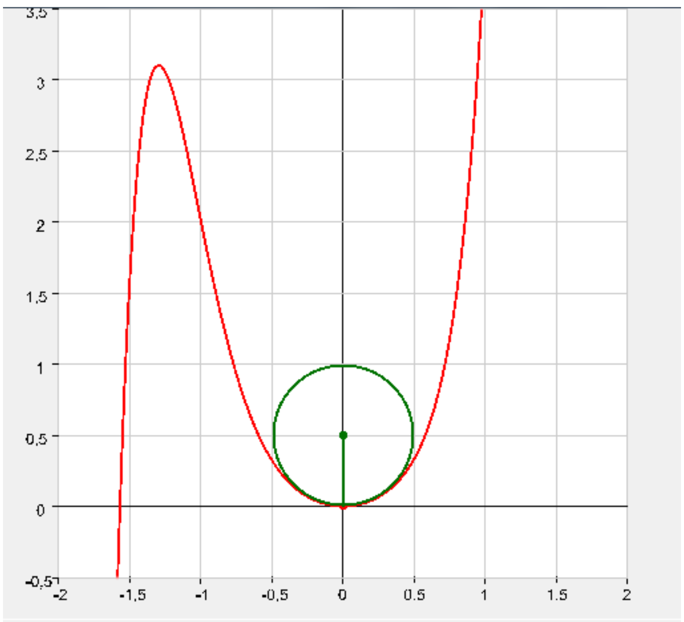
Nech teraz spoločný bod $P_1(0) = P_2(0)$ je obyčajným vrcholom, teda vrcholom práve prvého rádu krivky P_1. Porovnajme derivácie rádu 4 oboch kriviek v tomto bode. Pre štvrtú deriváciu krivky podľa vety 2.2.3 platí:

$$P_1^{(4)} = \mathbf{n}(k^{(2)} - k^3) + \mathbf{t}(-3kk^{(1)})$$

O bode, ktorý je vrcholom rádu práve 1, vieme, že $k_0^{(1)} = 0 \wedge k_0^{(2)} \neq 0$, preto štvrtá derivácia krivky v bode $P_1(0)$ je vyjadrená ako $P_1^{(4)}(0) = \mathbf{n_0}(k_0^{(2)} - k_0^3) \neq -k_0^3\mathbf{n_0}$. Pre štvrtú deriváciu prirodzenej parametrizácie oskulačnej kružnice platí:

$$P_2^{(4)} = -\frac{\mathbf{n}_0}{r_0^3}\cos\frac{s}{r_0} + \frac{\mathbf{t}_0}{r_0^3}\sin\frac{s}{r_0}$$

Táto derivácia prirodzenej parametrizácie osklulačnej kružnice v spoločnom bode je teda vyjadrená ako $-\frac{\mathbf{n}_0}{r_0^3} = -k_0^3\mathbf{n_0}$. Teraz je už jasné, že sa tieto derivácie nerovnajú a preto krivka a oskulačná kružnica majú vo vrchole rádu práve 1 styk rádu práve 3. $\square$



Obr. 2.4: Oskulačná kružnica krivky v obyčajnom vrchole, krivka a oskulačná kružnica majú v spoločnom bode styk rádu práve 3

2.4 Styk krivky a oskulačnej kružnice vo vrchole vyššieho rádu

V predchádzajúcej podkapitole sme ukázali, styk akého rádu majú oskulačná kružnica a krivka vo všeobecnom bode a v obyčajnom vrchole. Ak spoločným bodom krivky a oskulačnej kružnice je všeobecný bod, teda taký, ktorý nie je vrcholom, tak styk týchto krivek je rádu práve 2. Ak spoločným bodom krivky a oskulačnej kružnice je obyčajný vrchol, teda vrchol rádu práve 1, potom krivka a kružnica majú styk rádu práve 3.

Z predchádzajúcich tvrdení sa dá očakávať, že rád styku krivky a oskulačnej kružnice v spoločnom bode súvisí s tým, aké vlastnosti má spoločný bod týchto kriviek. Ak by sme všeobecný bod krivky považovali za vrchol nultého rádu krivky, tak rád styku týchto kriviek je práve o 2 vyšší. To isté platí aj pre vrchol prvého rádu krivky.

Prirodzene sa preto vyslovuje hypotéza, že krivka a oskulačná kružnica majú vo vrchole rádu l styk rádu práve $l+2$. Túto hypotézu v tejto podkapitole vyslovíme vo forme vety a následne ju dokážeme. Predtým si však sformulujeme pomocné tvrdenia, ktoré nám zjednodušia neskoršiu prácu.

Veta 2.4.1:
Pre deriváciu n-tého rádu prirodzenej parametrizácie oskulačnej kružnice v bode $s = 0$ platí:

1. *ak n je nepárne, tak*

$$\begin{aligned} P_2^{(n)}(0) &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\mathbf{t}_0}{r_0^{n-1}} \\ &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} k_0^{n-1} \mathbf{t_0}, n \geq 1 \end{aligned}$$

2. *ak n je párne, tak*

$$\begin{aligned} P_2^{(n)}(0) &= (-1)^{\frac{n}{2}+1}\frac{\mathbf{n}_0}{r_0^{n-1}} \\ &= (-1)^{\frac{n}{2}+1}k_0^{n-1}\mathbf{n_0}, n \geq 2 \end{aligned}$$

Dôkaz. Táto veta je priamym dôsledkom vety 2.2.2. Pre n-tú deriváciu prirodzenej parametrizácie oskulačnej kružnice podľa tejto vety platí:

1. ak n je nepárne, tak
$$P_2^{(n)} = (-1)^{\frac{n+3}{2}}\frac{\mathbf{n}_0}{r_0^{n-1}}\sin\frac{s}{r_0} + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{\mathbf{t}_0}{r_0^{n-1}}\cos\frac{s}{r_0}, \quad n \geq 1$$
2. ak n je párne, tak
$$P_2^{(n)} = (-1)^{\frac{n}{2}+1}\frac{\mathbf{n}_0}{r_0^{n-1}}\cos\frac{s}{r_0} + (-1)^{\frac{n}{2}}\frac{\mathbf{t}_0}{r_0^{n-1}}\sin\frac{s}{r_0}, \quad n \geq 2$$

Dosadením za $s = 0$ do týchto vzťahov dostaneme priamo tvrdenie vety. □

Veta 2.4.2 (Derivácia krivky vo vrchole rádu l)**:**
Majme danú krivku P_1 vyjadrenú v prirodzenej parametrizácii a nech v bode $s = 0$ má táto krivky vrchol rádu l. Potom pre deriváciu rádu $l + 2$ tejto krivky platí:

1. *ak $l + 2$ je nepárne, tak*
$$P_1^{(l+2)}(0) = (-1)^{\frac{l+1}{2}}k_0^{l+1}\mathbf{t_0}, l \geq 3$$
2. *ak $l + 2$ je párne, tak*
$$P_1^{(l+2)}(0) = (-1)^{\frac{l+2}{2}+1}k_0^{l+1}\mathbf{n_0}, l \geq 4$$

Dôkaz. Vieme, že pre vrchol rádu l v bode $s = 0$ platí: $k_0^{(1)} = \ldots = k_0^{(l)} = 0$. Z vety 2.2.4 máme, že pre deriváciu krivky rádu $l + 2$ platí:

1. ak $l + 2$ je nepárne, tak
$$\begin{aligned} P_1^{(l+2)} &= \mathbf{n}\left(k^{(l)} + a_n(k, \ldots, k^{(l-2)})\right) \\ &\quad + \mathbf{t}\left((-1)^{\frac{l+5}{2}}k^{l+1} + b_n(k, \ldots, k^{(l-1)})\right), l \geq 3 \end{aligned}$$

2. ak $l+2$ je párne, tak

$$P_1^{(l+2)} = \mathbf{n}\left((-1)^{\frac{l+2}{2}+1}k^{l+1} + k^{(l)} + a_n(k,\ldots,k^{(l-2)})\right)$$
$$+\,\mathbf{t}\left(b_n(k,\ldots,k^{(l-1)})\right), l \geq 4$$

Dosadením bodu $s=0$ do týchto vzťahov dostávame:

1. ak $l+2$ je nepárne, tak

$$P_1^{(l+2)}(0) = \mathbf{n_0}\left(k_0^{(l)} + a_n(k_0,\ldots,k_0^{(l-2)})\right)$$
$$+\,\mathbf{t_0}\left((-1)^{\frac{l+5}{2}}k_0^{l+1} + b_n(k_0,\ldots,k_0^{(l-1)})\right), l \geq 3$$

2. ak $l+2$ je párne, tak

$$P_1^{(l+2)}(0) = \mathbf{n_0}\left((-1)^{\frac{l+2}{2}+1}k_0^{l+1} + k_0^{(l)} + a_n(k_0,\ldots,k_0^{(l-2)})\right)$$
$$+\,\mathbf{t_0}\left(b_n(k_0,\ldots,k_0^{(l-1)})\right), l \geq 4$$

Keďže krivka má v bode $s=0$ vrchol rádu l, z jeho definície vyplýva, že $a_n(k_0,\ldots,k_0^{(l-2)}) = 0$ a $b_n(k_0,\ldots,k_0^{(l-1)}) = 0$. Preto predchádzajúce vzťahy budú mať tvar:

1. ak $l+2$ je nepárne, tak

$$P_1^{(l+2)}(0) = \mathbf{n_0}\left(k_0^{(l)}\right) + \mathbf{t_0}\left((-1)^{\frac{l+5}{2}}k_0^{l+1}\right),\ l \geq 3$$

2. ak $l+2$ je párne, tak

$$P_1^{(l+2)}(0) = \mathbf{n_0}\left((-1)^{\frac{l+2}{2}+1}k_0^{l+1} + k_0^{(l)}\right),\ l \geq 4$$

Pre vrchol rádu l je aj $k_0^{(l)} = 0$, preto platí:

1. ak $l+2$ je nepárne, tak

$$P_1^{(l+2)}(0) = (-1)^{\frac{l+1}{2}}k_0^{l+1}\mathbf{t_0}, l \geq 3$$

2. ak $l+2$ je párne, tak

$$P_1^{(l+2)}(0) = (-1)^{\frac{l+2}{2}+1} k_0^{l+1} \mathbf{n_0}, l \geq 4$$

Tým je veta dokázaná. □

Veta 2.4.3:
Majme danú krivku P_1 vyjadrenú v prirodzenej parametrizácii a nech v bode $s = 0$ má táto krivky vrchol rádu práve l. Potom pre deriváciu rádu $l+3$ tejto krivky v bode $s = 0$ neplatia vzťahy vyjadrené vo vete 2.4.2.

Dôkaz. Vieme, že pre vrchol krivky rádu práve l v bode $s = 0$ platí: $k_0^{(1)} = \ldots = k_0^{(l)} = 0 \wedge k_0^{(l+1)} \neq 0$. Z vety 2.2.4 máme, že pre deriváciu krivky rádu $l+3$ platí:

1. ak $l+3$ je nepárne, tak

$$\begin{aligned} P_1^{(l+3)} &= \mathbf{n}\left(k^{(l+1)} + a_n(k, \ldots, k^{(l-1)})\right) \\ &\quad + \mathbf{t}\left((-1)^{\frac{l+6}{2}} k^{l+2} + b_n(k, \ldots, k^{(l)})\right), l \geq 2 \end{aligned}$$

2. ak $l+3$ je párne, tak

$$\begin{aligned} P_1^{(l+3)} &= \mathbf{n}\left((-1)^{\frac{l+3}{2}+1} k^{l+2} + k^{(l+1)} + a_n(k, \ldots, k^{(l-1)})\right) \\ &\quad + \mathbf{t}\left(b_n(k, \ldots, k^{(l)})\right), l \geq 3 \end{aligned}$$

Dosadením bodu $s = 0$ do týchto vzťahov dostávame:

1. ak $l+3$ je nepárne, tak

$$\begin{aligned} P_1^{(l+3)}(0) &= \mathbf{n_0}\left(k_0^{(l+1)} + a_n(k_0, \ldots, k_0^{(l-1)})\right) \\ &\quad + \mathbf{t_0}\left((-1)^{\frac{l+6}{2}} k_0^{l+2} + b_n(k_0, \ldots, k_0^{(l)})\right), l \geq 2 \end{aligned}$$

2. ak $l+3$ je párne, tak

$$P_1^{(l+3)}(0) = \mathbf{n_0}\left((-1)^{\frac{l+3}{2}+1}k_0^{l+2} + k_0^{(l+1)} + a_n(k_0,\ldots,k_0^{(l-1)})\right)$$
$$+ \mathbf{t_0}\left(b_n(k_0,\ldots,k_0^{(l)}),\right), l \geq 3$$

Keďže krivka má v bode $s=0$ vrchol rádu práve l, z jeho definície vyplýva, že $a_n(k_0,\ldots,k_0^{(l-1)}) = 0$ a $b_n(k_0,\ldots,k_0^{(l)}) = 0$. Preto predchádzajúce vzťahy budú mať tvar:

1. ak $l+3$ je nepárne, tak

$$P_1^{(l+3)}(0) = \mathbf{n_0}\left(k_0^{(l+1)}\right) + \mathbf{t_0}\left((-1)^{\frac{l+6}{2}}k_0^{l+2}\right),\ l \geq 2$$

2. ak $l+3$ je párne, tak

$$P_1^{(l+3)}(0) = \mathbf{n_0}\left((-1)^{\frac{l+3}{2}+1}k_0^{l+2} + k_0^{(l+1)}\right),\ l \geq 3$$

Pre vrchol rádu práve l je $k_0^{(l+1)} \neq 0$, preto sa tieto vzťahy nerovnajú vzťahom uvedeným vo vete 2.4.2. □

Teraz už môžeme vysloviť a veľmi ľahko dokázať vetu, ktorá hovorí o vzájomnom vzťahu rádu derivácií krivky a jej oskulačnej kružnice a rádu vrchola, v ktorom majú krivka a oskulačná kružnica spoločný bod.

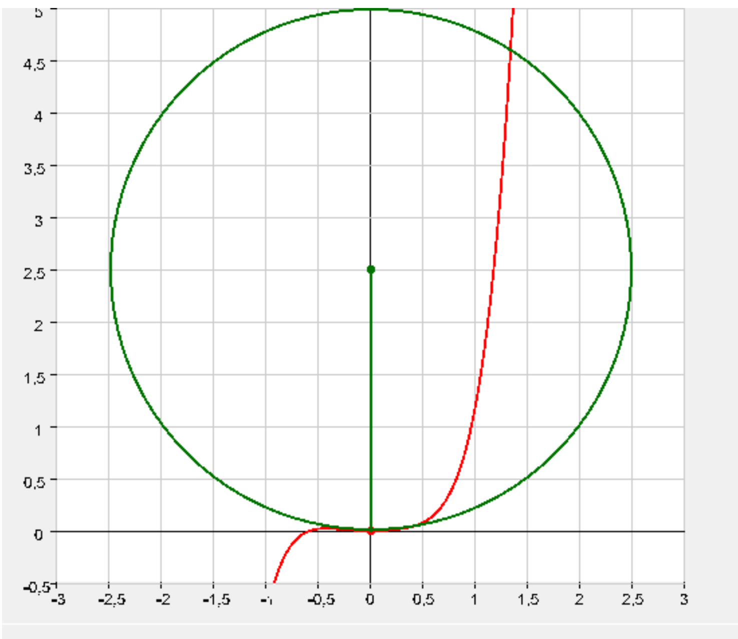
Veta 2.4.4 (Rád styku oskulačnej kružnice a krivky vo vrchole vyššieho rádu)**:** *Majme danú krivku P_1 a k nej zostrojenú oskulačnú kružnicu P_2 a nech spoločný bod týchto krivek je vrcholom rádu aspoň l, potom krivka a oskulačná kružnica majú v tomto bode styk rádu aspoň $l+2$.*
Navyše, ak spoločný bod týchto krivek je vrcholom rádu práve l, potom krivka a oskulačná kružnica majú v tomto bode styk rádu práve $l+2$.

Dôkaz. Pre dôkaz prvej časti tejto vety stačí ukázať, že v spoločnom bode, ktorý je vrcholom rádu l, sa budú rovnať všetky derivácie prirodzenej parametrizácie krivky a oskulačnej kružnice až po rád $l+2$. Rovnosť týchto derivácií vyplýva priamo z viet

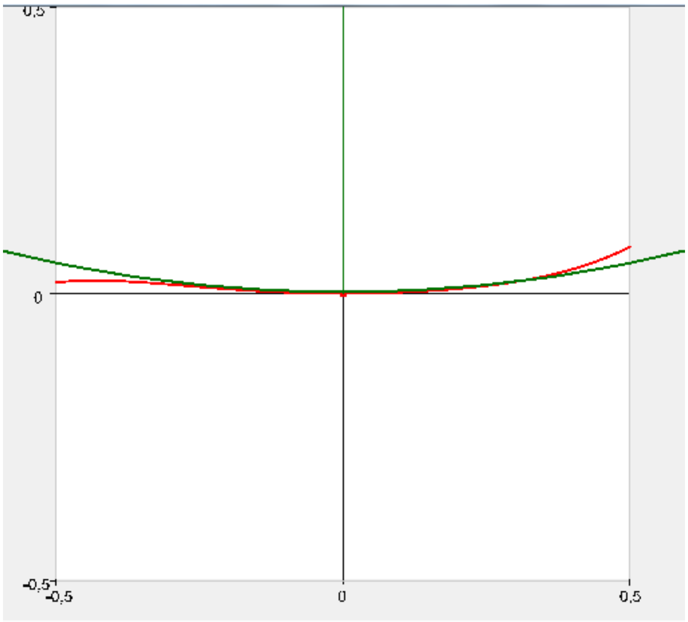
2.4.1 a 2.4.2, pretože vrchol rádu l je aj vrcholom rádu $l-1$.

Pre dôkaz druhej časti vety je treba teda už len ukázať, že v spoločnom bode, ktorý je vrcholom rádu práve l, sa derivácia prirodzenej parametrizácie krivky a oskulačnej kružnice rádu $l+3$ nebudú rovnať. To však vyplýva priamo z viet 2.4.1 a 2.4.3. Tým je veta dokázaná. $\square$

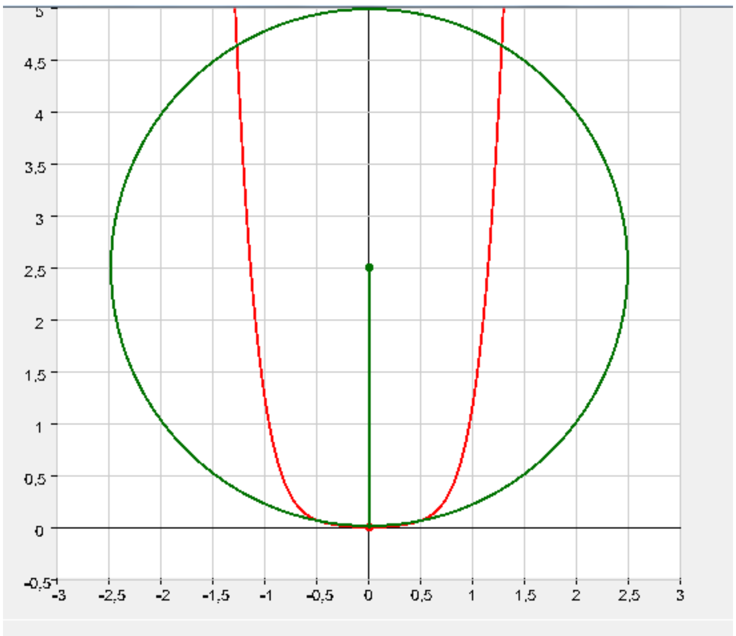
Predchádzajúca veta hovorí to, že čím bude mať spoločný vrchol oskulačnej kružnice a krivky vyšší rád, tým budú oskulačná kružnica a krivka k sebe v okolí tohto bodu tesnejšie priložené. Tento vzájomný vzťah krivky a oskulačnej kružnice ilustrujú nasledujúce obrázky.



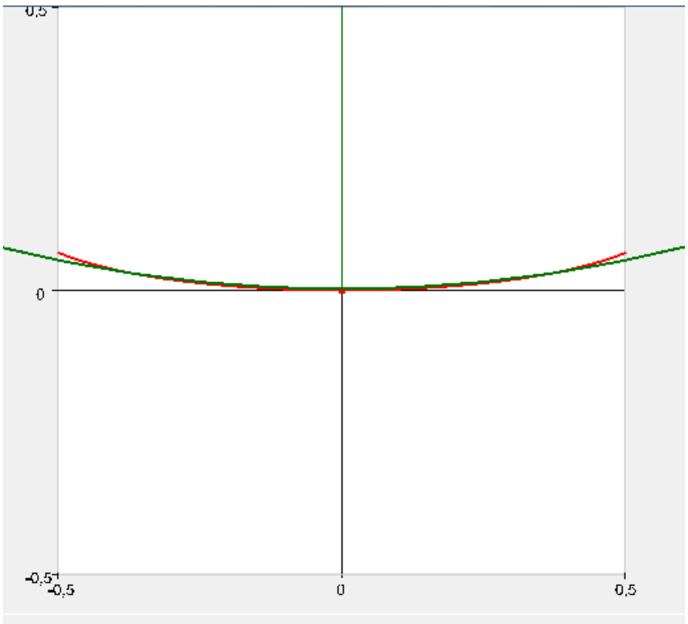
Obr. 2.5: Oskulačná kružnica krivky danej predpisom $f(x) = x^5 + 0,08x^4 + 0,2x^2$ vo vrchole druhého rádu pre $x = 0$



Obr. 2.6: Detail oskulačnej kružnice krivky vo vrchole druhého rádu, krivka a oskulačná kružnica majú v spoločnom bode styk rádu 4



Obr. 2.7: Oskulačná kružnica krivky danej predpisom $f(x) = x^6 + 0,08x^4 + 0,2x^2$ vo vrchole tretieho rádu pre $x = 0$



Obr. 2.8: Detail oskulačnej kružnice krivky vo vrchole tretieho rádu, krivka a oskulačná kružnica majú v spoločnom bode styk rádu 5

Záver

Hlavným cieľom tejto práce bolo ukázať, aký je vzájomný vzťah medzi rádom styku krivky a jej oskulačnej kružnice a medzi rádom spoločného vrchola týchto dvoch kriviek. Práca obsahuje spracovanie základnej teórie týkajúcej sa styku rovinných krivek. Následne sa táto teória aplikuje na vyslovenie a dôkaz tvrdení smerujúcich k vysloveniu a dokázaniu hlavnej vety práce (veta 2.2.4).

Táto veta hovorí o tom, že ak zostrojíme oskulačnú kružnicu krivky vo vrchole rádu l, tak krivka a oskulačná kružnica budú mať v spoločnom bode rád aspoň $l+2$ (pre účely tohto tvrdenia považujeme bod krivky, ktorý nie je jej vrcholom, za vrchol rádu 0). To znamená, že čím je rád spoločného vrchola krivky a oskulačnej kružnice vyšší, tým sú k sebe tieto krivky tesnejšie priložené v okolí spoločného bodu, teda tým je rád ich styku vyšší.

Skúmané vlastnosti krivky a oskulačnej kružnice sú v práci znázornené ilustračnými obrázkami, ktoré vznikli pomocou programu vytvoreného k diplomovej práci *Oskulačná kružnica krivky vo vrchole vyššieho rádu* [BAK10].

Literatúra

[BAK10] V. BAKUROVÁ. Oskulačná kružnica krivky vo vrchole vyššieho rádu. Master's thesis, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského, Bratislava, 2010.

[BCP03] T. BANCHOFF, S. CHERN, and W. POHL. *Differential Geometry of Curves and Surfaces.* Dostupné na internete: http://www.math.brown.edu/~banchoff/ma106 2003/chern1.pdf, 2003.

[BO07] M. BOŽEK. *Krivky I - učebné texty.* Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského, Bratislava, 2007.

[BO08] M. BOŽEK. O nesprávnej predstave oskulačnej kružnice rovinnej krivky. In *Zborník príspevkov z konferencie EMATIK 2008*, pages 11–18. ISBN 978-80-89186-55-6, Knižničné a edičné centrum FMFI UK, Bratislava, 2008.

[GIB01] C. G. GIBSON. *Elementary Geometry of Differentiable Curves: an Undergraduate Introduction.* Cambridge University Press, 2001.

[JE09] F. JEŽEK. *Diferenciální geometrie - Pomocný učební text - díl I.* Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd, Plzeň, 2009. Dostupné na internete: http://www.fd.cvut.cz/personal/voracsar /GeometriePG/PGR020/DG_Jezek01.pdf.

[OSC] *Curves in Plain - Another approach to the osculating circle.* http://home.scarlet.be/ ~ping1339/curves.htm.

[SCH10] T. SCHIFRIN. *DIFFERENTIAL GEOMETRY: A First Course in Curves and Surfaces.* University of Georgia, 2010. Dostupné na internete: http://www.math.uga.edu/~shifrin/ShifrinDiffGeo.pdf.

Prílohy