

Tenzorovo-súčinové Bézierove záplaty

1. Uvažujme polynomicke funkciu $f(u, v) = u^2 + 4uv + u - 1$.

Zapíšte graf $f(u, v)$ ako tenzorovo-súčinovú Bézierovu záplatu (TSBZ) \mathcal{S} nad definičnou oblasťou $\mathcal{D} := \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$.

Poznámka: Treba nájsť ordináty riadiacich vrcholov, ktorých abscisy sú rovnomerne rozložené v danej definičnej oblasti.

Zapíšte hraničné krivky záplaty \mathcal{S} ako

- (a) polynomicke krivky,
- (b) Bézierove krivky, t.j. určite súradnice riadiacich vrcholov.

Vyčíslite záplatu \mathcal{S} v bode $(1/2, 1/2) \in \mathcal{D}$

- (a) priamym výpočtom,
- (b) algoritmom de Casteljau,
- (c) prostredníctvom bilineárneho vyčíslenia.

Zapíšte graf $f(u, v)$ ako TSBZ nad \mathcal{D} prostredníctvom polárnej formy polynómu $f(u, v)$.

2. Uvažujme bilineárnu záplatu \mathcal{S} s riadiacimi vrcholmi

$$p_{00} = (0, 0, 2), \quad p_{10} = (1, 0, -1), \quad p_{01} = (0, 1, 1), \quad p_{11} = (1, 1, 0),$$

pričom plochu \mathcal{S} chápeme ako obraz oblasti $\mathcal{D} := \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$.

Určite parametrické aj analytické vyjadrenie dotykovej roviny plochy \mathcal{S} v obraze bodu $(1/2, 1/2) \in \mathcal{D}$.

Ďalej uvažujme kvadratickú Bézierovu krivku $\mathcal{Q} \subset \mathcal{D}$ zadanú v \mathcal{D} riadiacimi vrcholmi

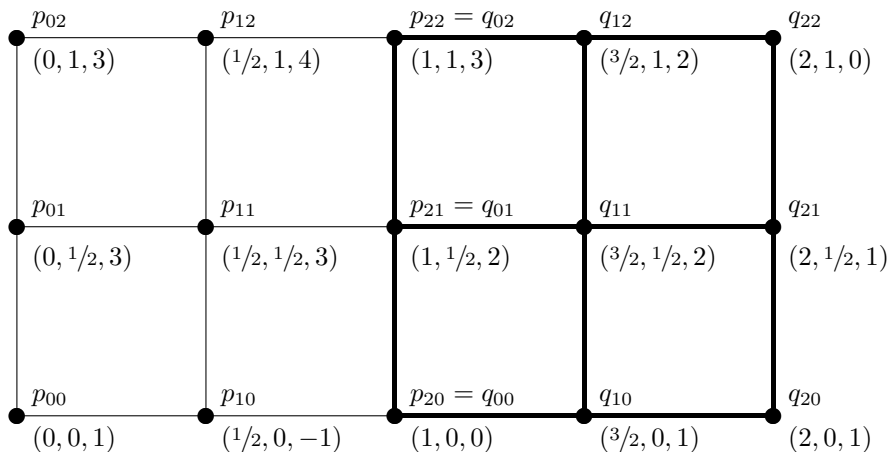
$$q_0 = (0, 0), \quad q_1 = (0, 1), \quad q_2 = (1, 0).$$

Zapíšte obraz krivky \mathcal{Q} na ploche \mathcal{S} ako Bézierovu krivku, t.j. určite súradnice riadiacich vrcholov obrazu \mathcal{Q} .

C^k -spojité nadpájanie tenzorovo-súčinových Bézierových záplat

3. Uvažujme plochu \mathcal{S} tvorenú dvoma tenzorovo-súčinovými bikvadratickými záplatami $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ s riadiacimi vrcholmi zadanými na obr. 1; obe záplaty sú definované nad intervalmi, ktorých dĺžka je v oboch smeroch rovná 1.

Uvažujme krivku \mathcal{C}_1 na tejto ploche, ktorá prechádza stredom krížom cez obe záplaty, čiže ide o u -krivku pre $v = 1/2$ (pozri obr. 2).



Obr. 1: Súradnice riadiacich vrcholov podzáplat \mathcal{S}_1 (vľavo) a \mathcal{S}_2 (vpravo).

Vyšetrite C^k -spojitosť záplaty \mathcal{S} pozdĺž hraničnej krivky.

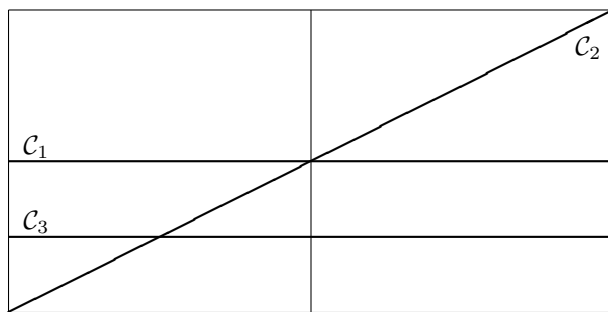
Vyšetrite C^k -spojitosť krivky \mathcal{C}_1 .

Zmeňte súradnice vrchola p_{11} resp. p_{10} tak, aby krivka \mathcal{C}_1 bola C^1 -spojitá.

4. Uvažujme záplaty \mathcal{S}_{11} a \mathcal{S}_{10} , pričom záplata \mathcal{S}_{11} vznikla zo záplaty \mathcal{S} (z predchádzajúcej úlohy) úpravou súradníc vrchola p_{11} , záplata \mathcal{S}_{10} úpravou súradníc vrchola p_{10} .

Vyšetrite C^k -spojitosť kriviek \mathcal{C}_2 a \mathcal{C}_3 , kde \mathcal{C}_2 je obrazom uhlopriečky definičnej oblasti záplaty a krivka \mathcal{C}_3 je u -krivka prislúchajúca parametru $v = 1/4$ (pozri obr. 2).

Poznámka: C^k -spojitosť kriviek $\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ vyšetrite na oboch uvažovaných plochách $\mathcal{S}_{11}, \mathcal{S}_{10}$.



Obr. 2: Krivky $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ v definičnej oblasti \mathcal{D} záplat \mathcal{S}_{11} resp. \mathcal{S}_{10} .

Trojuholníkové Bézierové záplaty

5. Uvažujme tri nekolineárne body $p_0, p_1, p_2 \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ a definujme nimi barycentrickú súradnicovú sústavu \mathcal{B} .

Určite barycentrické súradnice

- (a) bodu $A \in \Delta p_0 p_1 p_2$; špeciálne vyjadrite v \mathcal{B} vrcholy $p_i, i = 0, 1, 2$,
(b) bodov priamky ℓ , ktorá je rovnobežná s niektorou stranou $\Delta p_0 p_1 p_2$; špeciálne vyjadrite v \mathcal{B} súradnice bodov priamok určených stranami $\Delta p_0 p_1 p_2$.

6. Zapište graf polynómu

$$F(u, v) = 3 + 6u - 2v - u^2 + 4uv + 2v^2$$

ako trojuholníkovú Bézierovu záplatu $b^\Delta \subset \mathbb{R}^3$ nad definičnou oblasťou

$$\mathcal{D}^\Delta := \{(u, v) \mid u, v \geq 0, u + v \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2,$$

t.j. určite súradnice jej riadiacich vrcholov. Úlohu riešte

- (a) priamym výpočtom, t.j. dosadením do predpisu

$$b^\Delta(t) = \sum_{i+j+k=n} B_{ijk}^n(t) \cdot p_{ijk},$$

kde $n \in \mathbb{N}$ je stupeň záplaty $b^\Delta(t)$.

Poznámka: $B_{ijk}^n(t) = \binom{n}{ijk} t_0^i t_1^j t_2^k$ sú Bernsteinove polynómy dvoch premenných stupňa n a \mathcal{D}^Δ definuje barycentrickú sústavu súradníc, vzhľadom na ktorú pre $t \in \mathbb{R}^2$ platí $t = (t_0, t_1, t_2)$ a $t_0 + t_1 + t_2 = 1$.

- (b) prerozdelením definičnej oblasti \mathcal{D}^Δ , t.j. využitím vlastností $B_{ijk}^n(t)$,
(c) použitím polárnej formy $\phi^\Delta(\bar{t})$ polynómu $F(u, v)$.

Pre takto zapísanú záplatu určite predpis hraničných kriviek a výsledok overte.

Vypočítajte súradnice bodu záplaty pre $p = (1/4, 1/2) \in \mathcal{D}^\Delta$ prostredníctvom

- (a) priameho vyčíslenia,
(b) algoritmu de Casteljau,
(c) polárnej formy polynómu $F(u, v)$

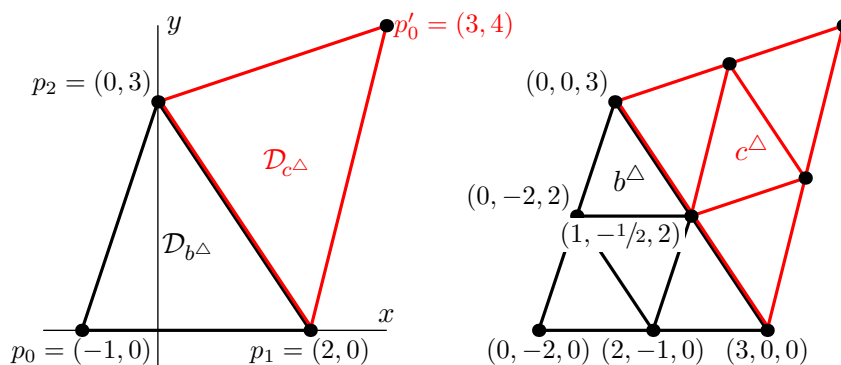
a určite rovnicu dotykovej roviny záplaty v tomto bode.

Prerozdajte záplatu v bode $b^\Delta(p)$ pre $p = (1/4, 1/2) \in \mathcal{D}^\Delta$ a určite súradnice riadiacich vrcholov takto vzniknutých záplat.

C^k -spojité nadpájanie trojuholníkových a tenzorovo-súčinových Bézierových záplat

7. Uvažujme dve kvadratické trojuholníkové Bézierove záplaty b^Δ resp. c^Δ definované nad oblasťami $\mathcal{D}_{b^\Delta} := \triangle p_0 p_1 p_2$ resp. $\mathcal{D}_{c^\Delta} := \triangle p'_0 p_1 p_2$, pozri obr. 3.

Dopočítajte súradnice radiacích vrcholov záplaty c^Δ tak, aby záplaty b^Δ a c^Δ boli na spoločnej hranici napojené C^1 - resp. C^2 -spojito.



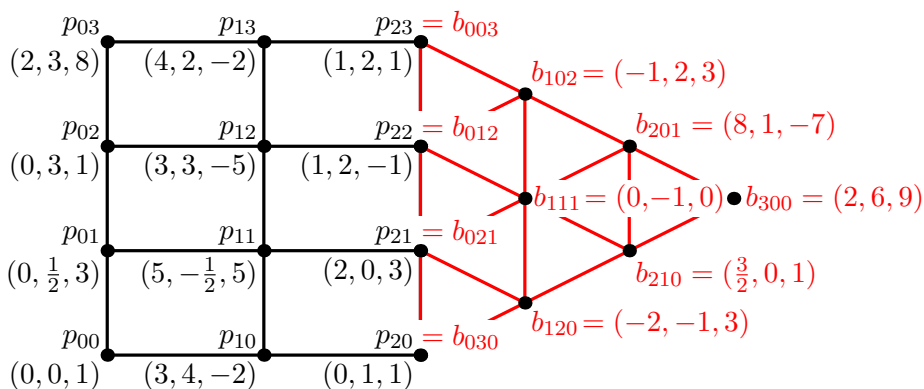
Obr. 3: Definičné oblasti \mathcal{D}_{b^Δ} a \mathcal{D}_{c^Δ} (vľavo) a súradnice radiacích vrcholov záplaty b^Δ (vpravo).
Poznámka: Súradnice bodov p'_0, p_0, p_1, p_2 na obr. vľavo sú afinné.

8. Uvažujme tenzorovo-súčinovú Bézierovu záplatu \mathcal{P}^\square bistupňa (2, 3) resp. kubickú trojuholníkovú Bézierovu záplatu \mathcal{B}^Δ so súradnicami radiacích vrcholov

$$\{p_{ij} \mid i = 0, \dots, 2; j = 0, \dots, 3\} \text{ resp. } \{b_{ijk} \mid i + j + k = 3\}$$

uvadenými na obr. 4.

Vyšetrite C^1 -spojitosť záplat. V prípade, že nie sú C^1 -spojité, zmeňte súradnice vrchola b_{111} tak, aby boli.



Obr. 4: Súradnice radiacích vrcholov záplat \mathcal{P}^\square a \mathcal{B}^Δ .

Bilineárne a bikubicky stmeľované Coonsove záplaty

9. Uvažujme bilineárne stmeľovanú Coonsovu záplatu

$$\mathcal{S}(s, t) = \mathcal{S}_c(s, t) + \mathcal{S}_d(s, t) - \mathcal{S}_{cd}(s, t) = \begin{pmatrix} st^2 + (s^2 - 2s + 1)t + s \\ st^2 + (s^2 - 2s + 2)t - s - 1 \\ st^3 + (1 - s)t^2 + 4(1 - s)t - s - 1 \end{pmatrix},$$

kde $s, t \in \langle 0, 1 \rangle$ a

$\mathcal{S}_c(s, t) = (1 - s)c_0(t) + sc_1(t)$ je priamková plocha s hraničnými krivkami

$$c_0(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t - 1 \\ t^2 + 4t - 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad c_1(t) = \begin{pmatrix} t^2 + 1 \\ t^2 + t - 2 \\ t^3 - 2 \end{pmatrix},$$

$\mathcal{S}_d(s, t) = (1 - t)d_0(s) + td_1(s)$ je priamková plocha s hraničnými krivkami $d_0(s), d_1(s)$,

$\mathcal{S}_{cd}(s, t) = (1 - s \ s) \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - t \\ t \end{pmatrix}$ je bilineárna záplata s rohovými vrcholmi A, B, C, D .

Určite predpisy kriviek $d_0(s), d_1(s)$ a záplat $\mathcal{S}_c(s, t), \mathcal{S}_d(s, t)$.

Overte C^0 -kompatibilitu hraničných kriviek záplaty $\mathcal{S}(s, t)$.

Ukážte, že $A = c_0(0) = d_0(0)$, $C = c_1(0) = d_0(1)$, $B = c_0(1) = d_1(0)$, $D = c_1(1) = d_1(1)$.

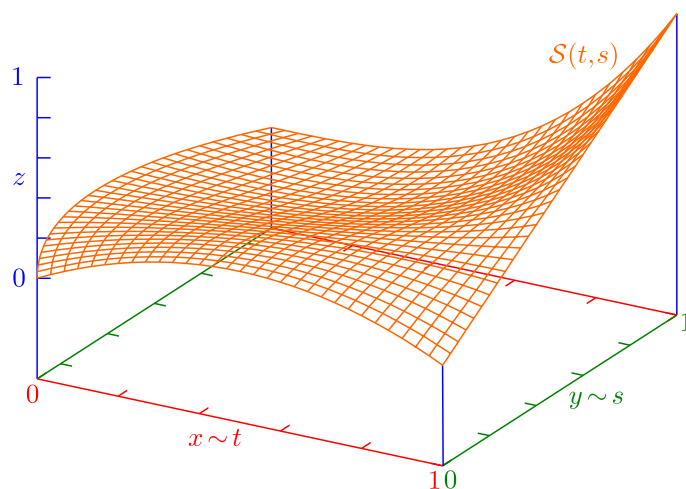
10. Zostrojte bikubicky stmeľovanú Coonsovu záplatu $\mathcal{S}(s, t)$ nad $\langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$ interpolujúcu hraničné krivky

$$c_0(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t - t^2 \end{pmatrix}, \quad c_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ t^3 \end{pmatrix}, \quad d_0(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ s^2 \\ s - s^2 \end{pmatrix}, \quad d_1(s) = \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ s \end{pmatrix}.$$

Overte podmienku C^0 -kompatibility vstupných kriviek.

Dopocítajte predpisy vektorových funkcií $\bar{e}_i(t), \bar{f}_i(s), i \in \{0, 1\}$ tak, aby výsledná záplata bola C^2 -kompatibilná; uvažujte hodnoty twistov

$$t_{00} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t_{10} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t_{01} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



Obr. 5: Výsledná plocha $\mathcal{S}(s, t)$.

Poznámka: Záplata $\mathcal{S}(s, t)$ je definovaná ako

$$\mathcal{S}(s, t) = \mathcal{S}_c(s, t) + \mathcal{S}_d(s, t) - \mathcal{S}_{cd}(s, t)$$

s tvoriacimi záplatami

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_c(s, t) &= H_0^3(s)c_0(t) + H_1^3(s)\bar{e}_0(t) + H_2^3(s)\bar{e}_1(t) + H_3^3(s)c_1(t), \\ \mathcal{S}_d(s, t) &= H_0^3(t)d_0(s) + H_1^3(t)\bar{f}_0(s) + H_2^3(t)\bar{f}_1(s) + H_3^3(t)d_1(s), \\ \mathcal{S}_{cd}(s, t) &= \begin{pmatrix} H_0^3(s) \\ H_1^3(s) \\ H_2^3(s) \\ H_3^3(s) \end{pmatrix}^\top \cdot \begin{pmatrix} c_0(0) & \bar{f}_0(0) & \bar{f}_1(0) & c_0(1) \\ \bar{e}_0(0) & t_{00} & t_{01} & \bar{e}_0(1) \\ \bar{e}_1(0) & t_{10} & t_{11} & \bar{e}_1(1) \\ c_1(0) & \bar{f}_0(1) & \bar{f}_1(1) & c_1(1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} H_0^3(t) \\ H_1^3(t) \\ H_2^3(t) \\ H_3^3(t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

kde $H_i^3(X), i = 0, \dots, 3$ označujú kubické Hermitove a $B_i^3(X), i = 0, \dots, 3$ kubické Bernsteinove polynómy

$$\begin{aligned} H_0^3(X) &= & B_0^3(X) + B_1^3(X) &= & 2X^3 - 3X^2 + 1, \\ H_1^3(X) &= & 1/3 \cdot B_1^3(X) &= & X^3 - 2X^2 + X, \\ H_2^3(X) &= & -1/3 \cdot B_2^3(X) &= & X^3 - X^2, \\ H_3^3(X) &= & B_2^3(X) + B_3^3(X) &= & -2X^3 + 3X^2 \end{aligned}$$

a funkcie $\bar{e}_i(t), \bar{f}_i(s), i \in \{0, 1\}$ vypočítame pomocou predpisu

$$\begin{aligned} \bar{e}_i(t) &= H_0^3(t) \cdot \frac{d d_0}{d s}(i) + H_1^3(t) \cdot t_{i0} + H_2^3(t) \cdot t_{i1} + H_3^3(t) \cdot \frac{d d_1}{d s}(i), \\ \bar{f}_i(s) &= H_0^3(s) \cdot \frac{d c_0}{d t}(i) + H_1^3(s) \cdot t_{0i} + H_2^3(s) \cdot t_{1i} + H_3^3(s) \cdot \frac{d c_1}{d t}(i). \end{aligned}$$

Trojuholníkové Coonsove záplaty

11. Zostrojte trojuholníkovú Coonsovu záplatu \mathcal{S} nad $\mathcal{D} := \triangle p_0 p_1 p_2$ tak, aby krivky

$$c_0(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ (s-1)^2 \end{pmatrix}, \quad c_1(s) = \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ (s-1)^2 \end{pmatrix}, \quad c_2(s) = \begin{pmatrix} 1-s \\ s^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s \in \langle 0, 1 \rangle$$

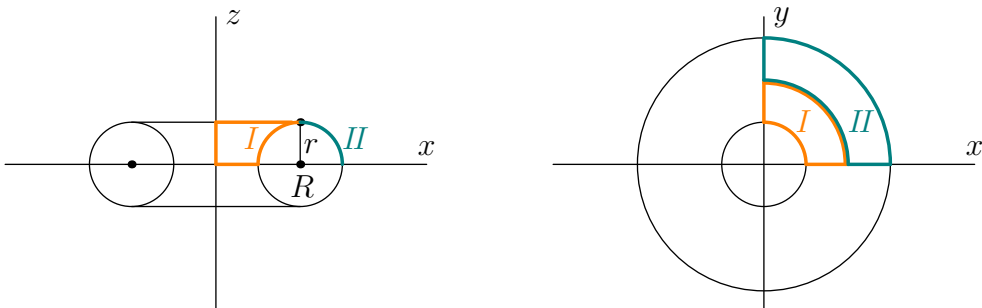
tvorili jej hranicu a $(0, 0)$, $(1, 0)$ a $(0, 1)$ boli (afinné) súradnice vrcholov \mathcal{D} .

Overte C^0 -kompatibilitu vstupných kriviek.

Vyčíslite \mathcal{S} v bodoch $V, W \in \mathcal{D}$, ak (afinné) súradnice bodov V, W sú $V = (1/3, 1/3)$, $W = (1/3, 1/6)$.

Racionálne tenzorovo-súčinové Bézierové záplaty

12. Vymodelujte torus pomocou 16 bikvadratických racionálnych tenzorovo-súčinových Bézierových záplat.



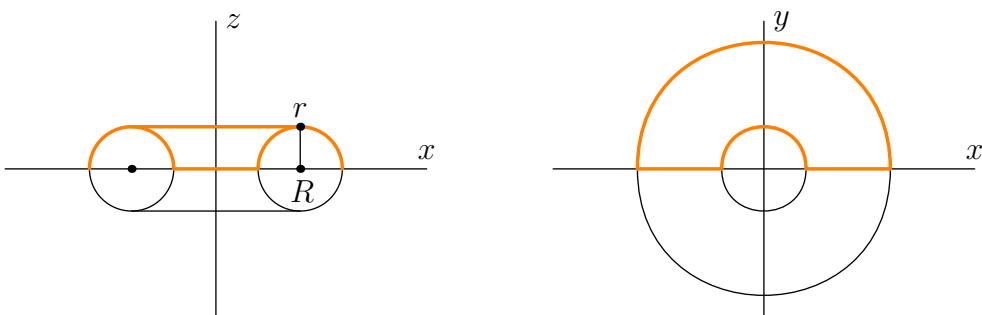
Obr. 6: Priemety torusu do rovín $y = 0$ (vľavo) a $z = 0$ (vpravo).

Pomôcka: Medzi záplatami sú iba dva rôzne typy I a II (pozri obr. 6), ostatné dostaneme z týchto dvoch jednoduchými zhodnosťami. Stačí teda nájsť riadiace vrcholy a ich váhy dvoch záplat, napríklad tých, ktoré sa nachádzajú v oktante $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

Riadiace vrcholy na hranici a ich váhy nájdete ako riadiace vrcholy štvrt'kružnice. Na určenie súradníc prostredného riadiaceho vrchola každej zo záplat I, II využite súradnice zvyšných riadiacich vrcholov spolu s rozumným odôvodnením – napr. že vrchol leží v rovine $z - r = 0$ (prečo?), preto $V_{11} = (x_{11}, y_{11}, r)$. Váhu dopočítajte napr. uvedením si, že $w_0 = w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ a použitím faktu, že v rámci jednej krivky sa pomer váh zachováva (prečo?).

Samozrejme, je možné súradnice V_{11} dopočítať pomocou de Casteljau algoritmu pre $(u, v) = (1/2, 1/2)$, pričom súradnice bodu zodpovedajúceho $(1/2, 1/2)$ sú ľahko dopočítateľné – je možné ich získať napr. cez parametrizáciu torusu $\tau(\varphi, \theta)$, ktorú zostavíte sweepingom a následným dosadením vhodných (akých?) hodnôt $\varphi, \theta \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

13. Vymodelujte torus pomocou 4 bikvadratických racionálnych tenzorovo-súčinových Bézierových záplat tak, že pre riadiace vrcholy pripustíte aj nulové váhy. Všetky záplaty sú navzájom zhodné, stačí teda napísať riadiace vrcholy len pre jednu záplatu, napríklad pre body na toruse, pre ktoré platí $y \geq 0$ a $z \geq 0$ (pozri obr. 7).



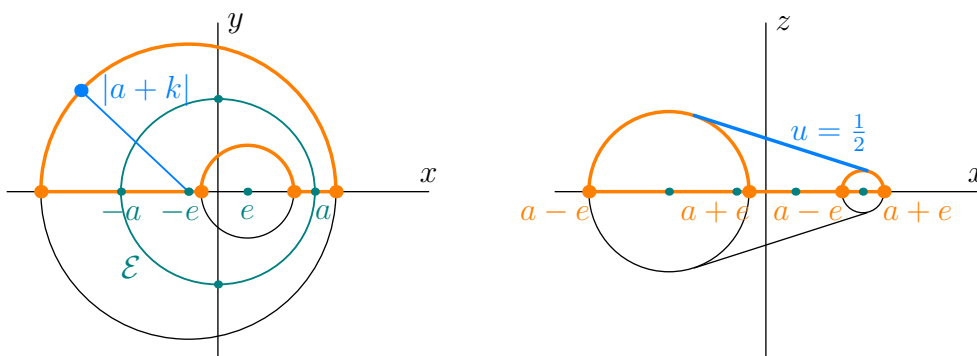
Obr. 7: Priemety torusu do rovín $y = 0$ (vľavo) a $z = 0$ (vpravo).

14. Uvažujme elipsu \mathcal{E} ležiacu v rovine $z = 0$, so stredom v $(0, 0, 0)$, s dĺžkou hlavnej poloosi a a nech vzdialenosť ohnisk od stredu je e (pozri obr. 8 vľavo).

Skonstruujeme cyklidu \mathcal{C} (pozri obr. 9) pomocou elipsy \mathcal{E} a povrazu s dĺžkou $|a + k|$ (kde $k > 0$ je vhodný parameter) tak, že jeden koniec povrazu upevníme v ohnisku $(-e, 0, 0)$ a necháme sa ho napnutý kĺzať po \mathcal{E} . Jeho voľný koniec postupne pokryje povrch \mathcal{C} .

Vymodelujte cyklidu pomocou štyroch racionálnych bikvadratických Bézierových záplat. Podobne ako v prípade torusu z úlohy 2 sú všetky záplaty zhodné, stačí tak napísať len riadiace vrcholy a váhy záplaty, keď $y \geq 0$ a $z \geq 0$.

Pre aké hodnoty a, e, k získame torus z úlohy 1 resp. guľovú plochu?



Obr. 8: Priemety cyklidy. Vľavo sú naznačené ohniská a vrcholy modelujúcej elipsy \mathcal{E} . Vpravo sú váhy v rohových riadiacich vrcholoch.

Pomôcka: Opísanú konštrukciu využite pri určení súradníc rohových riadiacich vrcholov, ostatné dopočítajte pomocou predchádzajúcich cvičení. Na výpočet váh v rohových riadiacich vrcholoch použite váhy uvedené na obr. 8 vpravo.

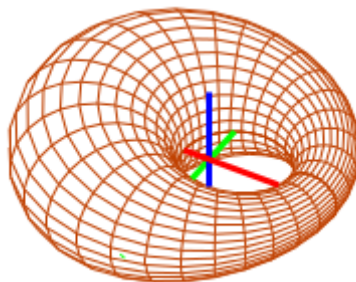
Na určenie (nielen) rohových riadiacich vrcholov použite implicitnú rovnicu cyklidy

$$\mathcal{C}(x, y, z): (x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - e^2 - k^2)^2 - 4((a^2 - e^2)y^2 + (ax - ek)^2) = 0,$$

z ktorej vidieť, že naozaj ide o bikvadratickú plochu resp. parametrické vyjadrenie cyklidy dané predpisom

$$\gamma(\varphi, \theta) = \frac{1}{a - e \cos \varphi \cos \theta} \cdot \begin{bmatrix} k(e - a \cos \varphi \cos \theta) + (a^2 - e^2) \cos \varphi \\ \sqrt{a^2 - e^2} (a - k \cos \theta) \sin \varphi \\ \sqrt{a^2 - e^2} (k - e \cos \varphi) \sin \theta \end{bmatrix}, \quad \varphi, \theta \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Súradnice chýbajúceho riadiaceho vrchola p_{11} a jeho váhu dopočítajte obdobne ako pri toruse v príklade 13. Využite hodnotu parametra $u = 1/2$ resp. hodnoty $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$.



Obr. 9: Cyklida ako racionálna Bézierova záplata.

B-splajny a NURBS

15. Uvažujme kvadratické B-splajnové funkcie $\{N_i^2(u) \mid i = 0, 1, 2\}$ definované nad uzlovou postupnosťou $\mathcal{U} := \langle u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 \rangle$.
- Zostavte predpisy básových B-splajnových funkcií $\{N_i^2(u)\}$ pre rovnomernú (uniformovanú) uzlovú postupnosť $\mathcal{U} = \langle 0, 1, 2, 3, 4, 5 \rangle$ resp. pre rôzne nerovnomerné (neuniformované) uzlové postupnosti \mathcal{U} , vrátane postupností s násobnými uzlami. Načrtnite grafy všetkých týchto funkcií.
- Zostavte predpisy funkcií $\{N_i^2(u)\}$ pre uzlovú postupnosť $\mathcal{U} = \langle 0, 0, 0, 1, 1, 1 \rangle$ a výsledok interpretujte.
16. Uvažujme B-splajnovú krivku $\mathcal{B}(u)$ s radiacimi vrcholmi $\langle V_0, \dots, V_4 \rangle$ definovanú nad uzlovou postupnosťou $\mathcal{U} := \langle 0, 0, 0, 1, 5/2, 3, 3, 3 \rangle$.
- Určite stupeň každého polynomickeho segmentu splajnu $\mathcal{B}(u)$ a ich počet a splajn načrtnite.
17. Zapište kružnicu $k = [(0, 0); r]$ ako kvadratickú neuniformovanú racionálnu splajnovú (NURBS) krivku s radiacimi vrcholmi $\langle V_0, \dots, V_8 \mid V_0 = V_8 \rangle$, pričom radiaca lomená čiara nech tvorí štvorec opísaný k a vrcholy $\{V_i\}$ nech sú na jeho obvode rozmiestnené rovnomerne.
- Pomôcka:* Je potrebné zostaviť postupnosť váh $\langle w_0, \dots, w_8 \rangle$ vrcholov $\langle V_i \mid i = 0, \dots, 8 \rangle$ a korektné určiť uzlovú postupnosť \mathcal{U} tak, aby výsledná NURBS krivka interpolovala potrebné radiace vrcholy.
- Pre zostavenú uzlovú postupnosť načrtnite jednotlivé B-splajnové funkcie.
18. Reprezentujte plášť kolmého valca s podstavou v tvare kružnice ako NURBS záplatu bistupňa $(2, 1)$.
- Pomôcka:* Môžete použiť výsledky z predchádzajúcej úlohy. Stačí preto dourčiť uzlovú postupnosť \mathcal{V} v smere v tak, aby výsledná NURBS záplata interpolovala radiace vrcholy oboch podstav.