2. Zbierka riešených príkladov

K riešeniu príkladov – konštrukčných úloh – použijeme jednotný postup, ktorý zahŕňa:

Príklad: Text úlohy s grafickým zadaním (odporúčané umiestnenie vstupných prvkov)

Riešenie: a) **pomocou rysovacích potrieb**

Vstup: vstupné dáta, obrázok označený a)

Kroky konštrukcie:

1.
2. zdôvodnenie kroku je uvedené v prílohe [P]

n.

Výstup: elipsa je určená prvkami požadovanými na bodovú konštrukciu a vykreslenie pomocou oskulačných kružníc, obrázok označený b)

Diskusia o počte riešení úlohy

Riešenie: b) **pomocou softvéru GeoGebra**

príklad číslo V riešení príkladu sa umožňuje:

- pre vstupné údaje, vyznačené modro, meniť ich polohu alebo veľkosť;
- poloha vstupných údajov nemusí byť rovnaká ako na obrázku a) tohto textu;
- pri existencii dvoch riešení vykresliť obe riešenia rôznou farbou – červená, zelená
- pri zmene hodnôt, resp. polôh vstupných údajov, úloha nemusí mať riešenie a v algebrickom okne je vypísaný text „*undefined*“ – nedefinované.

Príklady v zbierke sú rozdelené do štyroch skupín:

I. Konštrukcia elipsy pomocou charakteristického trojuholníka:

1. $\varepsilon\,(e,\ a+b)$
2. $\varepsilon\,(a, b - e)$.

II. Konštrukcia elipsy, ak poznáme: hodnoty a, b, e, a polohu bodov A, B, C, D, F_1, F_2, M

3. $\varepsilon\,(A, C, a)$

4. $\varepsilon\,(F_1, C, M, M \neq C)$.

5. $\varepsilon\,(F_1, M, N, a)$

6. $\varepsilon\,(\mathrm{F}_1, C, e)$

7. $\varepsilon\,(F_1, C, b)$

8 . $\varepsilon\,(F_1, M, a, e)$

9. $\varepsilon\,(F_1, M,$ smer hlavnej osi, $a)$.

III. Konštrukcia elipsy, ak je daná dotyčnica elipsy:

10. $\varepsilon\,(F_1, t, T \in t, a)$

11. $\varepsilon\,(F_1, F_2, t)$

12. $\varepsilon\,(o, F_1, t, T \in t)$

13. $\varepsilon\,(F_1, t_1, t_2, T_1 \in t_1)$

14. $\varepsilon\,(S, t, T \in t, a)$

15. $\varepsilon\,(A, B, t)$

16. $\varepsilon\,(F_1, t_1, t_2, t_3)$

17. $\varepsilon\,(F_1, t_1, t_2,$ smer hlavnej osi)

18. $\varepsilon\,(F_1, M, t, a)$

19. $\varepsilon\,(F_1, M, t, a)$

20. $\varepsilon\,(S, t_1, t_2, a)$

21. $\varepsilon\,(F_1, t, a, b)$.

IV. Konštrukcia dotyčnice elipsy:

22. $\varepsilon\,(F_1, F_2, T)$, zostrojte t v bode T

23. $\varepsilon\,(F_1, F_2, n)$, zostrojte dotyčnicu

24. $\varepsilon\,(AB, CD)$, vonkajší bod R. Zostrojte dotyčnice z bodu R k elipse a body dotyku.

25. $\varepsilon\,(a, e)$, priamka p. Zostrojte dotyčnice k elipse rovnobežné s priamkou p .

I. Konštrukcia elipsy pomocou charakteristického trojuholníka.

Príklad 1.: Zostrojte elipsu, ak excentricita elipsy je daná úsečkou $|EF|$ a súčet dĺžok hlavnej a vedľajšej polosi je určený dĺžkou úsečky $|MN|$. ($|MN| > |EF| = a + b > e$)

Riešenie: a) **pomocou rysovacích potrieb**

Vstup: $|EF| = e$, $|MN| = a + b$ (Obr. 1.a)

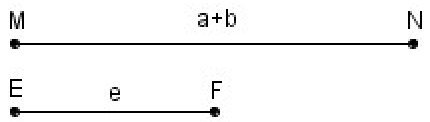
Postup konštrukcie: (Obr. 1.b)

1. Zostrojíme úsečku F_1S tak, že platí $|F_1S| = e$.
2. Zostrojíme priamku m kolmú na priamku F_1S prechádzajúcu bodom S.
3. Na priamke m zostrojíme bod U pričom $|SU| = a + b$.
4. Zostrojíme os o úsečky F_1U.
5. Vyznačíme $SU \cap o = \{C\}$.
6. Bod F_2 leží na priamke F_1S a $(F_1F_2S) = -1$.

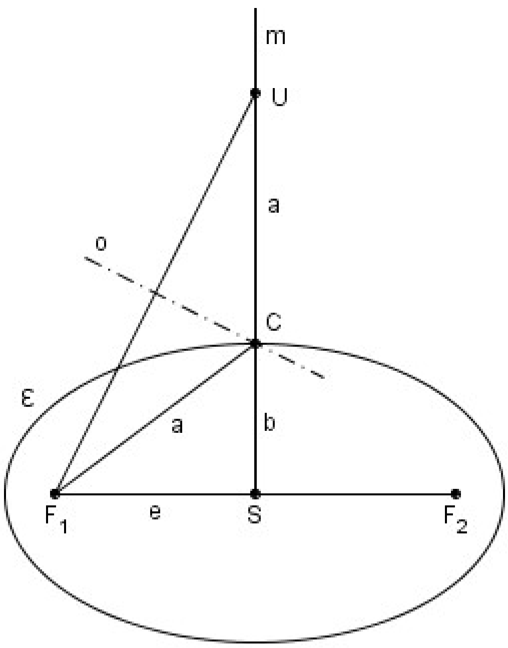
Výstup: $\varepsilon (F_1, F_2, C)$

Diskusia: Úloha má práve jedno riešenie.

a)



b)



Obr. 1.: Riešenie príkladu 1

Riešenie : b) **pomocou softvéru GeoGebra**

príklad 1

Príklad 2.: Zostrojte elipsu, ak dĺžka hlavnej osi je daná úsečkou $|KL|$ a rozdiel dĺžok vedľajšej polosi a excentricity je určený dĺžkou úsečky $|MN|$.

Riešenie: a) **pomocou rysovacích potrieb**

Vstup: $|KL| = a$, $|MN| = b - e$ $(b \neq e)$ (Obr. 2.a)

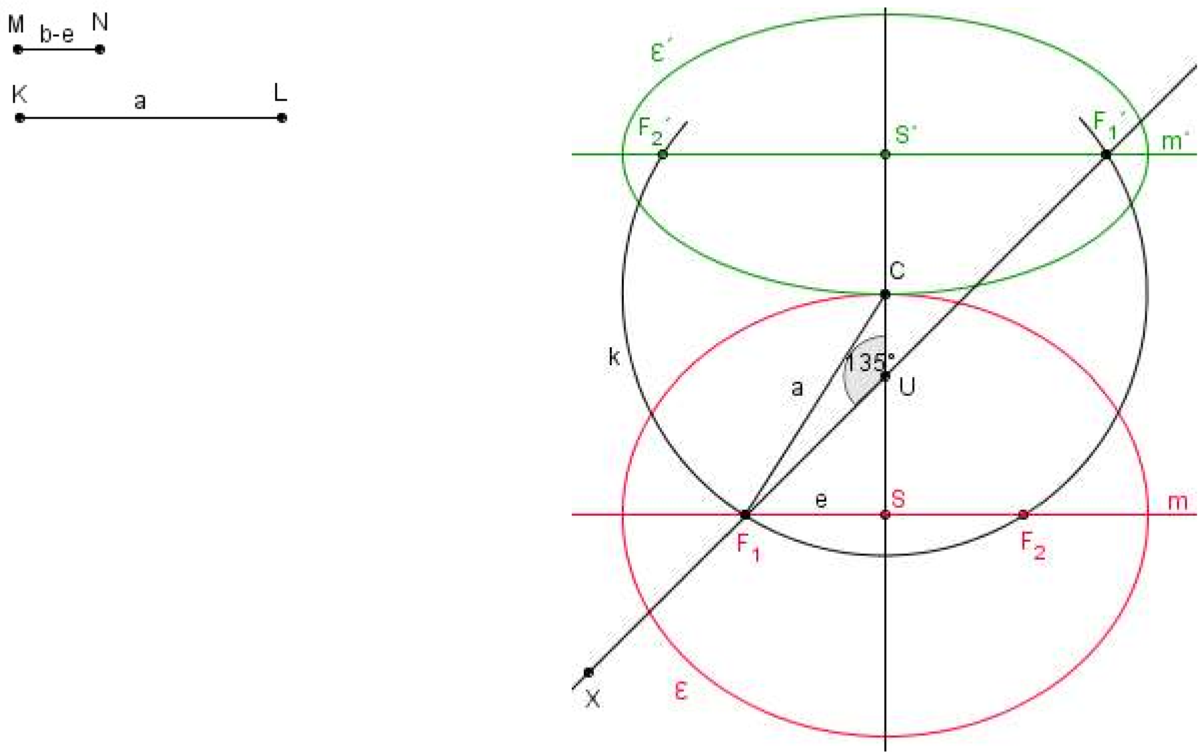
Postup konštrukcie: (Obr. 2.b)

1. Zostrojíme úsečku CU tak, že $|CU| = b - e$.
2. Zostrojíme uhol $|CUX| = 135°$.
3. Zostrojíme kružnicu $k(C, a)$.
4. Vyznačíme $k \cap UX = \{F_1, F_1'\}$.
5. Zostrojíme priamku m/m' kolmú na priamku CU prechádzajúcu bodom F_1/F_1'.
6. Vyznačíme $m \cap CU = \{S\}/m' \cap CU = \{S'\}$.
7. Bod F_2 leží na priamke F_1S a $(F_1F_2S) = -1$.

Výstup: $b > e$: $\varepsilon(F_1, F_2, C)$, $b < e$: $\varepsilon'(F_1', F_2', C)$

Diskusia: Úloha má práve dve riešenia.

a) b)



Obr. 2.: Riešenie príkladu 2.

Riešenie: b) **pomocou softvéru GeoGebra**

príklad 2

II. Konštrukcia elipsy, ak poznáme hlavnú os, resp. vedľajšiu os, resp. excentricitu a jeden bod elipsy.

Príklad 3.: Zostrojte elipsu, ak je daný hlavný vrchol A, vedľajší vrchol C a dĺžka hlavnej polosi je určená dĺžkou úsečky $|KL|$. ($|AC| > |KL| = a$)

Riešenie: a) **pomocou rysovacích potrieb**

<u>Vstup</u>: hlavný vrchol A, vedľajší vrchol C, $|KL| = a$ (Obr. 3.a)

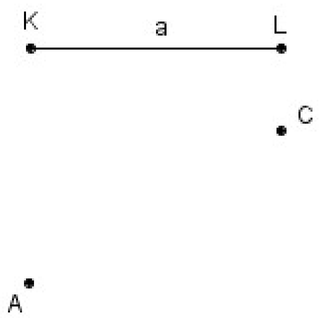
<u>Postup konštrukcie</u>: (Obr. 3.b)

1. Zostrojíme Talesovu kružnicu τ nad úsečkou AC.
2. Zostrojíme kružnicu $k(A, a)$ $[|AS| = a]$.
3. Vyznačíme $\tau \cap k = \{S, S'\}$.
4. Hlavný vrchol B/B' leží na priamke AS/AS' a $(ABS) = -1/(AB'S') = -1$.
5. Vedľajší vrchol D/D' leží na priamke CS/CS' a $(CDS) = -1/(CD'S') = -1$.

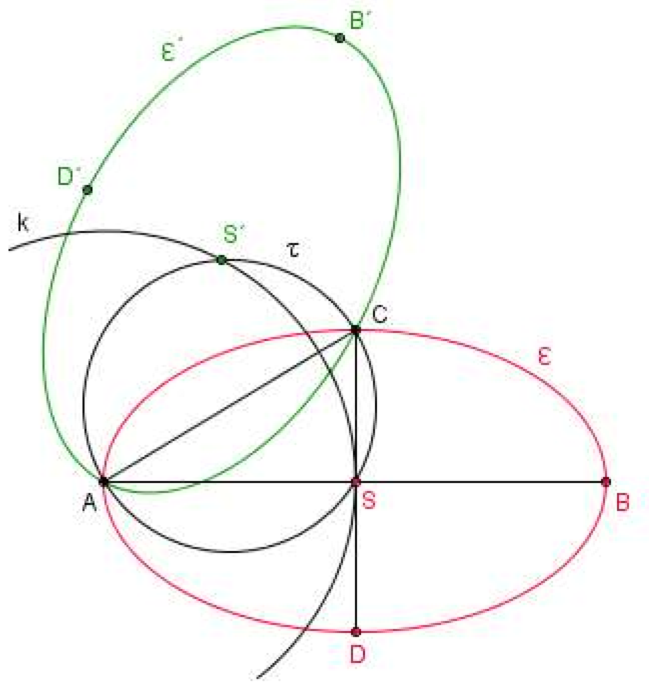
<u>Výstup</u>: $\varepsilon\,(A, B, C, D)$, $\varepsilon'\,(A, B, C', D')$

<u>Diskusia</u>: Úloha má vždy dve riešenia.

a)



b)



Obr. 3.: Riešenie príkladu 3

Riešenie: b) **pomocou softvéru GeoGebra**

[príklad 3]

Príklad 4.: Zostrojte elipsu ε, ktorá je určená ohniskom F_1, vedľajším vrcholom C a jedným jej bodom M ($M \notin F_1C$).

Riešenie: a) **pomocou rysovacích potrieb**

Vstup: ohnisko F_1, vedľajší vrchol C, $M \in \varepsilon$ (Obr. 4.a)

Postup konštrukcie: (Obr. 4.b)

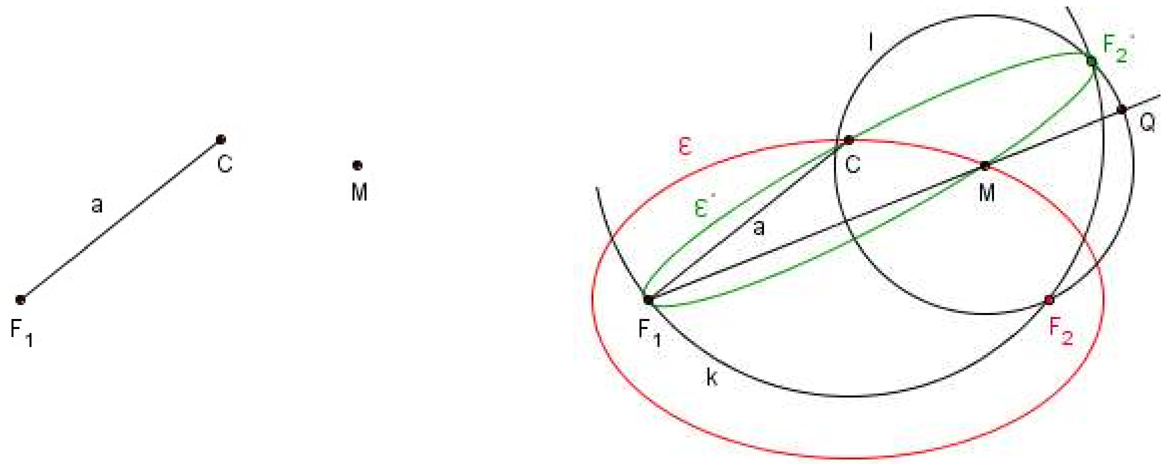
1. Zostrojíme kružnicu $k(C, a)$ [$|CF_1| = |CF_2| = a$].
2. Na polpriamke F_1M zostrojíme bod Q tak, že $|F_1Q| = 2a = 2|F_1C|$.
3. Zostrojíme kružnicu $l(M, |MQ|)$.
4. Vyznačíme $k \cap l = \{F_2, F_2'\}$.

Výstup: elipsa ε (F_1, F_2, M), ε' (F_1, F_2', M)

Diskusia: Počet riešení závisí od vzájomnej polohy kružníc k, l:

- $k \cap l = \{F_2, F_2'\}$, tak úloha má dve riešenia (Obr. 4.b) ε (F_1, F_2, M), ε' (F_1, F_2', M),
- $k \cap l = \{F_2\}$, tak úloha má jedno riešenie,
- $k \cap l = \emptyset$, tak úloha nemá riešenie.

a) b)



Obr. 4.: Riešenie príkladu 4

Riešenie: b) **pomocou softvéru GeoGebra**

príklad 4

Príklad 5.: Zostrojte elipsu ε, ak je dané ohnisko F_1, jej dva body M, N (body F_1, M, N sú nekolineárne) a dĺžka hlavnej polosi je určená dĺžkou úsečky KL.

Riešenie: a) **pomocou rysovacích potrieb**

Vstup: ohnisko F_1, dĺžka hlavnej polosi $a = |KL|$, $M, N \in \varepsilon$ (Obr. 5.a)

Postup konštrukcie: (Obr. 5.b)

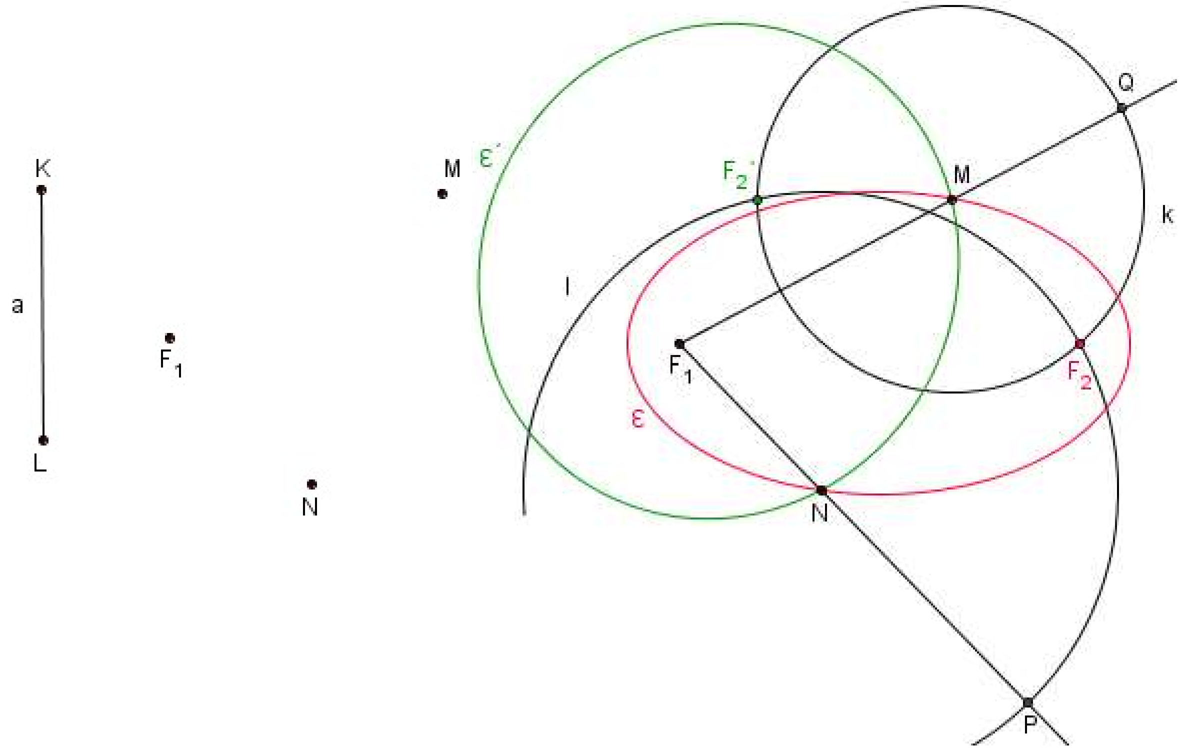
1. Na polpriamke F_1M zostrojíme bod Q, pričom $|F_1Q| = 2a = 2|KL|$.
2. Na polpriamke F_1N zostrojíme bod P, pričom $|F_1P| = 2a = 2|KL|$.
3. Zostrojíme kružnicu $k(M, |MQ|)$.
4. Zostrojíme kružnicu $l(N, |NP|)$.
5. Vyznačíme $k \cap l = \{F_2, F_2'\}$.

Výstup: elipsa ε (F_1, F_2, M), ε' (F_1, F_2', M)

Diskusia: Počet riešení závisí od vzájomnej polohy kružníc k, l:

- $k \cap l = \{F_2, F_2'\}$, tak úloha má dve riešenia (Obr. 5.b) ε (F_1, F_2, M), ε' (F_1, F_2', M),
- $k \cap l = \{F_2\}$, tak úloha má jedno riešenie,
- $k \cap l = \emptyset$, tak úloha nemá riešenie.

a) b)



Obr. 5.: Riešenie príkladu 5

Riešenie: b) **pomocou softvéru GeoGebra**

[príklad 5]

Príklad 6.: Zostrojte elipsu ε, ak je dané ohnisko F_1, vedľajší vrchol elipsy C a excentricita elipsy je určená dĺžkou úsečky EF.

Riešenie: a) **pomocou rysovacích potrieb**

<u>Vstup:</u> ohnisko F_1, vedľajší vrchol C, $e = |EF|$ (Obr. 6.a)

<u>Postup konštrukcie:</u> (Obr. 6.b)

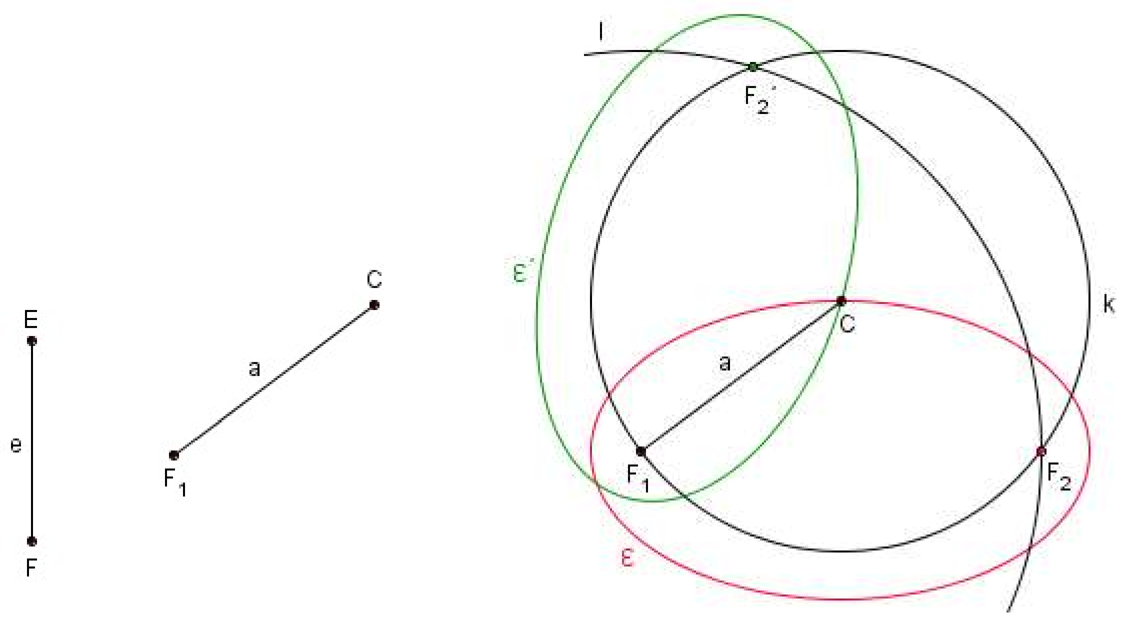
1. Zostrojíme kružnicu $k(C, |F_1C| = a)$.
2. Zostrojíme kružnicu $l(F_1, 2e)$.
3. Vyznačíme $k \cap l = \{F_2, F_2'\}$.

<u>Výstup:</u> elipsa ε (F_1, F_2, C), ε' (F_1, F_2', C)

<u>Diskusia:</u> Počet riešení závisí od vzájomnej polohy kružníc k, l:

- $k \cap l = \{F_2, F_2'\}$, tak úloha má dve riešenia (Obr. 6.b) ε (F_1, F_2, C), ε' (F_1, F_2', C),
- $k \cap l = \{F_2\}$, tak úloha má jedno riešenie,
- $k \cap l = \emptyset$, tak úloha nemá riešenie.

a) b)



Obr. 6.: Riešenie príkladu 6

Riešenie: b) **pomocou softvéru GeoGebra**

príklad 6

Príklad 7.: Zostrojte elipsu ε, ak je dané ohnisko F_1, vedľajší vrchol C a dĺžka vedľajšej polosi je určená úsečkou PQ. ($|F_1C| > |PQ| = a > b$)

Riešenie: a) **pomocou rysovacích potrieb**

Vstup: ohnisko F_1, vedľajší vrchol C, $b = |PQ|$ (Obr. 7.a)

Postup konštrukcie: (Obr. 7.b)

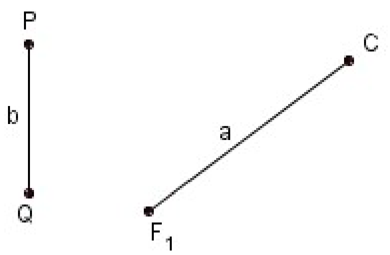
1. Zostrojíme kružnicu $k(F_1, |F_1C| = a)$.
2. Zostrojíme kružnicu $l(C, 2b)$.
3. Vyznačíme $k \cap l = \{D, D'\}$.
4. Zostrojíme stred S/S' úsečky CD/CD', ktorý je aj stred elipsy.
5. Na priamke F_1S/F_1S' zostrojíme ohnisko F_2/F_2' tak, aby S/S' bol stredom úsečky F_1F_2/F_1F_2'.

Výstup: elipsa ε (F_1, F_2, C), ε' (F_1, F_2', C)

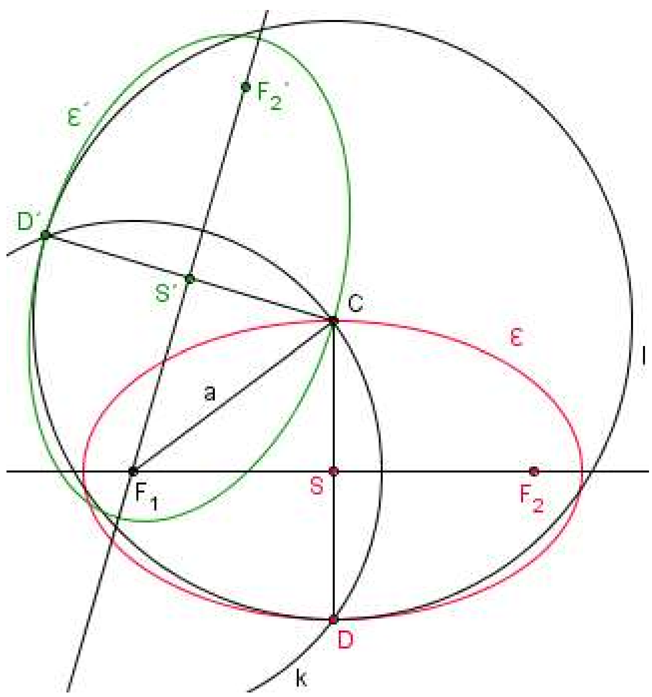
Diskusia: Počet riešení závisí od vzájomnej polohy kružníc k, l:

- $k \cap l = \{D, D'\}$, tak úloha má dve riešenia (Obr. 7.b) ε (F_1, F_2, C), ε' (F_1, F_2', C),
- $k \cap l = \{D\}$, tak úloha má jedno riešenie,
- $k \cap l = \emptyset$, tak úloha nemá riešenie.

a)



b)



Obr. 7.: Riešenie príkladu 7

Riešenie: b) **pomocou softvéru GeoGebra**

[príklad 7]

Príklad 8.: Zostrojte elipsu ε, ak je dané ohnisko F_1, jeden jej bod M, dĺžka hlavnej polosi je určená úsečkou KL a excentricita elipsy je určená úsečkou EF. ($|KL| > |EF| = a > e$)

Riešenie: a) **pomocou rysovacích potrieb**

<u>Vstup:</u> ohnisko F_1, $M \in \varepsilon$, $a = |KL|$, $e = |EF|$ (Obr. 8.a)

<u>Postup konštrukcie:</u> (Obr. 8.b)

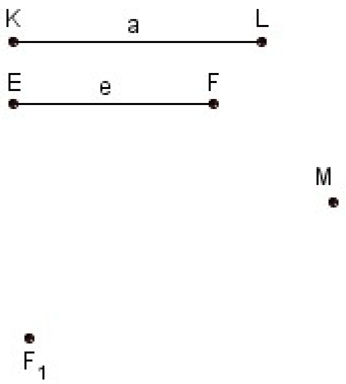
1. Na polpriamke F_1M zostrojíme bod Q, pričom $|F_1Q| = 2a$.
2. Zostrojíme kružnicu $k(M, |MQ|)$.
3. Zostrojíme kružnicu $l(F_1, 2e)$.
4. Vyznačíme body $k \cap l = \{F_2, F_2'\}$.

<u>Výstup:</u> elipsa ε (F_1, F_2, M), ε' (F_1, F_2', M)

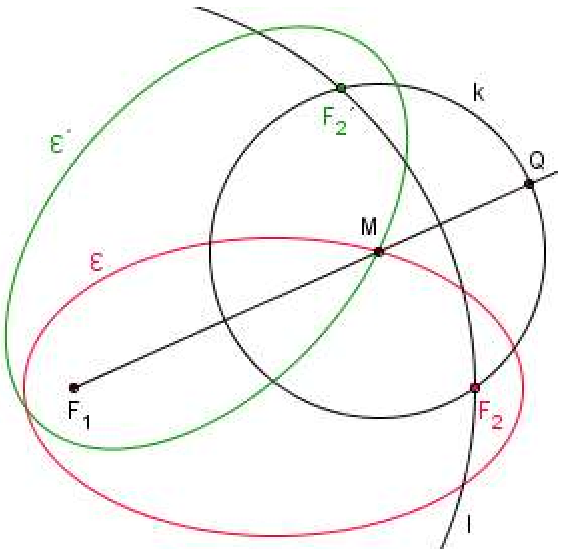
<u>Diskusia</u>: Počet riešení závisí od vzájomnej polohy kružníc k, l:

- $k \cap l = \{F_2, F_2'\}$, tak úloha má dve riešenia (Obr. 8.b) ε (F_1, F_2, M), ε' (F_1, F_2', M),
- $k \cap l = \{F_2\}$, tak úloha má jedno riešenie,
- $k \cap l = \emptyset$, tak úloha nemá riešenie.

a)



b)



Obr. 8.: Riešenie príkladu 8

Riešenie: b) **pomocou softvéru GeoGebra**

príklad 8

Príklad 9.: Zostrojte elipsu ε, ak je dané ohnisko F_1, jeden jej bod M (nie vrchol), hlavná os elipsy patrí do osnovy priamky s a dĺžka hlavnej polosi je určená úsečkou KL.

Riešenie: a) **pomocou rysovacích potrieb**

Vstup: ohnisko F_1, $M \in \varepsilon$, priamka s, $a = |KL|$ (Obr. 9.a)

Postup konštrukcie: (Obr. 9.b)

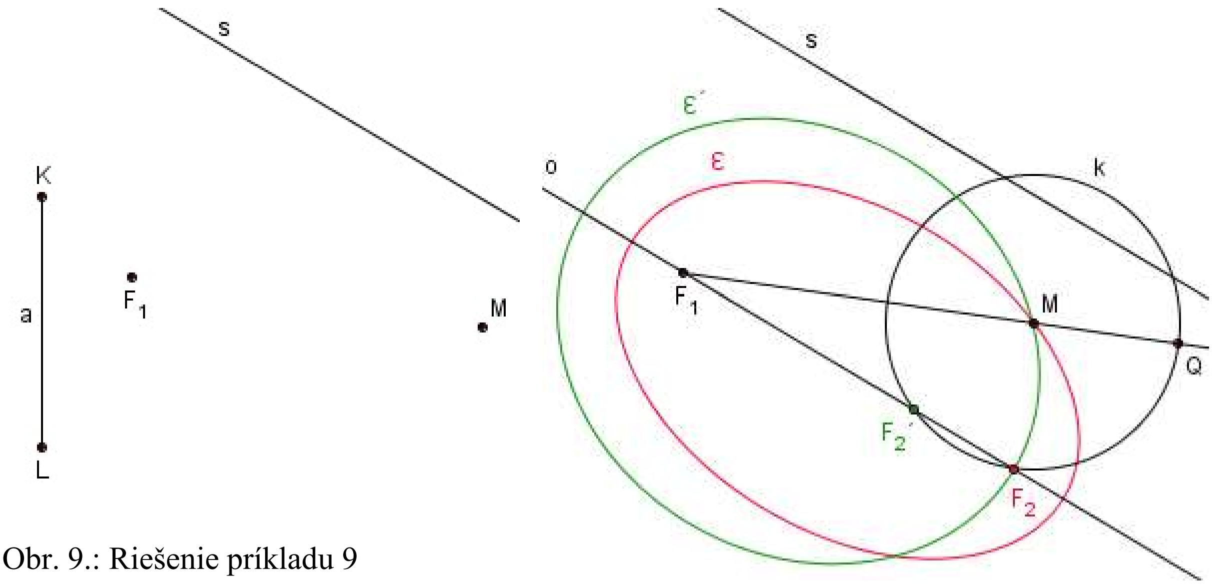
1. Zostrojíme priamku o rovnobežnú s priamkou s prechádzajúcu ohniskom F_1.
2. Na polpriamke F_1M zostrojíme bod Q tak, že $|F_1Q| = 2a$.
3. Zostrojíme kružnicu $k(M, |MQ|)$.
4. Vyznačíme bod $o \cap k = \{F_2, F_2'\}$.

Výstup: elipsa ε (F_1, F_2, M), ε' (F_1, F_2', M)

Diskusia: Počet riešení závisí od vzájomnej polohy osi o a kružnice k:

- $o \cap k = \{F_2, F_2'\}$, tak úloha má dve riešenia (Obr. 9.b) ε (F_1, F_2, M), ε' (F_1, F_2', M),
- $o \cap k = \{F_2\}$, tak úloha má jedno riešenie,
- $o \cap k = \emptyset$, tak úloha nemá riešenie.

a) b)



Obr. 9.: Riešenie príkladu 9

Riešenie: b) **pomocou softvéru GeoGebra**

príklad 9

III. Konštrukcia elipsy, ak je daná dotyčnica elipsy *t*.

Príklad 10.: Zostrojte elipsu ak je dané ohnisko F_1, dotyčnica t s dotykovým bodom T a dĺžka hlavnej polosi je určená dĺžkou úsečky $|KL|$.

Riešenie: a) **pomocou rysovacích potrieb**

Vstup: ohnisko F_1, dotyčnica t, dotykový bod $T \in t$, $|KL| = a$ (Obr. 10.a)

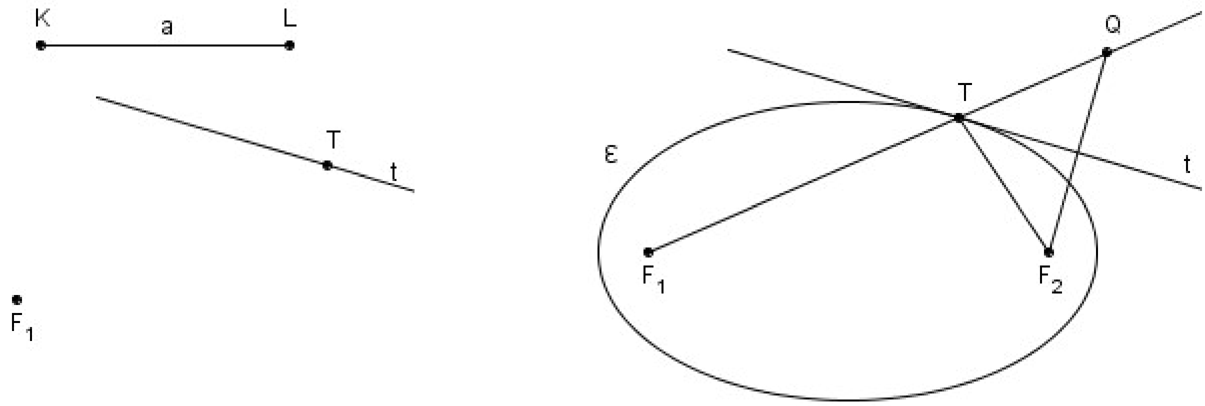
Postup konštrukcie: (Obr. 10.b)

1. Na polpriamke F_1T zostrojíme bod Q tak, že $|F_1Q| = 2a = 2|KL|$.
2. Zostrojíme ohnisko F_2 ako bod súmerne združený podľa dotyčnice t s bodom Q.

Výstup: $\varepsilon(F_1, F_2, T)$

Diskusia: Úloha má práve jedno riešenie.

a) b)



Obr. 10.: Riešenie príkladu 10

Riešenie: b) **pomocou softvéru GeoGebra**

príklad 10

Príklad 11.: Dané sú ohniská F_1, F_2 elipsy a dotyčnica t elipsy (body F_1, F_2 ležia v jednej polrovine vzhľadom na dotyčnicu). Zostrojte dotykový bod T dotyčnice t.

Riešenie: a) **pomocou rysovacích potrieb**

Vstup: ohniská F_1, F_2, dotyčnica elipsy t ($F_1, F_2 \notin t$) (Obr. 11.a)

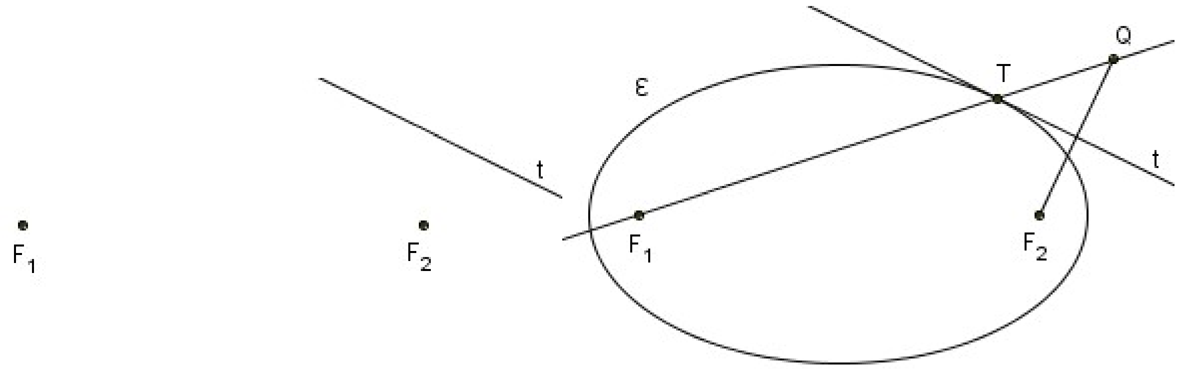
Postup konštrukcie: (Obr. 11.b)

1. Zostrojíme bod Q, ktorý je súmerne združený s ohniskom F_2 podľa dotyčnice t. Bod Q je bodom určujúcej kružnice elipsy $g_1(F_1, 2a)$.
2. Vyznačíme $F_1Q \cap t = \{T\}$.

Výstup: dotykový bod T dotyčnice t

Diskusia: Úloha má práve jedno riešenie.

a) b)



Obr. 11.: Riešenie príkladu 11

Riešenie: b) **pomocou softvéru GeoGebra**

príklad 11

Príklad 12.: Daná je priamka o, na ktorej leží hlavná os elipsy, ohnisko elipsy F_1 a dotyčnica t s dotykovým bodom T. Zostrojte elipsu ε.

Riešenie: a) **pomocou rysovacích potrieb**

Vstup: ohnisko F_1, dotyčnica t s dotykovým bodom T, hlavná os o (Obr. 12.a)

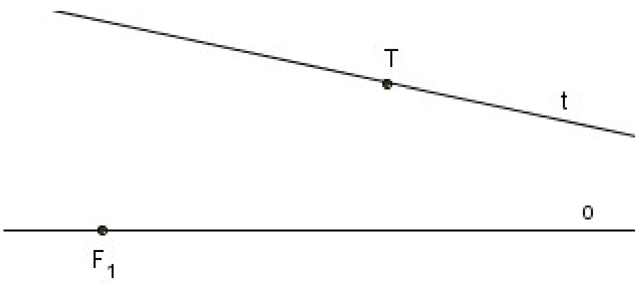
Postup konštrukcie: (Obr. 12.b)

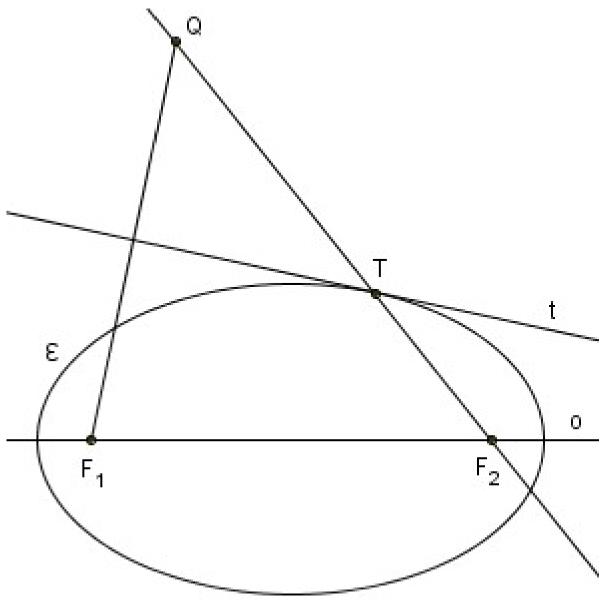
1. Zostrojíme bod Q súmerne združený s ohniskom F_1 podľa dotyčnice t.
2. Zostrojíme priamku QT.
3. Vyznačíme bod $QT \cap o = \{F_2\}$.

Výstup: elipsa ε (F_1, F_2, T)

Diskusia: Úloha má práve jedno riešenie.

a) b)





Obr. 12.: Riešenie príkladu 12

Riešenie: b) **pomocou softvéru GeoGebra**

príklad 12

Príklad 13.: Dané je ohnisko elipsy F_1, dotyčnice t_1, t_2 elipsy a na dotyčnici t_1 dotykový bod T_1 (F_1 leží medzi t_1, t_2). Zostrojte elipsu ε.

Riešenie: a) **pomocou rysovacích potrieb**

Vstup: ohnisko F_1, dotyčnice t_1, t_2, dotykový bod $T_1 \in t_1$ (Obr. 13.a)

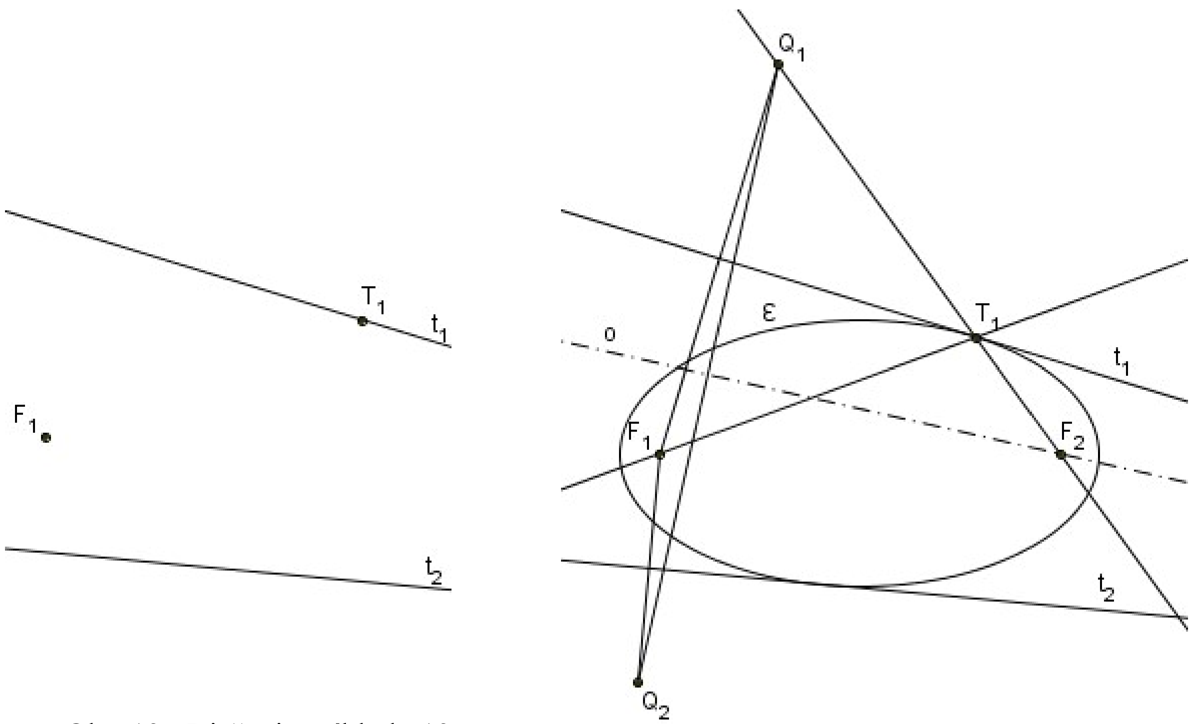
Postup konštrukcie: (Obr. 13.b)

1. Zostrojíme body Q_i súmerne združené s ohniskom F_1 podľa dotyčníc t_i, $i = 1, 2$.
2. Zostrojíme os o úsečky Q_1Q_2.
3. Zostrojíme sprievodič F_1T_1.
4. Zostrojíme priamku Q_1T_1.
5. Bod $Q_1T_1 \cap o = \{F_2\}$ je druhé ohnisko elipsy.

Výstup: elipsa $\varepsilon\,(F_1, F_2, T_1)$

Diskusia: Úloha má práve jedno riešenie.

a) b)



Obr. 13.: Riešenie príkladu 13

Riešenie: b) **pomocou softvéru GeoGebra**

príklad 13

Príklad 14.: Zostrojte elipsu ε, ak je daný jej stred S, dotyčnica elipsy t s dotykovým bodom T a dĺžka hlavnej polosi je určená dĺžkou úsečky $|KL|$.

Riešenie: a) **pomocou rysovacích potrieb**

Vstup: stred S, dotyčnica elipsy t, dotykový bod T ($T \in t$), $a = |KL|$ (Obr. 14.a)

Postup konštrukcie: (Obr. 14.b)

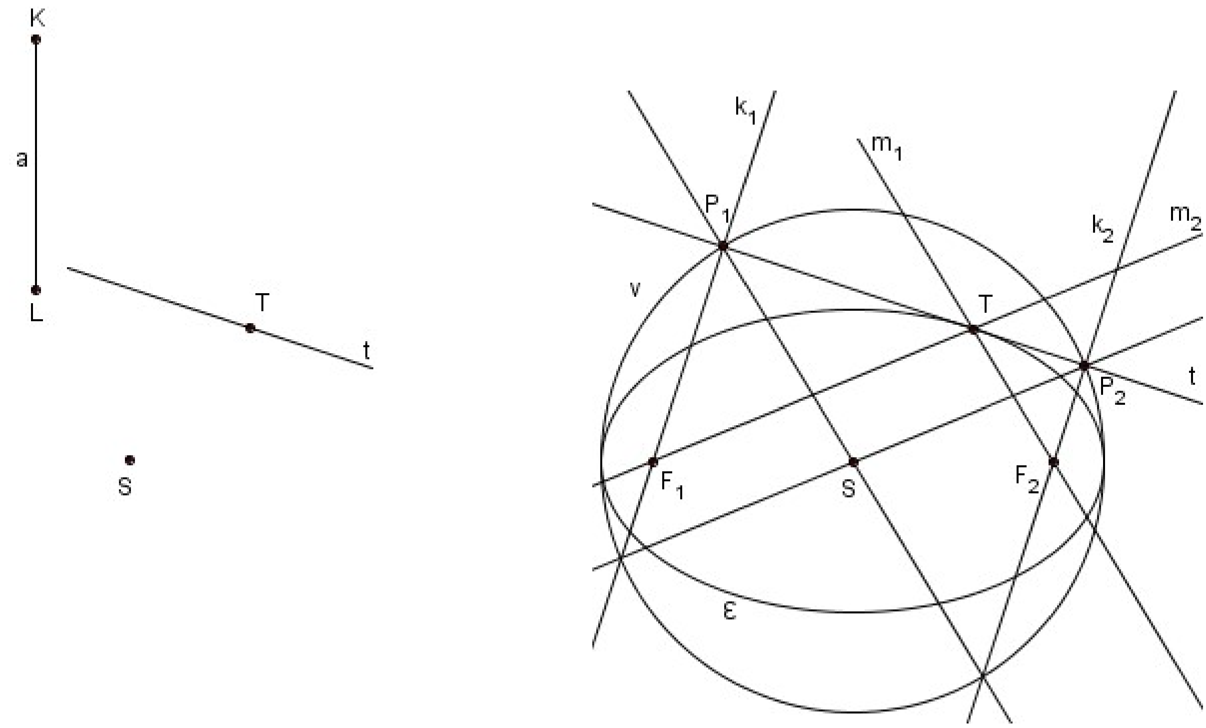
1. Zostrojíme vrcholovú kružnicu $v(S, a)$.
2. Zostrojíme body $v \cap t = \{P_1, P_2\}$.
3. Zostrojíme kolmice k_1, k_2 v bodoch P_1, P_2 na dotyčnicu t.
4. Zostrojíme priamky SP_1, SP_2.
5. Zostrojíme priamku m_1 rovnobežnú s priamkou SP_1 idúcu bodom T.
6. Označíme bod $k_2 \cap m_1 = \{F_2\}$.
7. Ohnisko F_1 leží na priamke F_2S a $(F_1F_2S) = -1$, resp. zostrojíme priamku m_2 bodom T rovnobežnú s priamkou SP_2 a $\{F_1\} = m_2 \cap k_1$.

Výstup: elipsa ε (F_1, F_2, T)

Diskusia: Počet riešení závisí od vzájomnej polohy kružnice v a dotyčnice t:

- $v \cap t = \{ P_1, P_2\}$, tak úloha má práve jedno riešenie (Obr. 14.b),
- $v \cap t = P$ alebo $\emptyset$, tak úloha nemá riešenie.

a) b)



Obr. 14.: Riešenie príkladu 14

Riešenie: b) **pomocou softvéru GeoGebra**

příklad 14

Príklad 15.: Zostrojte elipsu ε, ak sú dané jej hlavné vrcholy A, B a dotyčnica t (body A, B ležia v jednej polrovine vzhľadom na dotyčnicu t)

Riešenie: a) **pomocou rysovacích potrieb**

Vstup: hlavné vrcholy A, B, dotyčnica t (Obr. 15.a)

Postup konštrukcie: (Obr. 15.a)

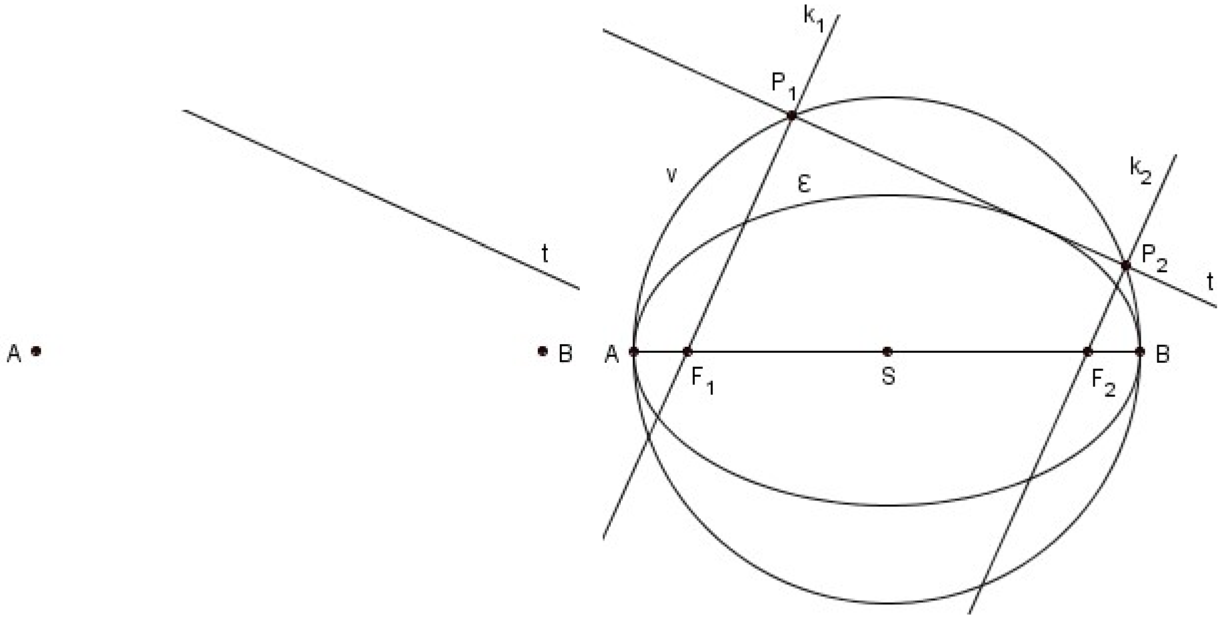
1. Zostrojíme stred S hlavnej osi AB, je to stred elipsy.
2. Zostrojíme vrcholovú kružnicu $v(S, a = |SA|)$.
3. Vyznačíme body $v \cap t = \{P_1, P_2\}$.
4. Zostrojíme kolmicu k_i na dotyčnicu t bodom P_i, $i = 1, 2$.
5. Určíme body $k_i \cap AB = \{F_i\}$, $i = 1,2$, sú to ohniská elipsy.

Výstup: elipsa $\varepsilon(F_1, F_2, A)$

Diskusia: Počet riešení závisí od vzájomnej polohy kružnice v a dotyčnice t:

- $v \cap t = \{ P_1, P_2\}$, tak úloha má práve jedno riešenie (Obr. 15.b),
- $v \cap t = \emptyset$, tak úloha nemá riešenie.

a) b)



Obr. 15.: Riešenie príkladu 15

Riešenie: b) **pomocou softvéru GeoGebra**

príklad 15

Príklad 16.: Zostrojte elipsu ε, ak sú dané tri navzájom rôznobežné dotyčnice t_1, t_2, t_3 a ohnisko F_1.

Riešenie: a) **pomocou rysovacích potrieb**

Vstup: ohnisko F_1, dotyčnice t_1, t_2, t_3 (Obr. 16.a)

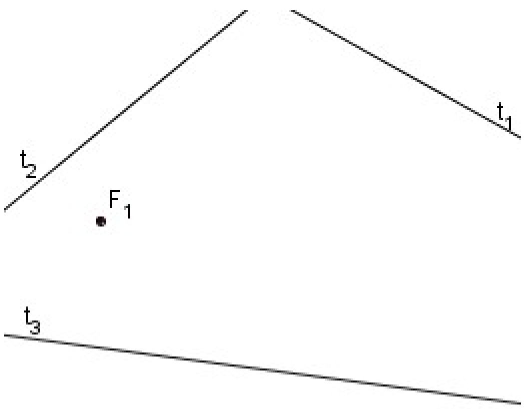
Postup konštrukcie: (Obr. 16.b) pomocou vrcholovej kružnice

1. Zostrojíme kolmice k_i z ohniska F_1 na dotyčnice t_i, $i = 1, 2, 3$.
2. Vyznačíme body $k_i \cap t_i = \{P_i\}$, $i = 1, 2, 3$.
3. Zostrojíme osi o_{12}, o_{23}, o_{13} úsečiek určených bodmi P_i, $i = 1, 2, 3$.
4. Vyznačíme bod $o_{12} \cap o_{23} \cap o_{13} = \{S\}$.
5. Ohnisko F_2 leží na priamke F_1S a $(F_1F_2S) = -1$.
6. Zostrojíme dotykový bod T_i dotyčnice t_i, príklad 11 .

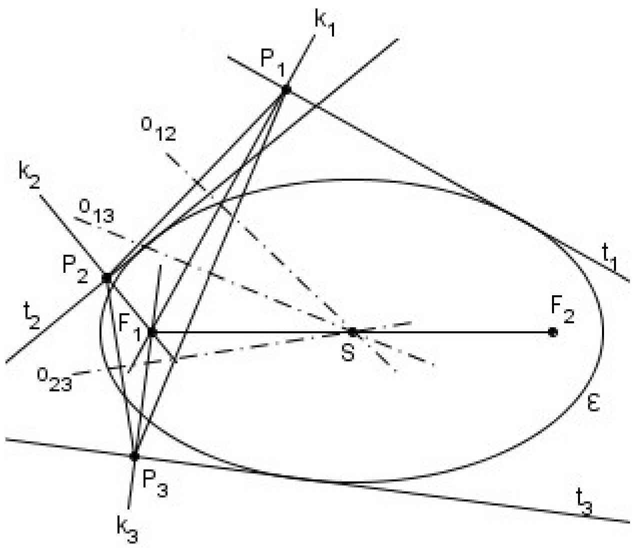
Výstup: elipsa ε (F_1, F_2, T_i)

Diskusia: Úloha má práve jedno riešenie.

a)



b)



Obr. 16.: Riešenie príkladu 16

Riešenie: b) **pomocou softvéru GeoGebra**

príklad 16

Príklad 17.: Zostrojte elipsu ε, ak je dané ohnisko F_1, dvojica rôznobežných dotyčníc elipsy t_1, t_2 a smer hlavnej osi elipsy patrí do osnovy priamky s.

Riešenie: a) **pomocou rysovacích potrieb**

Vstup: ohnisko F_1, dotyčnice t_1, t_2, smer hlavnej osi s (Obr. 17.a)

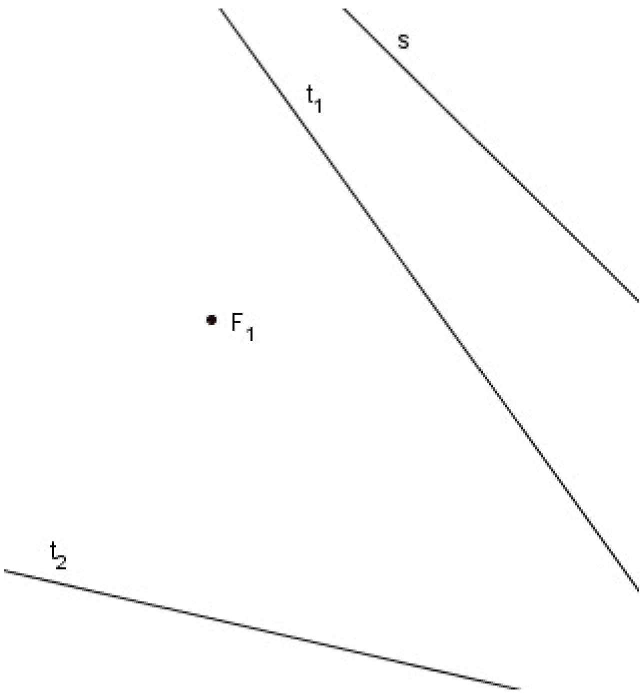
Postup konštrukcie: (Obr. 17.b) pomocou vrcholovej kružnice

1. Zostrojíme os o rovnobežnú s priamkou s idúcu ohniskom F_1.
2. Zostrojíme kolmice k_i prechádzajúce ohniskom F_1 na dotyčnice t_i, $i = 1, 2$.
3. Vyznačíme body $k_i \cap t_i = \{P_i\}$.
4. Zostrojíme os m úsečky P_1P_2.
5. Zostrojíme bod $m \cap o = \{S\}$.
6. Ohnisko F_2 leží na hlavnej osi o a $(F_1F_2S) = -1$.
7. Zostrojíme dotykový bod T_i dotyčnice t_i, podľa príkladu 11.

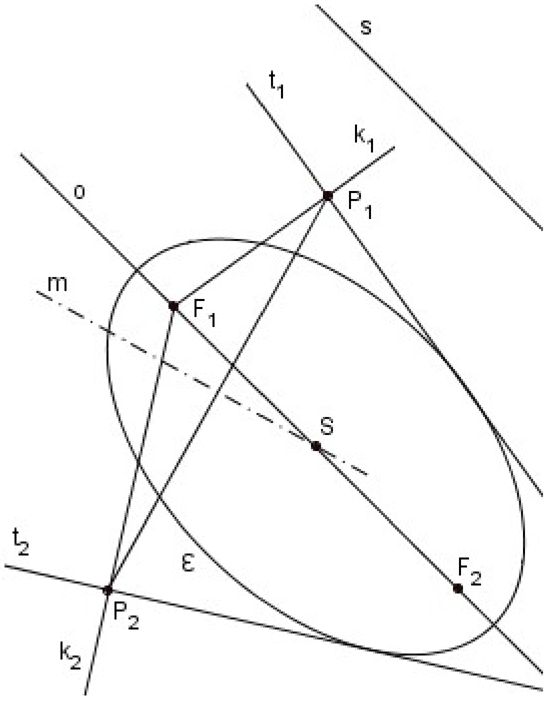
Výstup: elipsa $\varepsilon\,(F_1, F_2, T_i)$

Diskusia: Úloha má práve jedno riešenie.

a)



b)



Obr. 17.: Riešenie príkladu 17

Riešenie: b) **pomocou softvéru GeoGebra**

príklad 17

Príklad 18.: Zostrojte elipsu, ak je dané ohnisko F_1, bod elipsy M, dotyčnica t ($M \notin t$) a dĺžka hlavnej polosi je určená dĺžkou úsečky $|KL|$ (body F_1, M ležia v jednej polrovine vzhľadom na dotyčnicu t).

Riešenie: a) **pomocou rysovacích potrieb**

<u>Vstup</u>: ohnisko F_1, $M \in \varepsilon$, dotyčnica t, $|KL| = a$ (Obr. 18.a)

<u>Postup konštrukcie</u>: (Obr. 18.b)

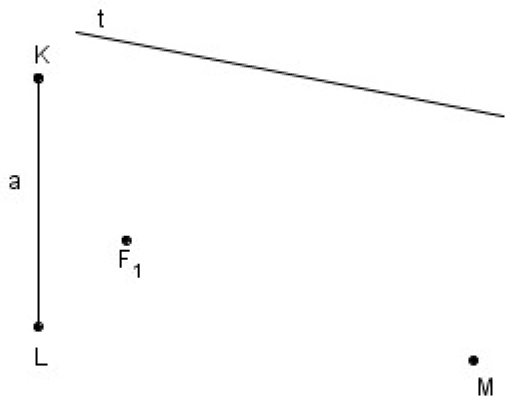
1. Zostrojíme bod R súmerne združený s ohniskom F_1 podľa dotyčnice t.
2. Zostrojíme kružnicu $k(R, 2a)$.
3. Na polpriamke F_1M zostrojíme bod Q tak, že $|F_1Q| = 2a = 2|KL|$.
4. Zostrojíme kružnicu $l(M, |MQ|)$.
5. Vyznačíme $k \cap l = \{F_2, F_2'\}$.

<u>Výstup:</u> elipsa ε (F_1, F_2, M), ε' (F_1, F_2', M)

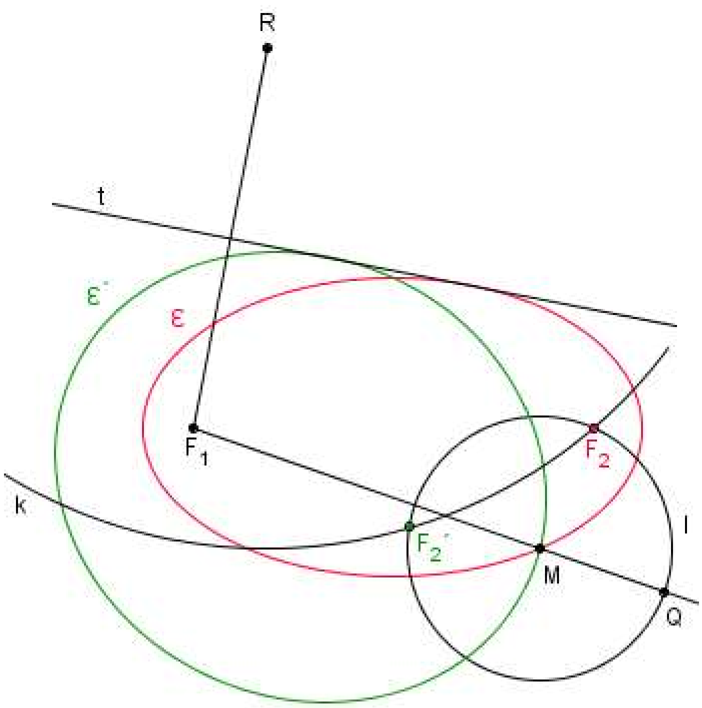
<u>Diskusia</u>: Počet riešení závisí od vzájomnej polohy kružníc k, l:

- $k \cap l = \{F_2, F_2'\}$, tak úloha má dve riešenia (Obr. 18.b) ε (F_1, F_2, M), ε' (F_1, F_2', M),
- $k \cap l = \{F_2\}$, tak úloha má jedno riešenie,
- $k \cap l = \emptyset$, tak úloha nemá riešenie.

a)



b)



Obr. 18.: Riešenie príkladu 18

Riešenie: b) **pomocou softvéru GeoGebra**

príklad 18

Príklad 19.: Zostrojte elipsu, ak je dané ohnisko F_1, vedľajší vrchol C a dotyčnica elipsy t (F_1, C ležia v jednej polrovine vzhľadom na dotyčnicu t).

Riešenie: a) **pomocou rysovacích potrieb**

Vstup: ohnisko F_1, vedľajší vrchol C, dotyčnica t (Obr. 19.a)

Postup konštrukcie: (Obr. 19.b)

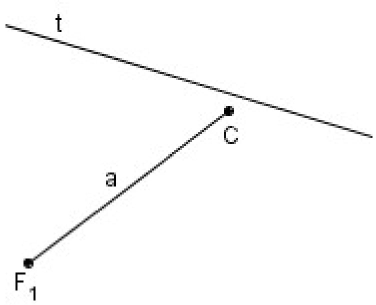
1. Zostrojíme bod R súmerne združený s ohniskom F_1 podľa dotyčnice t.
2. Zostrojíme kružnicu $k(R, 2|F_1C| = 2a)$.
3. Zostrojíme kružnicu $l(C, a)$.
4. Určíme $k \cap l = \{F_2, F_2'\}$.

Výstup: elipsa ε (F_1, F_2, C), ε' (F_1, F_2', C)

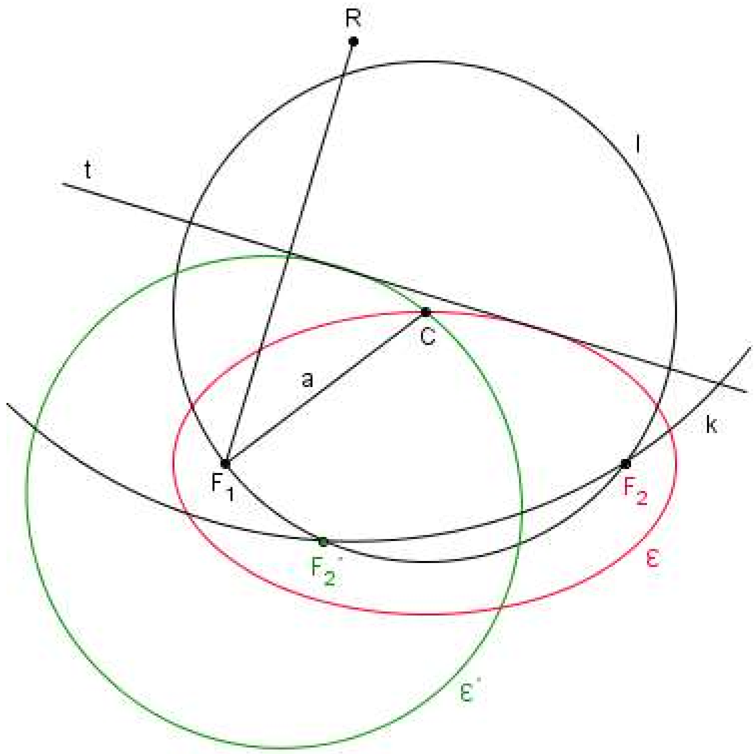
Diskusia: Počet riešení závisí od vzájomnej polohy kružníc k, l:

- $k \cap l = \{F_2, F_2'\}$, tak úloha má dve riešenia (Obr. 19.b) ε (F_1, F_2, C), ε' (F_1, F_2', C),
- $k \cap l = \{F_2\}$, tak úloha má jedno riešenie,
- $k \cap l = \emptyset$, tak úloha nemá riešenie.

a)



b)



Obr. 19.: Riešenie príkladu 19

Riešenie: b) **pomocou softvéru GeoGebra**

príklad 19

Príklad 20.: Zostrojte elipsu, ak je daný jej stred S, dotyčnice t_1, t_2 (S leží medzi t_1, t_2) a dĺžka hlavnej polosi je určená dĺžkou úsečky $|KL|$.

Riešenie: a) **pomocou rysovacích potrieb**

Vstup: stred S, dotyčnice t_1, t_2, $|KL| = a$ (Obr. 20.a)

Postup konštrukcie: (Obr. 20.b)

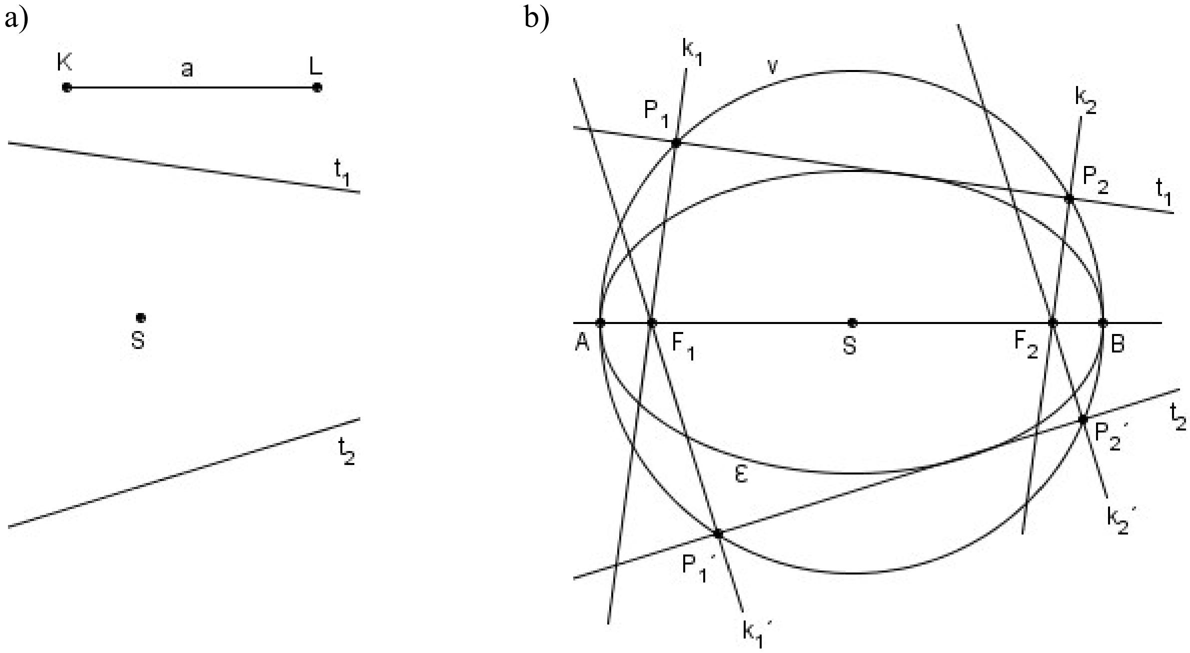
1. Zostrojíme kružnicu $v(S, a)$.
2. Vyznačíme body $t_1 \cap v = \{P_1, P_2\}$, $t_2 \cap v = \{P_1', P_2'\}$ [body P_1, P_2/P_1', P_2' sú päty kolmíc zostrojených z ohnísk F_1, F_2 na dotyčnicu t_1, t_2 ; veta 2.6.] .
3. Zostrojíme kolmice k_i, k_i', $i=1,2$ v bodoch P_i, P_i'.
4. Vyznačíme body $k_1 \cap k_1' = \{F_1\}$, $k_2 \cap k_2' = \{F_2\}$.
5. Hlavné vrcholy A, B elipsy sú priesečníky priamky F_1F_2 s kružnicou v.

Výstup: elipsa ε (F_1, F_2, A)

Diskusia: Počet riešení závisí od vzájomnej polohy kružnice v a dotyčníc t_i:

- $v \cap t_i = \{P_i, P_i'\}$ tak úloha má práve jedno riešenie (Obr. 20.b),
- $v \cap t_i = \{P_1\}$ alebo $v \cap t_i = \emptyset$ tak úloha nemá riešenie.

a) b)



Obr. 20.: Riešenie príkladu 20

Riešenie: b) **pomocou softvéru GeoGebra**

príklad 20

Príklad 21.: Zostrojte elipsu, ak je dané ohnisko F_1, dotyčnica t, dĺžka hlavnej osi je určená dĺžkou úsečky $|KL|$ a dĺžka vedľajšej osi je určená dĺžkou úsečky $|PQ|$

($|KL| > |PQ| = 2a > 2b$).

Riešenie: a) **pomocou rysovacích potrieb**

Vstup: ohnisko F_1, dotyčnica t, $|KL| = 2a$, $|PQ| = 2b$ (Obr. 21.a)

Postup konštrukcie: (Obr. 21.b)

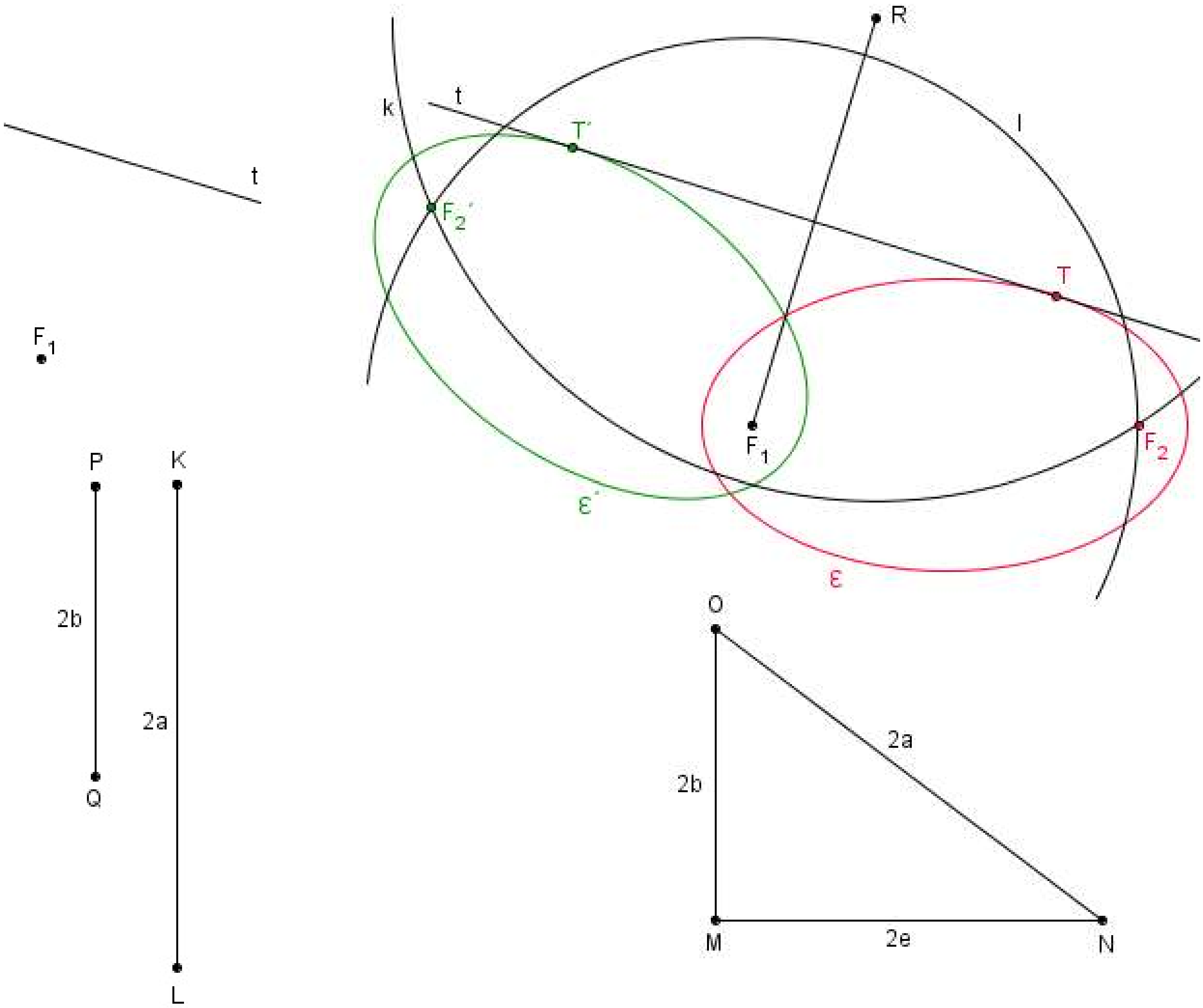
1. Zostrojíme pravouhlý trojuholník MNO s pravým uhlom pri vrchole M, s preponou $|ON| = 2a$ a odvesnou $|MO| = 2b$.
2. Zostrojíme bod R súmerne združený s ohniskom F_1 podľa dotyčnice t.
3. Zostrojíme kružnicu $k(R, 2a)$.
4. Zostrojíme kružnicu $l(F_1, 2e)$.
5. Vyznačíme $k \cap l = \{F_2, F_2'\}$.
6. Zostrojíme dotykový bod dotyčnice t, podľa príkladu 11.

Výstup: $\varepsilon (F_1, F_2, T)$, $\varepsilon' (F_1, F_2', T')$

Diskusia: Počet riešení závisí od vzájomnej polohy kružníc k, l:

- $k \cap l = \{F_2, F_2'\}$, tak úloha má dve riešenia (Obr. 21.b) ε (F_1, F_2, T), ε' (F_1, F_2', T),
- $k \cap l = \{F_2\}$, tak úloha má jedno riešenie,
- $k \cap l = \emptyset$, tak úloha nemá riešenie.

a) b)



Obr. 21.: Riešenie príkladu 21

Riešenie: b) **pomocou softvéru GeoGebra**

[príklad 21]

IV. Konštrukcia dotyčnice elipsy.

Príklad 22.: Zostrojte dotyčnicu k nenarysovanej elipse v jej bode T, ak sú dané obe ohniská.

Riešenie: a) **pomocou rysovacích potrieb**

Vstup: ohniská F_1, F_2, $T \in \varepsilon$, ($T \notin F_1F_2$) (Obr. 22.a)

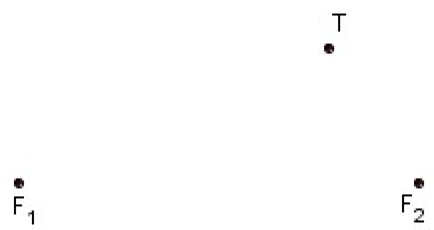
Postup konštrukcie: (Obr. 22.b)

1. Zostrojíme sprievodiče bodu T.
2. Zostrojíme priamku t, ako os vonkajšieho uhla sprievodičov bodu T.

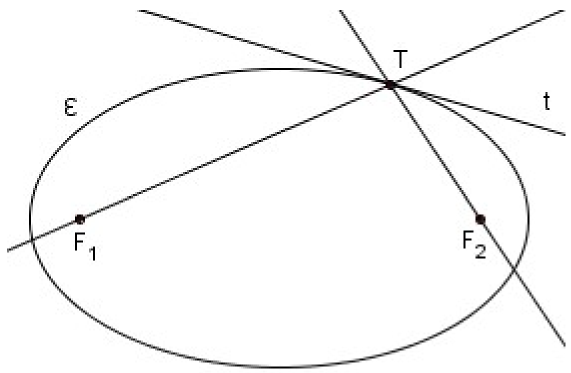
Výstup: dotyčnica elipsy v bode T

Diskusia: Úloha má práve jedno riešenie.

a)



b)



Obr. 22.: Riešenie príkladu 22

Riešenie: b) **pomocou softvéru GeoGebra**

príklad 22

Príklad 23.: Dané sú ohniská F_1, F_2 a normála n elipsy (body F_1, F_2 ležia v rôznych polrovinách vzhľadom na normálu n). Zostrojte elipsu ε a dotyčnicu t elipsy v bode, v ktorom je zostrojená normála.

Riešenie: a) **pomocou rysovacích potrieb**

Vstup: ohniská F_1, F_2, normálna n (Obr. 23.a)

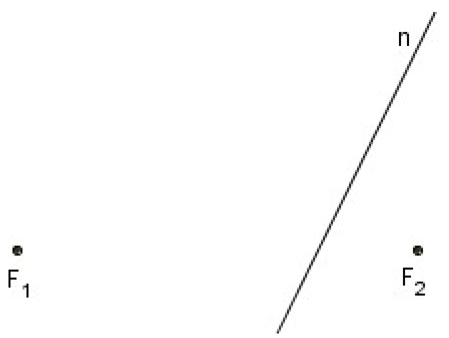
Postup konštrukcie: (Obr. 23.b)

1. Zostrojíme bod R, ktorý je súmerne združený s ohniskom F_2 podľa normály n.
2. Zostrojíme priamku F_1R.
3. Vyznačíme bod $F_1R \cap n = \{T\}$, $T \in \varepsilon$.
4. V bode T zostrojíme kolmicu t na normálu n, je to dotyčnica elipsy v bode T.

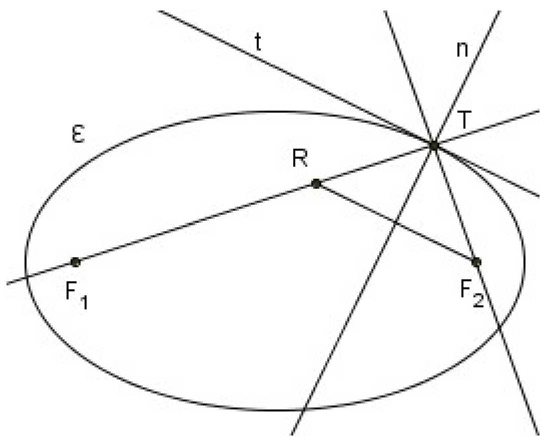
Výstup: elipsa ε, dotyčnica elipsy

Diskusia: Úloha má práve jedno riešenie.

a)



b)



Obr. 23.: Riešenie príkladu 23

Riešenie: b) **pomocou softvéru GeoGebra**

príklad 23

Príklad 24.: Zostrojte dotyčnicu elipsy prechádzajúcu vonkajším bodom R elipsy bez jej vykreslenia, ak sú dané hlavné a vedľajšie vrcholy elipsy.

Riešenie: a1) **pomocou rysovacích potrieb**

Vstup: hlavné vrcholy A, B, vedľajšie vrcholy C, D, vonkajší bod elipsy R (Obr. 24.a)

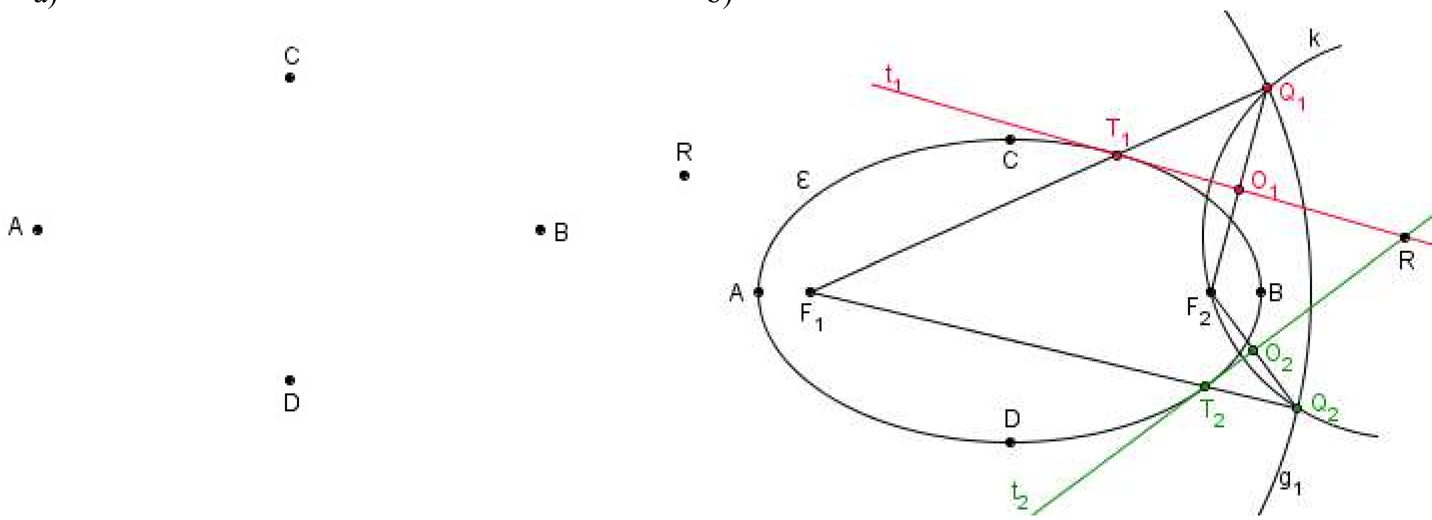
Postup konštrukcie: použitá určujúca kružnica elipsy (Obr. 24.b)

- Zostrojíme ohniská F_1, F_2.
- Zostrojíme kružnicu $k(R, |F_2R|)$.
- Zostrojíme určujúcu kružnicu $g_1(F_1, 2a)$.
- Vyznačíme $k \cap g_1 = \{Q_1, Q_2\}$.
- Zostrojíme body O_1, O_2 tak, že $(F_2QO) = -1$ a $(F_2QO') = -1$.
- Zostrojíme dotyčnice $t_1 = RO_1$, $t_2 = RO_2$.
- Zostrojíme priamky F_1Q_1, F_2Q_2.
- Vyznačíme $RO_i \cap F_1Q_i = \{T_i\}$, $i = 1, 2$.

Diskusia: Počet riešení závisí od polohy bodu R:

- R vonkajší bod, tak úloha má dve riešenia (Obr. 24.b)
- R bod elipsy, tak úloha má práve jedno riešenie,
- R je vnútorným bodom elipsy, tak úloha nemá riešenie.

a) b)



Obr. 24.: Riešenie príkladu 24

Riešenie: b1) **pomocou softvéru GeoGebra**

príklad 24 – určujúca kružnica

a2) **pomocou rysovacích potrieb**

Vstup: hlavné vrcholy A, B, vedľajšie vrcholy C, D, vonkajší bod elipsy R (Obr. 24.a)

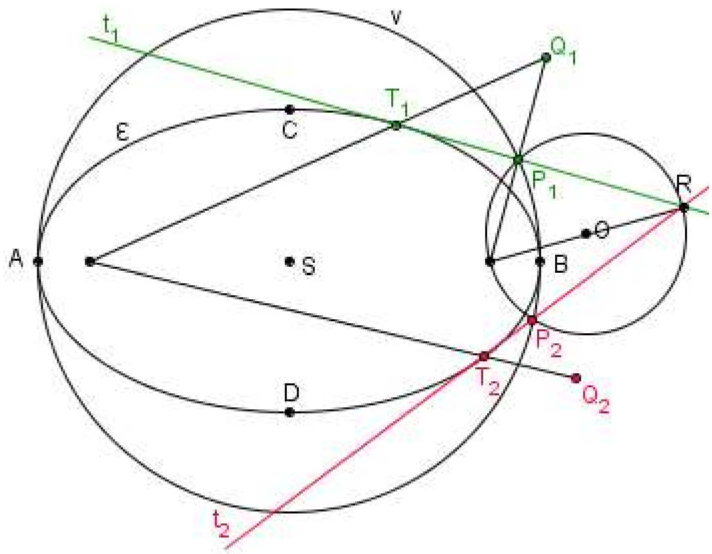
Postup konštrukcie: použitá vrcholová kružnica elipsy (Obr. 24.c)

- Zostrojíme ohniská F_1, F_2.
- Zostrojíme bod O tak, že $(RF_2O) = -1$.
- Zostrojíme Talesovu kružnicu $\tau(O, |RO|)$.
- Zostrojíme vrcholovú kružnicu $v(S, a)$.
- Vyznačíme $k \cap v = \{P_1, P_2\}$.
- Zostrojíme dotyčnice elipsy $t_i = RP_i$, $i = 1, 2$.
- Zostrojíme body Q_i, $i = 1, 2$ súmerne združené s ohniskom F_2 podľa dotyčníc t_i.
- Zostrojíme priamky F_1Q_i.
- Vyznačíme $t_i \cap F_1Q_i = \{T_i\}$.

Výstup: dotyčnice t_1, t_2 elipsy ε prechádzajúce vonkajším bodom R elipsy

Diskusia: Počet riešení závisí od polohy bodu R:

- R vonkajší bod, tak úloha má dve riešenia (Obr. 24. c)
- R bod elipsy, tak úloha má práve jedno riešenie,
- R je vnútorným bodom elipsy, tak úloha nemá riešenie.



Obr. 24.: Riešenie príkladu 24

Riešenie: b2) **pomocou softvéru GeoGebra**

príklad 24 – vrcholová kružnica

Príklad 25.: Zostrojte dotyčnice elipsy rovnobežné s danou priamkou p, bez vykreslenia elipsy, ak sú dané jej hlavné a vedľajšie vrcholy.

Riešenie: a1) **pomocou rysovacích potrieb**

Vstup: hlavné vrcholy A, B, vedľajšie vrcholy C, D, priamka p (Obr. 25.a)

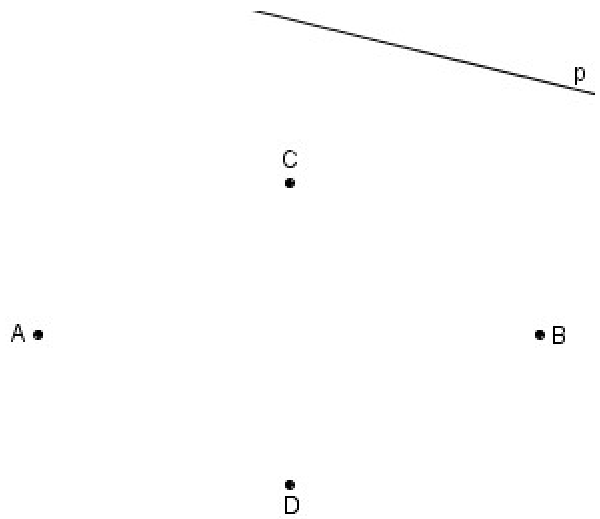
Postup konštrukcie: použitá určujúca kružnica elipsy (Obr. 25.b)

- Zostrojíme priamku k kolmú na danú priamku p prechádzajúcu ohniskom F_2.
- Zostrojíme určujúcu kružnicu $g_1(F_1, 2a)$.
- Vyznačíme $g_1 \cap k = \{Q_1, Q_2\}$.
- Zostrojíme body O_i, i=1,2 úsečky F_2Q_i.
- Zostrojíme priamky t_i prechádzajúce bodmi O_i, i = 1, 2 rovnobežné s priamkou p.
- Určíme $F_1Q_i \cap t_i = \{T_i\}$.

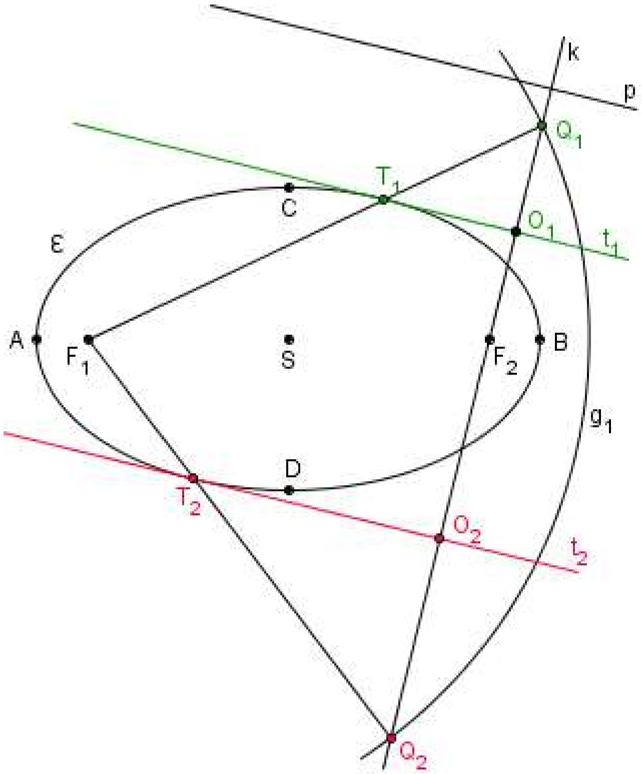
Výstup: dotyčnice t_1, t_2 elipsy ε rovnobežné s danou priamkou p

Diskusia: Úloha má vždy dve riešenia.

a)



b)



Obr. 25.: Riešenie príkladu 25

Riešenie: b1) **pomocou softvéru GeoGebra**

[príklad 25 – určujúca kružnica]

Riešenie: a2) **pomocou rysovacích potrieb**

Vstup: hlavné vrcholy A, B, vedľajšie vrcholy C, D, priamka p (Obr. 25.a)

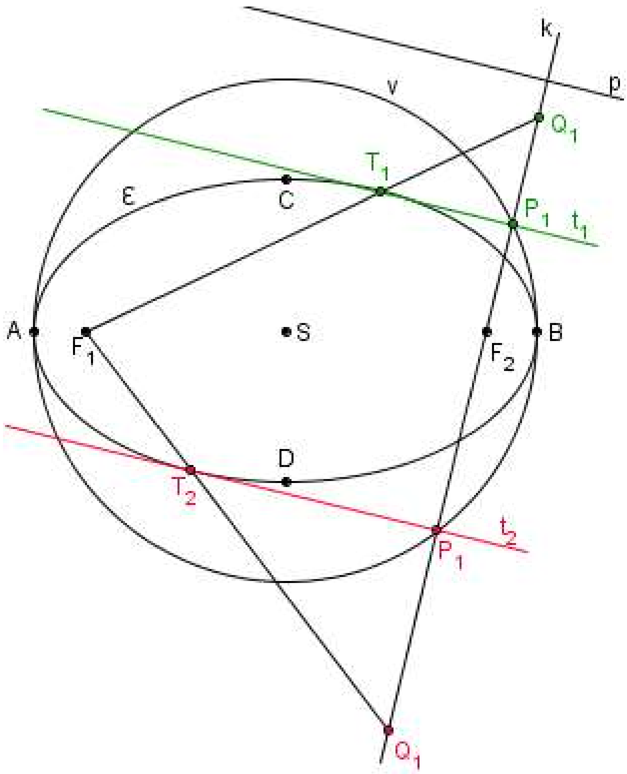
Postup konštrukcie: pomocou vrcholovej kružnice elipsy (Obr. 25.c)

- Zostrojíme ohniská F_1, F_2.
- Zostrojíme priamku k kolmú na danú priamku p prechádzajúcu ohniskom F_2.
- Zostrojíme vrcholovú kružnicu $v(S,a)$.
- Vyznačíme body $v \cap k = \{P_1, P_2\}$.
- Zostrojíme priamky t_i prechádzajúce bodmi P_i, i = 1, 2 rovnobežné s priamkou p.
- Zostrojíme body Q_i, i = 1, 2 ktoré sú súmerne združené s ohniskom F_2 podľa dotyčníc t_i. Body Q_i sú bodmi riadiacej kružnice elipsy $g_1(F_1,2a)$.
- Zostrojíme $F_1Q_i \cap t_i = \{T_i\}$.

Výstup: dotyčnice t_1, t_2 elipsy ε rovnobežné s danou priamkou p

Diskusia: Úloha má vždy dve riešenia.

c)



Obr. 25.: Riešenie príkladu 25

Riešenie: b2) **pomocou softvéru GeoGebra**

príklad 25 – vrcholová kružnica