

# Modelovanie kriviek a plôch (1)

## Cvičenie 7

4. 11. 2015

1. Vymodelujte polkružnicu kružnice  $\mathcal{K} = \{[\frac{R}{0}], r \mid 0 < r < R\}$  ležiacu v polrovine  $y \geq 0$  ako kvadratickú uniformovanú racionálnu Bézierovu krivku  $b_r^2(t)$  prostredníctvom stereografickej projekcie  $\varphi$  z bodu  $[\frac{R}{-r}]$ , pozri obr. 1.

Ako možno interpretovať súradnice a váhu prostredného riadiaceho vrchola?

*Pomôcka:* Uvažujte priamku  $\ell_1$ , ktorá prechádza bodom  $[\frac{R}{-r}]$  a  $[\frac{x_1}{0}]$ , kde  $x_1 \in \langle R - r, R + r \rangle$ . Táto priamka pretína kružnicu v bode  $\varphi(x_1) \in \mathcal{K}$ . Zostavte predpis zobrazenia  $\varphi(t)$ ,  $t \in \langle 0, 1 \rangle$  a presvedčte sa, že ide o racionálne zobrazenie s predpisom

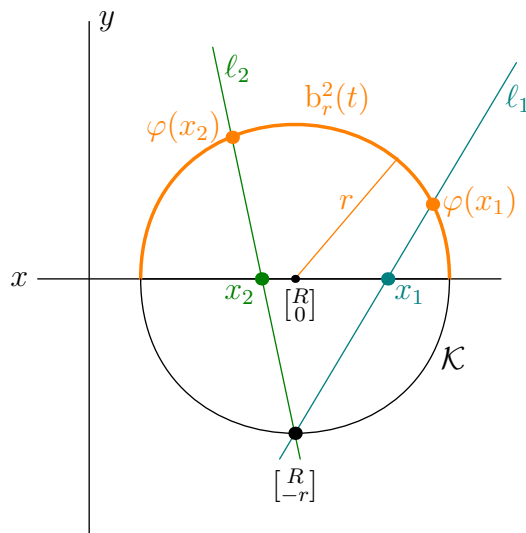
$$\varphi(t) = \left( \frac{\xi(t)}{\zeta(t)}, \frac{\eta(t)}{\zeta(t)} \right).$$

Na určenie riadiacich vrcholov oblúka polkružnice použite polárne formy polynómov  $\xi(t), \eta(t), \zeta(t)$ . Interpretujte súradnice prostredného riadiaceho vrchola.

2. Uvažujme elipsu  $\mathcal{E}$  z pr. 2 z cvičenia č. 6 a dosadíme  $(a, b) = (r, r)$ . Časť takto získanej kružnice  $\mathcal{K} = ([\frac{0}{0}], r > 0)$  ležiacu v prvom kvadrante (ozn.  $\mathcal{K}_{1/4}$ ) vieme následne reprezentovať ako kvadratickú uniformovanú racionálnu Bézierovu krivku s riadiacimi vrcholmi  $\langle p_0 = [\frac{r}{0}], p_1 = [\frac{r}{r}], p_2 = [\frac{0}{r}] \rangle$  a nenulovými váhami  $\langle w_0 = w_1 = 1, w_2 = 2 \rangle$ .

Reprezentujte polkružnicu  $\mathcal{K}_{1/2}$  ležiacu v polrovine  $x \geq 0$  ako kvadratickú uniformovanú racionálnu Bézierovu krivku  $b_r^2(t)$ ; využite už zostavenú parametrizáciu  $\mathcal{K}_{1/4}$ .

*Pomôcka:* Parametrizáciu  $\mathcal{K}_{1/4}$  sme zostavili prostredníctvom stereografickej projekcie z bodu  $[\frac{-r}{0}]$ . Ak rozšírime definičnú oblasť z  $\langle 0, 1 \rangle$  na  $\langle -1, 1 \rangle$ , čím pokryjeme požadovanú polkružnicu  $\mathcal{K}_{1/2}$ , konštrukcia parametrizácie je totožná. Následne stačí reparametrizovať definičnú



Obr. 1: Stereografická projekcia.

oblasť a dosadiť do predpisu parametrizácie. Súradnice riadiacich vrcholov  $\mathcal{K}_{1/2}$  získame transformáciou medzi monomiálnou a Bernsteínovou reprezentáciou parametrizácie.

3. Vymodelujte polkružnicu kružnice  $\mathcal{K} = \{[0], r \mid r > 0\}$  ležiacu v polrovine  $y \geq 0$  ako kvadratickú uniformovanú racionálnu Bézierovu krivku  $b_r^2(t)$ , ak váha v riadiacom vrchole  $p_0 = [0]$  je  $w_0$  a v riadiacom vrchole  $p_2 = [r]$  je  $w_2$ .

*Pomôcka:* Vieme, že prostredný riadiaci vrchol má váhu  $w_1 = 0$  a súradnice  $p_1 = [0]$ . Vyjadrite  $y$  prostredníctvom váh  $w_0, w_2$  a polomeru  $r$ .

4. Uvažujme polkružnicu  $b_r^2(t)$  z pr. 3 a hodnoty váh

- (a)  $w_0 = w_2 = 1$ ,  
 (b)  $w_0 = 4, w_2 = 1$ .

V oboch prípadoch dopočítajte súradnice riadiaceho vrchola  $p_1$  a vyčísľte prostredníctvom Casteljauovho algoritmu súradnice bodu  $b_r^2(1/2)$ . Výsledky porovnajte a prípadný rozdiel interpretujte.