

Cvičenie č. 1

29. 9. 2015

1. Dokážte, že graf nepriamej úmernosti $y = \frac{k}{x}$, $x \neq 0$, je kuželosečka a zostavte jej maticu. Je uvažovaná kuželosečka singulárna lebo regulárna?
Nájdite rovnicu kuželosečky $y = \frac{k}{x}$, $k > 0$ v sústave súradníc, ktorá vznikne z pôvodnej karteziánskej sústavy súradníc otočením o 45 stupňov okolo začiatku sústavy súradníc.
2. Dokážte, že afinná transformácia $x' = x, y' = \frac{b}{a}y$ zobrazuje kružnicu $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ na elipsu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ a že transformácia $x' = \frac{a}{b}x, y' = y$ zobrazuje kružnicu $x^2 + y^2 - b^2 = 0$ na rovnakú elipsu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.
3. **Zväzok kuželosečiek.** Uvažujme navzájom rôzne kuželosečky Q_1 a Q_2 , ich rovnice zapíšme v zjednodušenom tvare $q_1(x, y) = 0$ a $q_2(x, y) = 0$. Pre ľubovoľné konštanty $l, m \in \mathbb{R}$ uvažujme tretiu rovnicu $q(x, y) = 0$, kde $q(x, y) = lq_1(x, y) + mq_2(x, y)$.
 - (a) Dokážte, že pre takmer všetky $l, m \in \mathbb{R}$ rovnica $q(x, y) = 0$ určuje kuželosečku a sformulujte výnimky. Sú medzi kuželosečkami $q(x, y) = 0$ aj kuželosečky Q_1 a Q_2 ?
 - (b) Čo možno povedať o kuželosečkách zväzku určeného dvomi kružnicami?
4. Dokážte, že každé dve kružnice sú navzájom podobné. Pomôcka: Uvažujte kružnice $k_i : (x - m_i)^2 + (y - n_i)^2 - r_i^2 = 0, r_i > 0, i = 1, 2$. Nájdite rovnice rovnolehlosti v rovine, ktorá transformuje kružnicu k_1 do kružnice k_2 .
5. Majme dve priamky $p_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ a $p_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Dokážte, že ich zjednotenie je singulárna kuželosečka s rovnicou $(a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) = 0$.