

Domáca úloha č. 1

20. 10. – 3. 11. 2015

1. (1b) **Vrcholová rovnica elipsy (hyperboly).** Presvedčte sa, že elipsa resp. hyperbola $\frac{x^2}{a^2} + \sigma \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ má v sústave súradníc so začiatkom v bode $V = (-\sigma a, 0)$ rovnicu $y^2 = 2px + (-\sigma \frac{p}{a})x^2$, kde $p = \frac{b^2}{a}$.
2. (2b) Majme afinnú transformáciu ϕ určenú rovnicami $x' = \frac{a}{r}x + 2, y' = \frac{b}{r}y + 1$. Nájdite obraz $k' = \phi(k)$ kružnice $k : x^2 + y^2 - r^2 = 0$. Nakreslite ilustračný obrázok, v ktorom budú súčasne k aj k' pre $r = 1, a = 0.5, b = 2$.
3. (2b) **Zástavková konštrukcia bodov elipsy.** Zo začiatku sústavy súradníc vypust'te ľubovoľnú polpriamku a zostrojte na nej body M, N tak že, $|OM| = a, |ON| = b$. Bodom M resp. N ved'te rovnobežku s osou Oy resp. Ox . Dokážte, že priesečník týchto priamok leží na elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.
4. (2b) Dokážte, že kuželosečka $Q: 6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$ je regulárna. V každom bode $M = (m, n)$ kuželosečky Q nájdite všetky priamky, ktoré kuželosečku pretínajú iba v tom bode. Nakreslite ilustračný obrázok. Určte, ktorá z nich je dotyčnicou.
5. (1b) Zostavte rovnicu kuželosečky, ak má stred $S = (1, -1)$, prechádza bodom $M = (-1, 2)$ a jej asymptotické smery sú určené vektormi $\mathbf{u} = (0, 1), \mathbf{v} = (1, 1)$.
6. (2b) Pre ktoré hodnoty $k, l \in \mathbb{R}$ kuželosečka $kx^2 + 12xy + 9y^2 + 4x + ly - 13 = 0$
 - (a) je stredová
 - (b) nemá stred
 - (c) má nekonečne veľa stredov.
7. (4b) Uvažujme hyperbolu $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.
 - (a) Dokážte, že bod dotyku rozpol'uje úsečku, ktorú na dotyčnici hyperboly vytínajú asymptoty.
 - (b) Dokážte, že obsah trojuholníka, ktorého dve strany ležia na asymptotách a tretia na dotyčnici hyperboly, je ab .

Pomôcka: Pre obsah trojuholníka určeného vrcholmi $V_i = (x_i, y_i), i = 1, 2, 3$ platí

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

8. (1b) Zostavte rovnicu kuželosečky, ktorá má stred $S = (1, -2)$, prechádza bodom $P = (0, -3)$ a dotýka sa osi x v začiatku sústavy súradníc.