

Domáca úloha č. 3

04. 12. – 15. 12. 2015

1. (5b) **Průzková konstrukcia bodov elipsy.** Na súradnicových osiach Ox , Oy karteziánskej sústavy súradníc ležia body M, N tak, že $|MN| = a + b$, $a > b > 0$. Dokážte, že bod X úsečky MN , pre ktorý $|MX| = b$, leží na elipse s rovnicou $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

Pomôcka: Pre bod $X \in MN$ taký, že $|MX| = b$ a $|XN| = a$ platí, že jeho súradnice sa dajú zapísať ako

$$X = \frac{a}{a+b}M + \frac{b}{a+b}N.$$

2. (2b) Presvedčte sa, že parameter p hyperboly s rovnicou $y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2$ je polovica dĺžky tetivy prechádzajúcej ohniskom kužeľosečky kolmo na hlavnú os.
3. (2b) Dokážte, že riadiaca priamka elipsy (resp. hyperboly) je polárou odpovedajúceho ohniska.
4. (7b) Uvažujme regulárnu kvadriku $\mathcal{Q}: x^2 + 4xy - 6xz + 4yz + 4y = 0$.
- (a) Presvedčte sa, že bod $[0, 0, 0]$ leží na \mathcal{Q} .
- (b) Určite predpis dotykovej roviny ku \mathcal{Q} v tomto bode, ak vieme, že je to polára bodu dotyku.
- (c) Nájdite stred kvadriky \mathcal{Q} .

Pomôcka: Využite analógiu so vzt'ahmi platiacimi pre kužeľosečky v rovine.

5. (4b) Ukážte, že prienik kvadriky $\mathcal{Q}: xy - z(1 - x - y - z) = 0$ a roviny $z = 0$ je tvorený dvoma priamkami a nájdite ich rovnice. Pri riešení nezabudnite, že sme v trojrozmernom priestore.