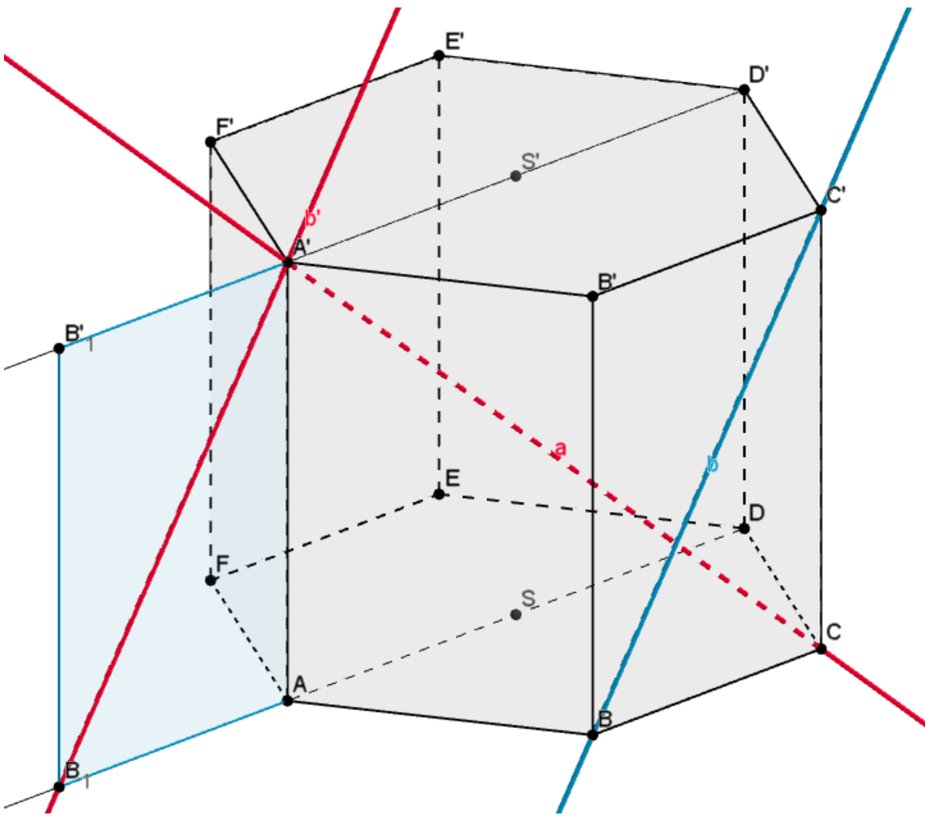
Cvičenie č. 5.

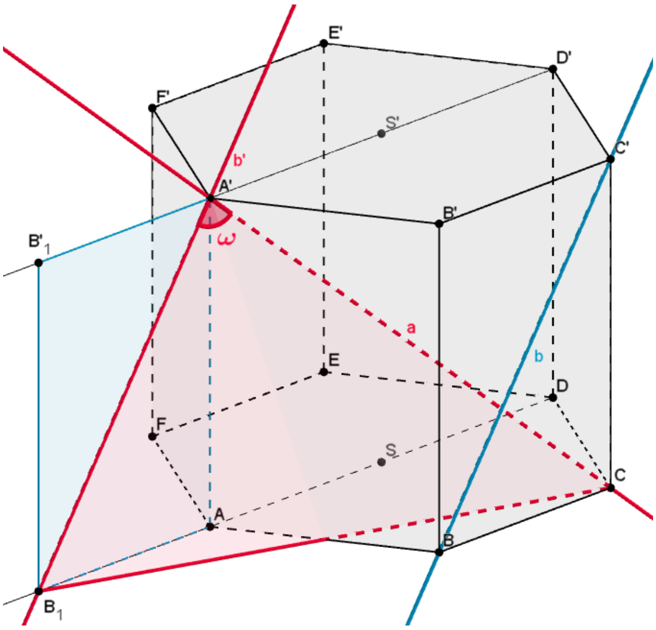
RIEŠENIE

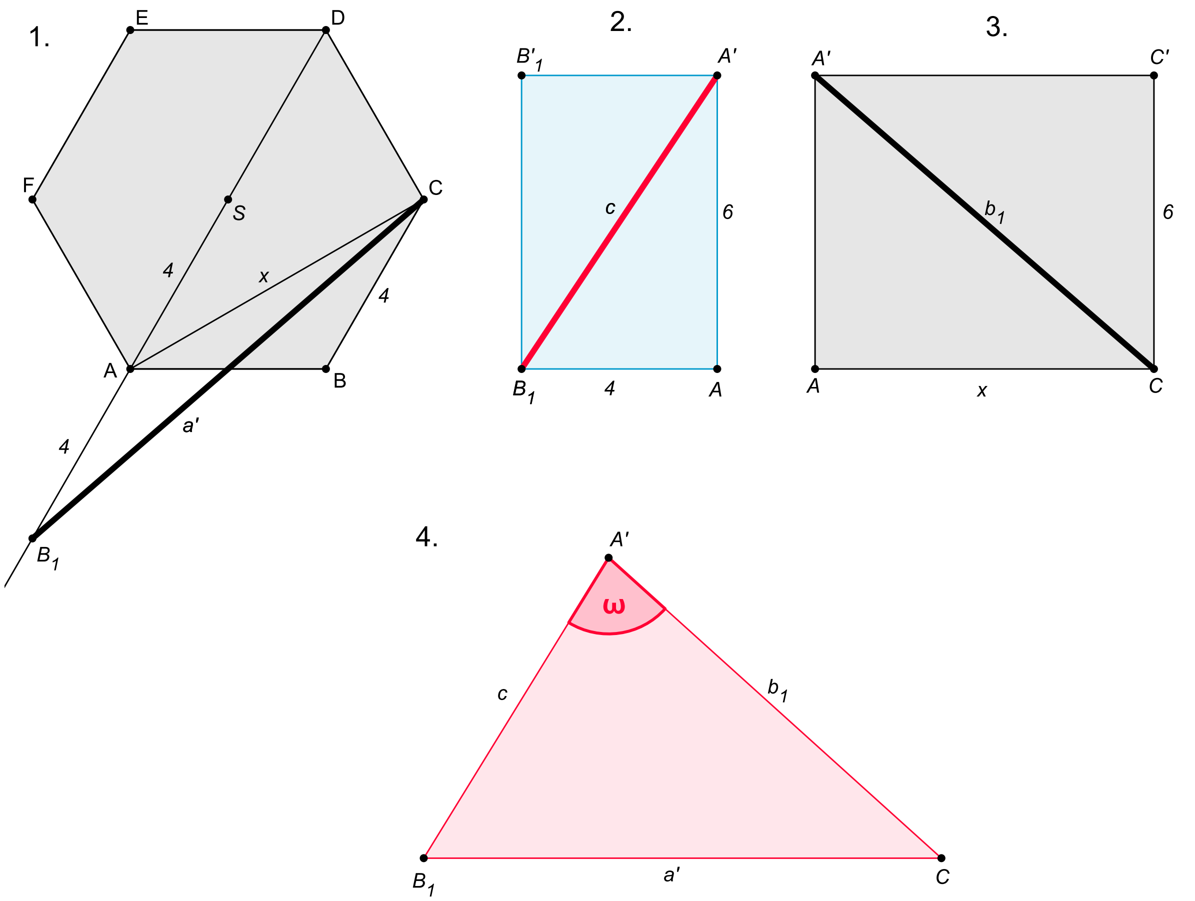
Príklad 1.: Priamky $a = A'C$, $b = BC'$ sú mimobežky. Platí, že uhol mimobežiek a, b je zhodný s uhlom priamok a', b': $a' \| a$, $b' \| b$, $a' \times b'$.

1. Z vlastností pravidelného 6-uholníka, a teda aj pravidelného 6-bokého hranola vieme, že roviny BCC' a ADD' sú rovnobežné. Teda hľadaná priamka b' rovnobežná s priamkou b a rôznobežná s priamkou a bude ležať v rovine ADD'. K zostrojeniu tejto priamky nám pomôže rovnobežník $B_1AA'B_1'$ v rovine ADD' zhodný s rovnobežníkom $BCC'B'$. Je zrejmé, že priamka a' z rozboru je totožná s priamkou a. A teda platí rovnosť: $\sphericalangle a, b \cong \sphericalangle a, b' \cong \sphericalangle CA'B_1$. Označme tento uhol ω.



2. Hľadaný uhol ω je zhodný s uhlom pri vrchole A' v trojuholníku B_1CA'.





3. Ak chceme konštrukčne uhol ω zostrojiť, musíme zostrojiť trojuholník B_1CA' podľa vety sss, so stranami $a' = |B_1C|$, $b_1 = |CA'|$, $c = |A'B_1|$. Dĺžku strany c určíme ako dĺžku uhlopriečky v obdĺžniku $B_1AA'B_1'$ s dĺžkou strán 4cm a 6cm. Strana b_1 leží

v rovine $ACC'A'$ a je to uhlopriečka obdĺžnika $ACC'A'$ s dĺžkou strán $|x| = |AC|$ a 6cm. Dĺžku $|x| = |AC|$ určíme v podstave (obr. 1). Rovnako v tejto podstave určíme dĺžku strany $a' = |B_1C|$.

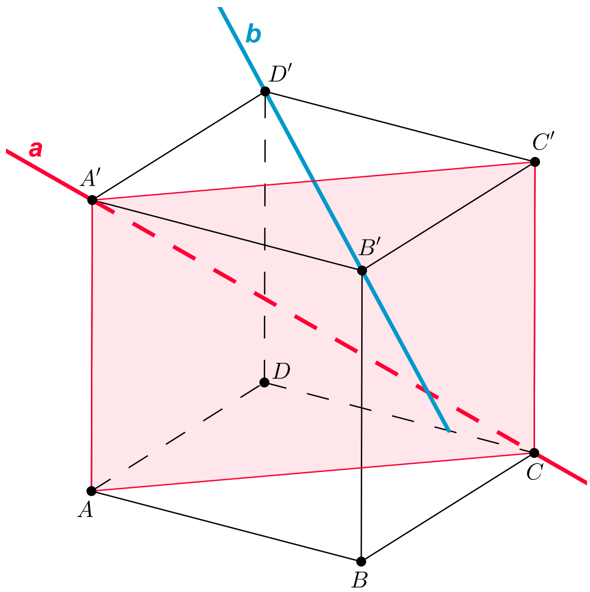
Príklad 2.: Kolmosť mimobežných priamok overujeme tak, že zostrojíme rovinu incidentnú s jednou priamkou a zároveň kolmú na druhú z dvojice priamok.
Napr. $\alpha : a \subset \alpha \wedge b \perp \alpha$. Lebo ak $b \perp \alpha$ tak b je kolmá na každú priamku roviny α, a teda aj na priamku a.
Stenové uhlopriečky kocky, ktoré nie sú rôznobežné s telesovou uhlopriečkou $A'C$ sú: AB', DC', BC', AD', BD, $B'D'$. Ale platí:

1. $BD \| B'D' \Rightarrow \sphericalangle A'C, BD \cong \sphericalangle A'C, B'D'$,
2. $BC' \| AD' \Rightarrow \sphericalangle A'C, BC' \cong \sphericalangle A'C, AD'$,
3. $AB' \| DC' \Rightarrow \sphericalangle A'C, AB' \cong \sphericalangle A'C, DC'$.

1. V tomto prípade zostrojím rovinu $\alpha = AA'CC'$, v ktorej leží priamka $a = A'C$ a priamka $b = B'D'$ je na ňu kolmá - odôvodnenie podľa kritéria kolmosti priamky a roviny:

   $$b \perp A'C' \text{ (lebo štvorec)}, \ \underline{b \perp AA'} : \ A'C', \ AA' \subset AA'CC' \ \wedge \ A'C' \cap AA' = \{A'\}$$
   $$\Uparrow$$
   $$b \perp BB' \text{ (prečo?)} \ \wedge \ AA' \| BB'$$

   a teda aj $BD \perp A'C$.



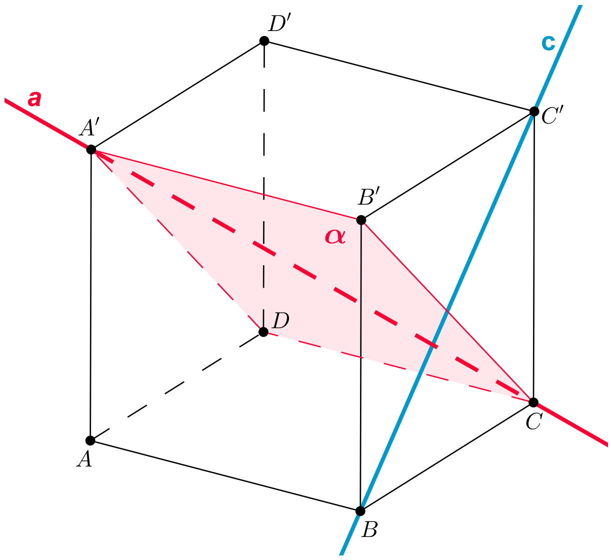
2. Uvažujme rovinu $\alpha = A'B'CD$, v ktorej leží priamka $a = A'C$ a priamka $c = BC'$ je na ňu kolmá - odôvodnenie podľa kritéria kolmosti priamky a roviny:

$c \perp CB'$ (lebo štvorec), $\underline{c \perp A'B'}$: CB', $A'B' \subset A'B'CD \wedge CB' \cap A'B' = \{B'\}$

$$\Uparrow$$

$$c \perp AB \,(\text{prečo?}) \wedge AB \| A'B'$$

a teda aj $AD' \perp A'C$.



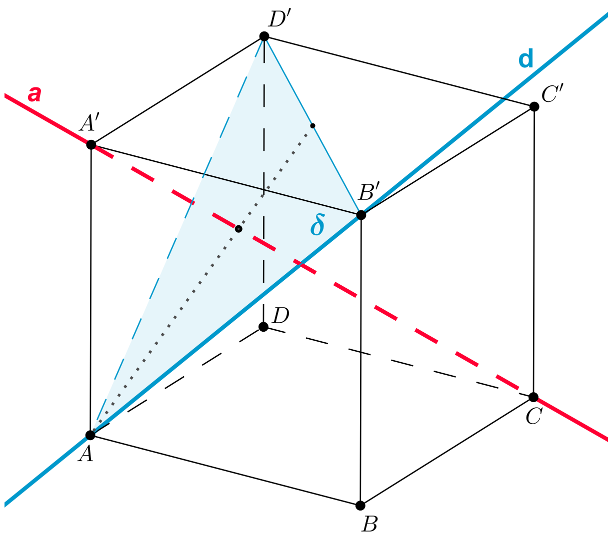
3. Zostrojme rovinu $\delta = AB'D'$ v ktorej leží priamka $d = AB'$ a priamka $a = A'C$ je na ňu kolmá - odôvodnenie podľa kritéria kolmosti priamky a roviny:

   $a \perp B'D'$, $a \perp AD'$: $B'D'$, $AD' \subset \delta \wedge B'D' \cap AD' = \{D'\}$.

   $\Uparrow$ $\Uparrow$

   lebo bod 1. lebo bod 2.

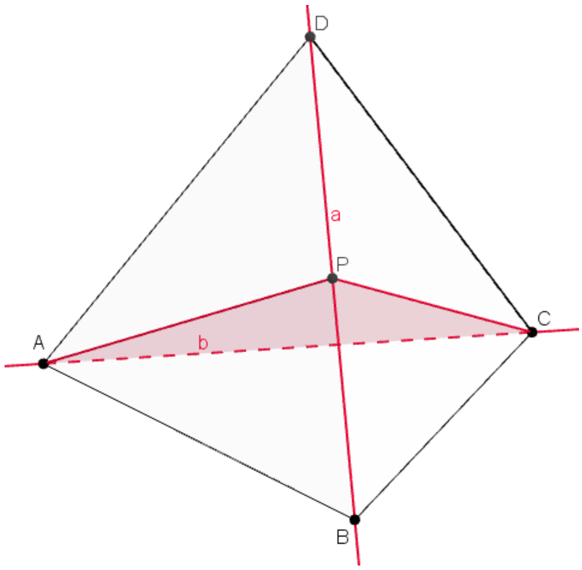
   A teda aj $DC' \perp A'C$.



Príklad 3.: Kolmosť mimobežiek overíme analogicky ako v predchádzajúcom príklade a využijeme pri tom vlastnosti pravidelného štvorhranu - steny sú rovnostranné trojuholníky.

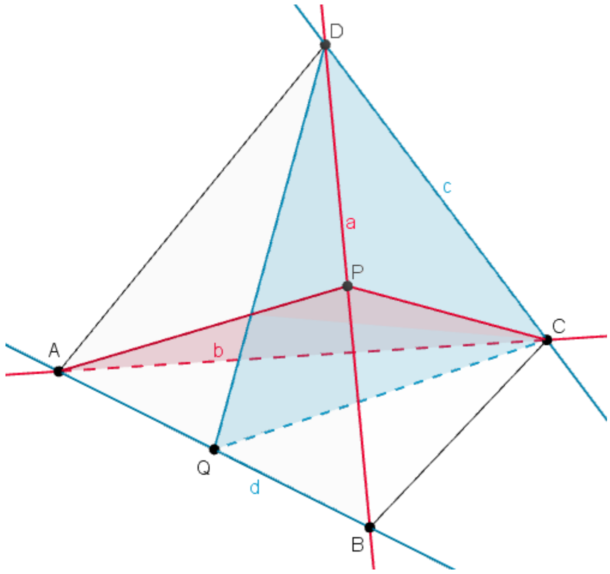
1. Zostrojíme rovinu ACP, kde $(BDP) = -1$. V tejto rovine leží priamka b a priamka a je na ňu kolmá – AP a CP sú výšky v trojuholníku ABD a CBD, v danom poradí, a sú to rôznobežky v rovine ACP.

   $ACP : (BDP) = -1$
   $b \subset ACP \wedge \underline{a \perp ACP}$
   $CP \perp a$
   $AP \perp a$
   $CP \cap AP = \{P\}$



2. Zostrojíme rovinu CDQ, kde $(ABQ) = -1$. V tejto rovine leží priamka c a priamka d je na ňu kolmá - DQ a CQ sú výšky v trojuholníku ABD a ABC, v danom poradí, a sú to rôznobežky v rovine CDQ.

   $CDQ : (ABQ) = -1$
   $c \subset CDQ \wedge \underline{d \perp CDQ}$
   $CQ \perp d$
   $DQ \perp d$
   $CQ \cap DQ = \{Q\}$



3. Vzdialenosť bodu C od roviny ABD meriame ako vzdialenosť bodu C od päty kolmice idúcej bodom C na túto rovinu. Je zrejmé, že r je kolmica na rovinu ABD prechádzajúca bodom C. Odôvodnenie:

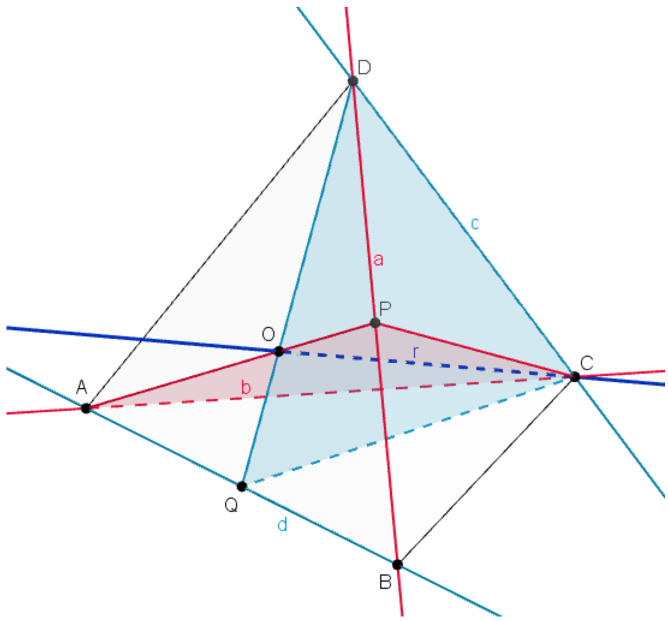
$$\underbrace{CDQ \perp ABD}_{\bigstar} \wedge \underbrace{ACP \perp ABD}_{\blacktriangle} \Rightarrow CDQ \cap ACP = CO, \text{ teda } CO \perp ABD$$

kritérium kolmosti dvoch rovín:

$\bigstar$: $d \subset ABD$: $d \perp CDQ$ (lebo 2.) $\Rightarrow$ $ABD \perp CDQ$

$\blacktriangle$: $a \subset ABD$: $a \perp APC$ (lebo 1.) $\Rightarrow$ $ABD \perp ACP$

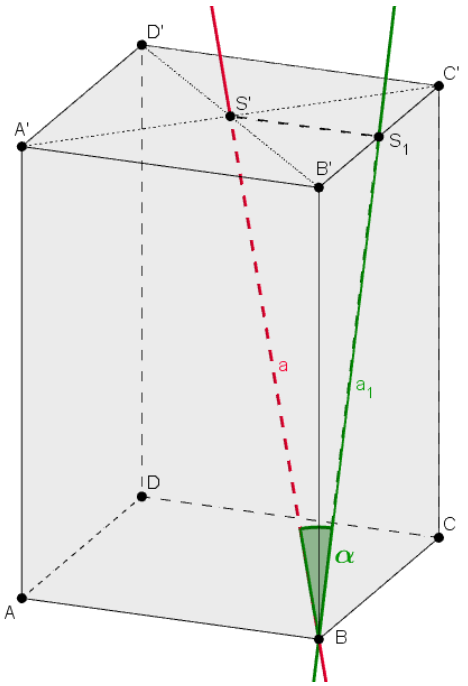
Potom platí, že $|C, ABD| = |CO|$.

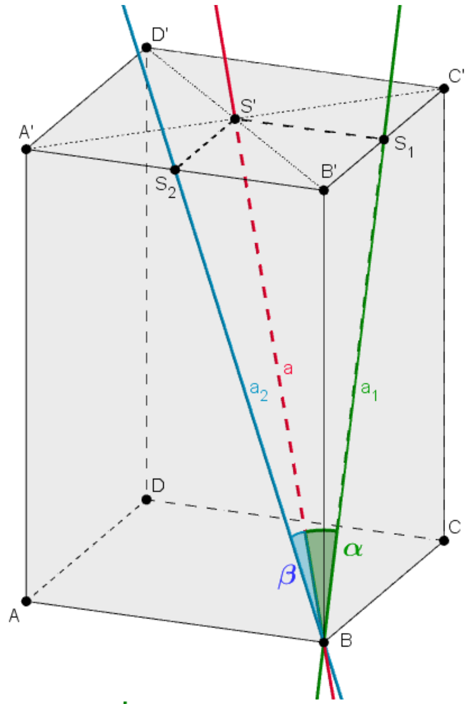


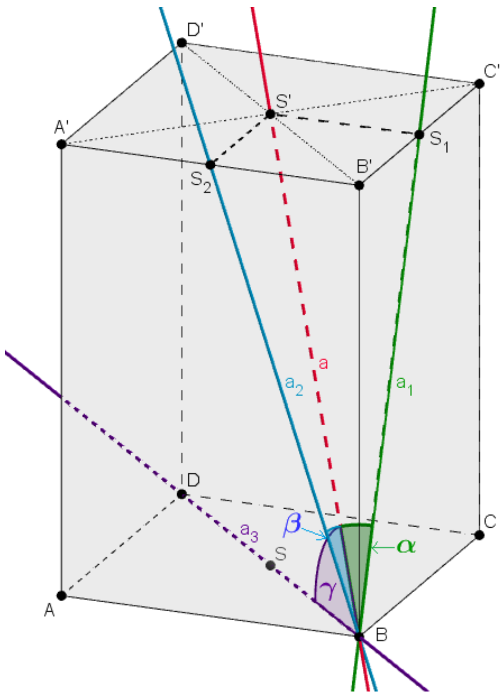
Príklad 4.: Potrebujeme zistiť uhol priamky a s jej kolmým priemetom do jednotlivých rovín.

1. Kolmý priemet priamky a do roviny BCC' je priamka $a_1 = BS_1$, kde bod S_1 – je zrejme stred strany $B'C'$ hornej podstavy.

   Platí: $BCC' \| ADD'$, teda $\sphericalangle a, BCC' \cong \sphericalangle a, ADD'$.







2. Kolmý priemet priamky a do roviny ABB' je priamka $a_2 = BS_2$, kde bod S_2 – je zrejme stred strany $A'B'$ hornej podstavy.

Platí: $ABB' \| DCC'$, teda $\sphericalangle a, ABB' \cong \sphericalangle a, DCC'$.

3. Kolmý priemet priamky a do roviny ABC je priamka $a_3 = BS$, kde bod S – je zrejme stred dojnej podstavy.

   Platí: $ABC \| A'B'C'$, teda $\sphericalangle a, ABC \cong \sphericalangle a, A'B'C'$.

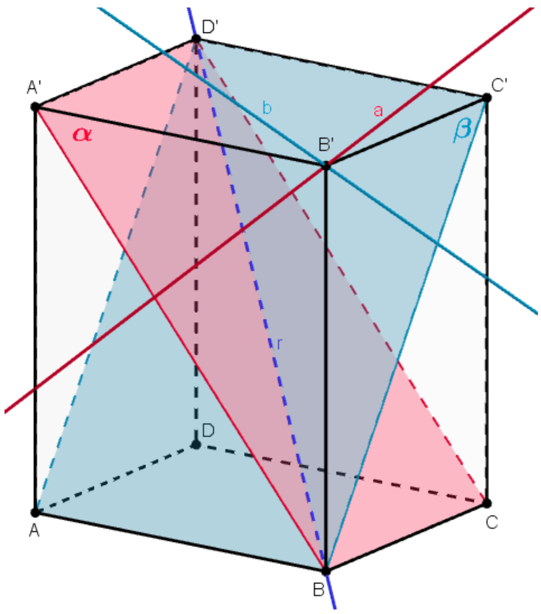
Príklad 5.a):

1. Zostrojíme priamku a kolmú na rovinu α a primku b kolmú na rovinu β, tak aby priamky a a b boli rôznobežné. Teda nech priamka a leží v stene ABB', prechádza bodom B' a je kolmá na priamku $A'B \subset \alpha$. Keďže priamka a leží v stene ABB', tak je aj kolmá na priamku $A'D' \subset \alpha$, ktorá je s BA' rôznobežná. Teda naozaj platí, že $a \perp \alpha$. Symbolicky:

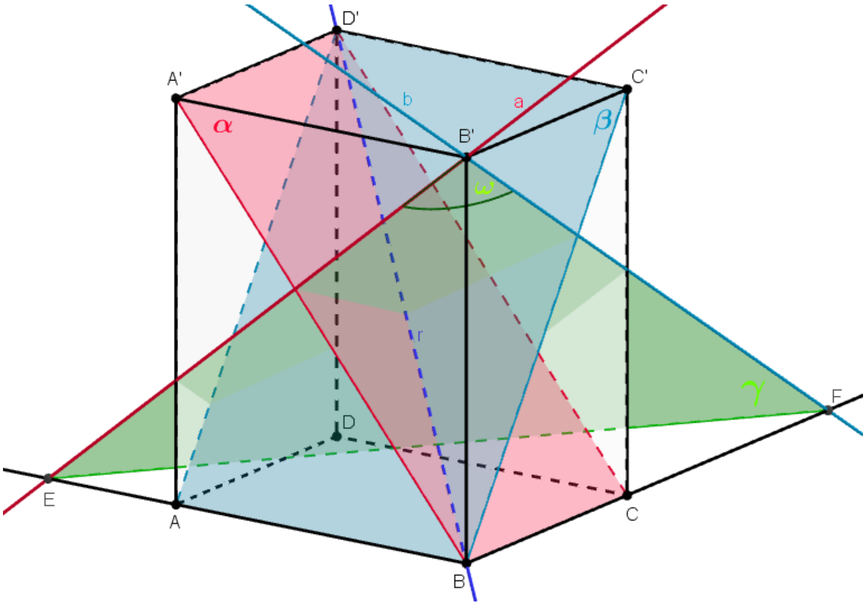
   $a : a \subset ABB', B' \in a \wedge a \perp A'B \subset \alpha$
   $a \subset ABB' \wedge ABB' \perp A'D' \Rightarrow a \perp A'D'$
   $\Rightarrow a \perp BA', a \perp A'D' \wedge BA' \times A'D' \Rightarrow a \perp \alpha$ (kritérium)

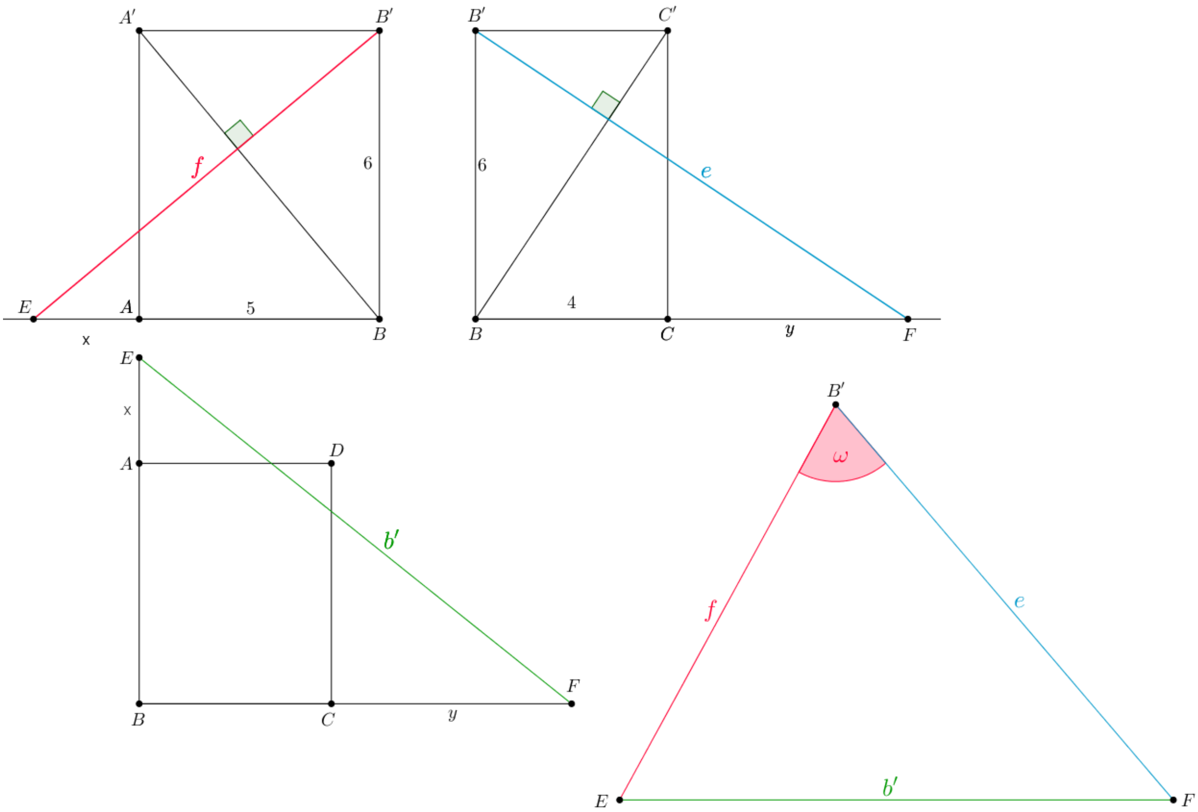
   A nech priamka b leží v stene BCC', prechádza bodom B' a je kolmá na priamku $BC' \subset \beta$. Keďže priamka b leží v stene BCC', tak je aj kolmá na priamku $C'D' \subset \beta$, ktorá je s BC' rôznobežná. Teda naozaj platí, že $b \perp \beta$. Symbolicky:

   $b : b \subset BCC', B' \in b \wedge b \perp BC' \subset \beta$
   $b \subset BCC' \wedge BCC' \perp C'D' \Rightarrow b \perp C'D'$
   $\Rightarrow b \perp BC', b \perp C'D' \wedge BC' \times C'D' \Rightarrow b \perp \beta$ (kritérium)



2. Priamky a a b sú rôznobežné a teda ležia v jednej rovine, označme ju $\gamma = ab$. Priamka a pretína dolnú podstavu v bode $E \in AB$ a priamka b pretína dolnú podstavu v bode $F \in BC$. Platí: $\sphericalangle \alpha\beta \cong \sphericalangle ab = \omega$.

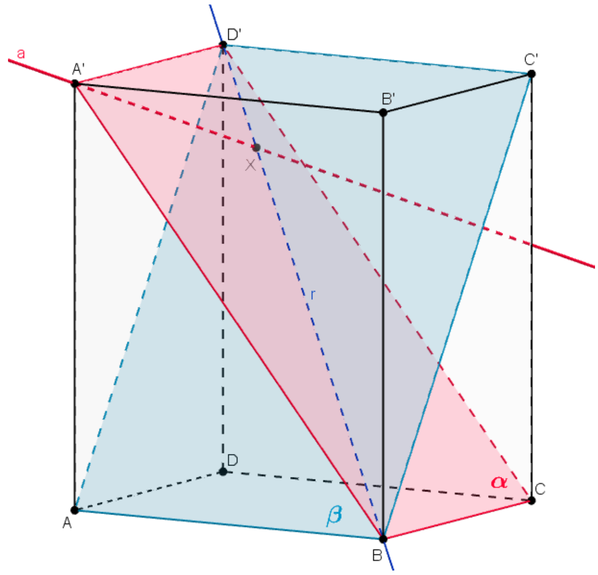




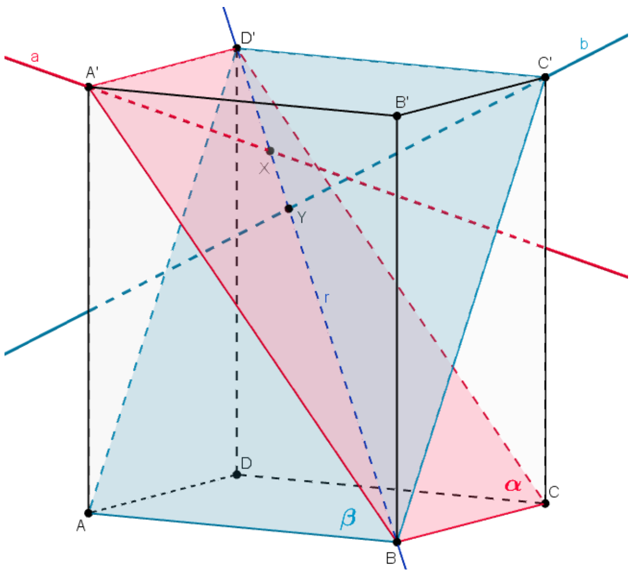
3. Hľadaný $\sphericalangle ab$ je uhol pri vrchole B' v trojuholníku $EFB' \in \gamma$, ktorý zostrojíme podľa vety sss. Dĺžku strany $f = |EB'|$ zistíme v rovine ABB'. Dĺžku strany $e = |B'F|$ zistíme v rovine BCC' a v rovine dolnej podstavy vieme zistiť dĺžku strany $b' = |EF|$ trojuholníka EFB'.

Príklad 5.b):

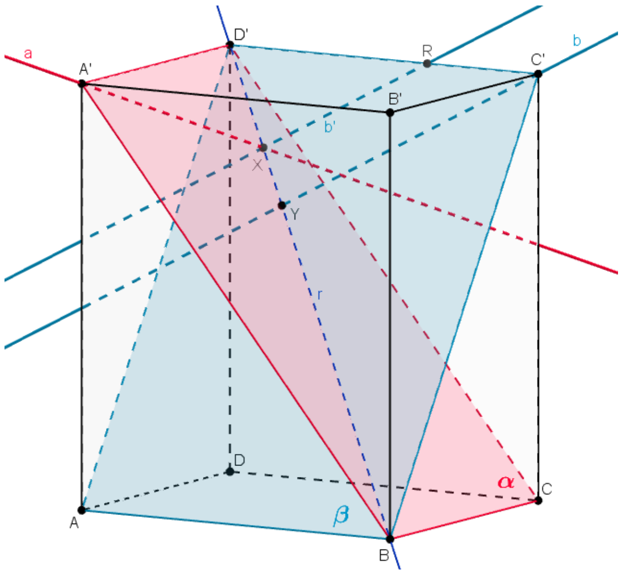
1. Zostrojíme priamku a roviny α kolmú na priesečnicu r rovín α a β. Nech je to priamka $a = A'X$, pričom $X \in r$.



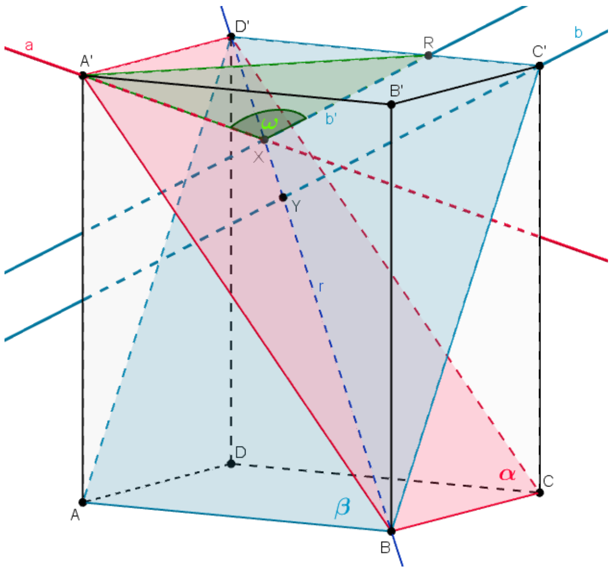
2. Zostrojíme priamku b roviny β kolmú na priesečnicu r rovín α a β. Nech je to priamka $b = C'Y$, pričom $Y \in r$.



3. Podľa definície platí, že $\sphericalangle \alpha\beta \cong \sphericalangle ab$. Keďže priamky a a b sú mimobežné, musíme zostrojiť priamku rovnobežnú s jednou a rôznobežnú s druhou z dvojice priamok. Zostrojme teda priamku b' rovnobežnú s priamkou b prechádzajúcu bodom X a označme $b' \cap C'D' = \{R\}$.



4. Potom uhol priamok a a b je zhodný s uhlom pri vrchole X v trojuholníku $A'RX$, ktorého skutočnú veľkosť chceme zostrojiť.



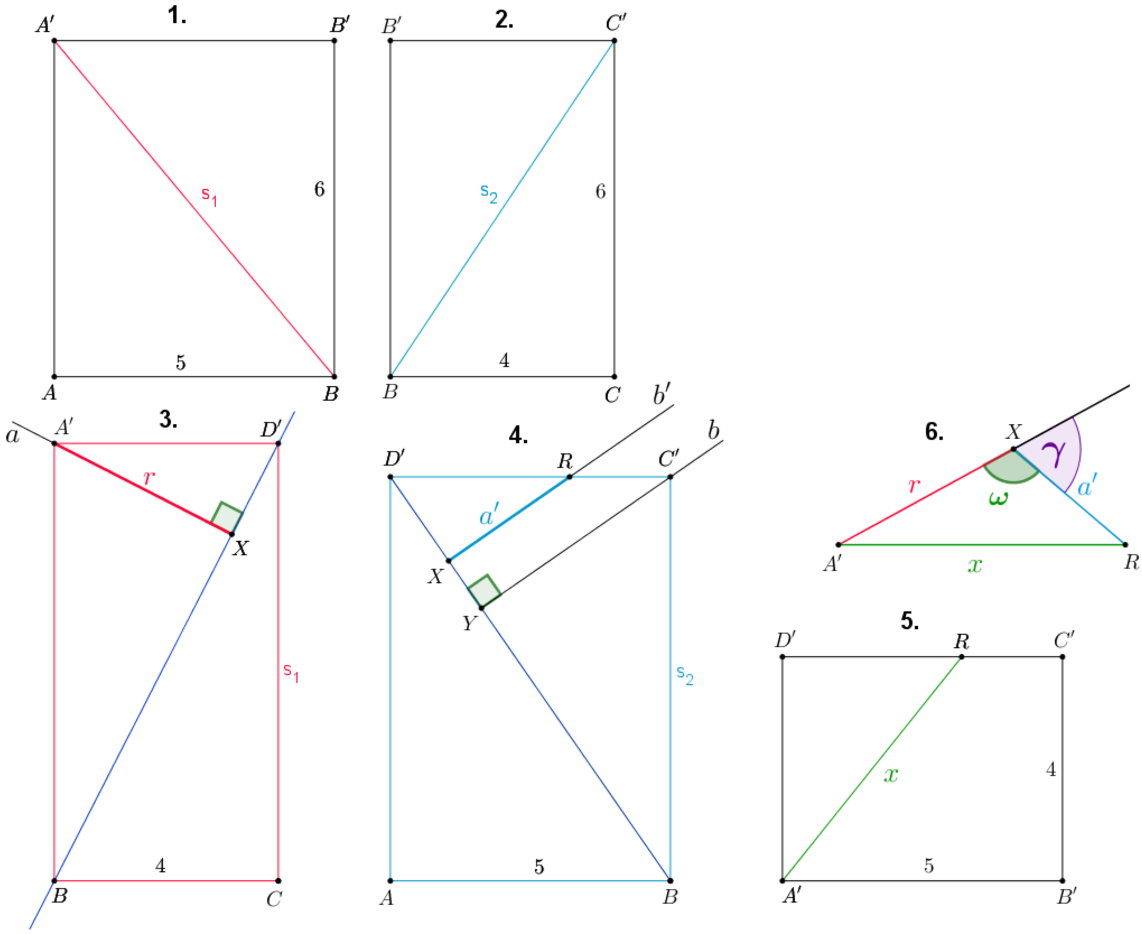
5. V kroku 1. a 2. zostrojíme uhlopriečky s_1 a s_2 prednej steny $ABB'A'$ a bočnej steny $BCC'B'$.

   Rezom kvádra rovinou α je rovnobežník $BCD'A'$, so stranami 4cm a $|s_1|$. V tejto rovine leží priamka a kolmá na priamku BD'. Päta kolmice a je bod X. Strana r trojuholníka $A'RX$ je zhodná s dĺžkou úsečky $|A'X|$.

   V štvrtom kroku zostrojíme obdĺžnik $ABC'D'$, ktorý je rezom kvádra rovinou β. Zostrojíme priamku $b = C'Y$ kolmú na priamku $BD' = \alpha \cap \beta$ prechádzajúcu bodom C'. Zostrojíme bod $X \in BD'$ vo vzdialenosti od bodu B, ktorú odmeriame v kroku 3. Bodom X zostrojíme priamku b' rovnobežnú s priamkou b a označme $b' \cap C'D' = \{R\}$. Strana a' trojuholníka $A'RX$ je zhodná s dĺžkou úsečky $|RX|$.

V piatom kroku odmeriame vzdialenosť $|RA'|$, ktorá leží v hornej podstave $A'BC'D'$.

Následne vieme zostrojiť trojuholník $A'RX$ podľa vety sss. Uhol ω je zrejme $> 90°$. Väčšinou za uhol dvoch priamok, priamky a roviny alebo dvojice rovín berieme uhol $< 90°$. Teda $\sphericalangle \alpha\beta = 180° - \omega = \gamma$.



Príklad 6.: Podľa kritéria kolmosti dvoch rovín platí: $\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \exists a \subset \alpha : a \perp \beta$.

$$\exists KA \subset KAD : \underline{KA \perp BCM}$$

$$KA \perp BM \quad (\bigstar)$$

$$KA \perp AD \wedge AD \| XY \Rightarrow KA \perp XY$$

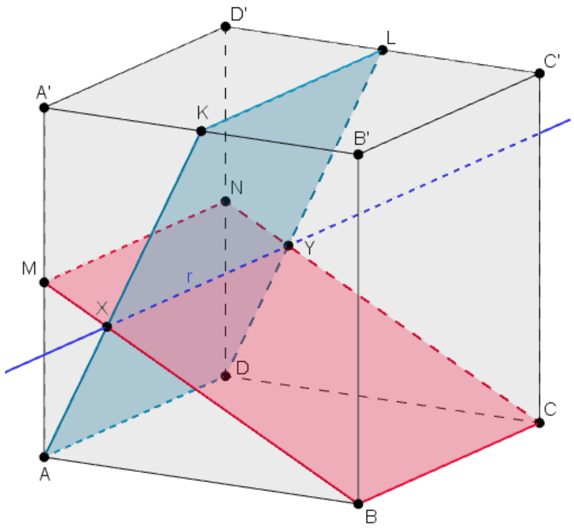
$$BL \cap XY = \{X\}$$

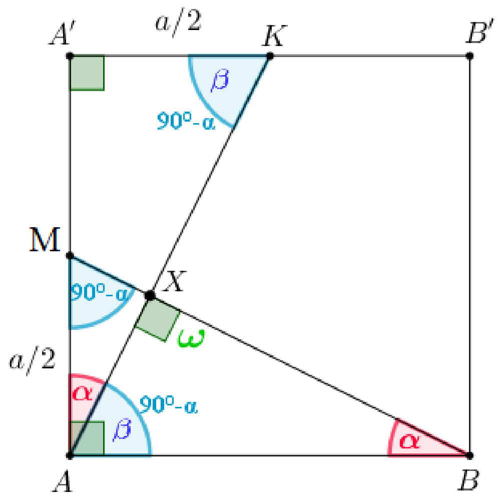
$(\bigstar)$: trojuholníky ABM a $A'AK$ sú zhodné podľa vety (sus), sú pravouhlé. Pre súčet vnútorných uhlov platí: $\alpha + \beta + 90° = 180°$, teda $\beta = 90° - \alpha$.

$\Rightarrow \sphericalangle A'AK \cong \sphericalangle ABM \cong \sphericalangle ABX$. Je zrejmé, že $\sphericalangle BAX = 90° - \alpha$.

V trojuholníku ABX pre súčet vnútorných uhlov platí: $\alpha + 90° - \alpha + \omega = 180°$.

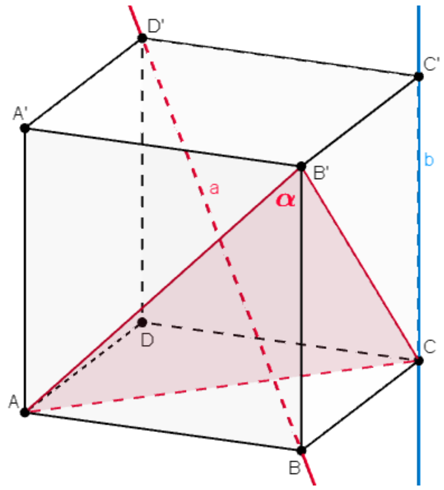
A teda $\omega = 90°$.



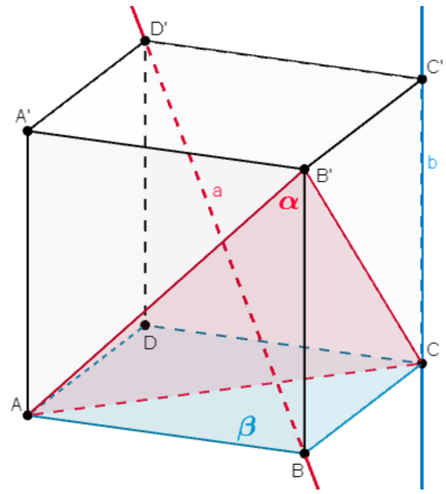


Príklad 7.a.: Postupujeme podľa konštrukčného algoritmu z prednášky.

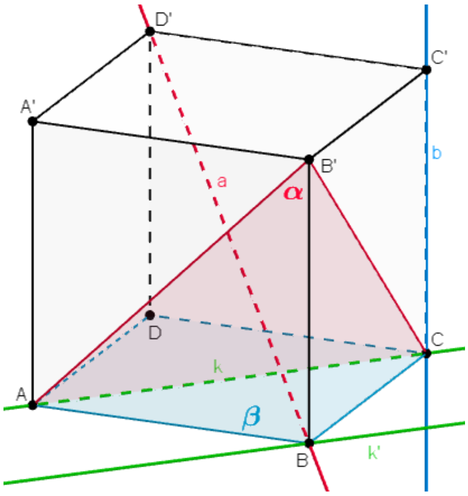
1. Keďže os je kolmá na každú z mimobežiek, musí ležať v rovine kolmej na každú z týchto priamok. Teda potrebujeme zostrojiť rovinu, kolmú na priamku a. V druhom príklade sme ukázali, že je to rovina $\alpha = ACB'$ (dokazovali sme to síce pre priamku $A'C$ a rovinu $AB'D'$, ale mohli by sme postupovať analogicky).



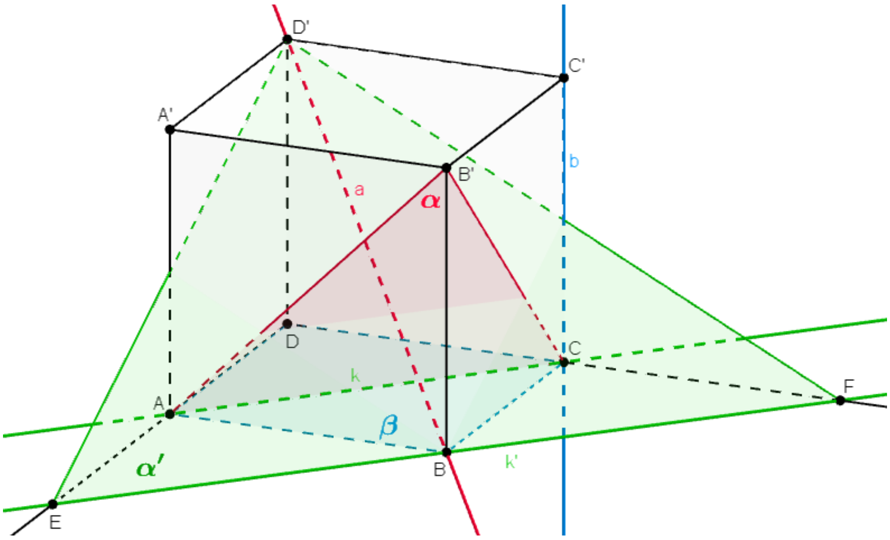
2. Potrebujeme zostrojiť rovinu, kolmú na priamku b. Je zrejmé, že je to rovina $\beta = ABC$.



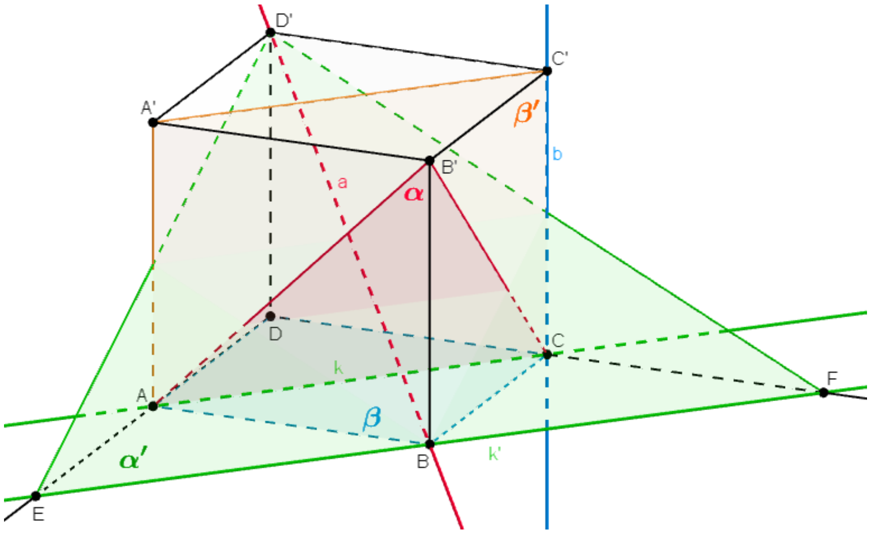
3. Priesečnica $k = AC$ rovín α a β by už mohla byť hľadanou osou, ak by bola s obomi mimobežkami rôznobežná. Avšak, priamka k nie je s priamkou a rôznobežná. Teda musíme zostrojiť os o ako priečku mimobežiek rovnobežnú s priamkou k. Postupujeme podľa už známeho algoritmu.



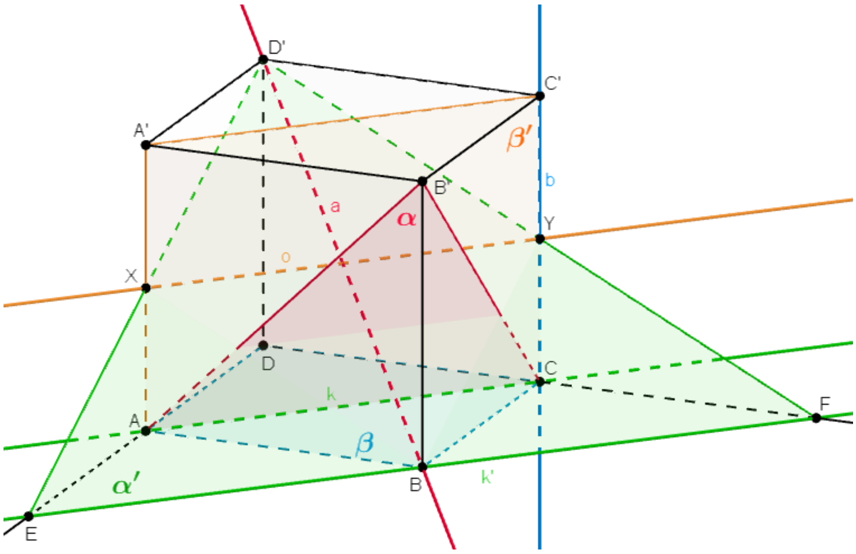
4. Zostrojíme rovinu α' rovnobežnú s priamkou k a incidentnú s priamkou a. Preto najprv zostrojíme priamku k' rovnobežnú s priamkou k a rôznobežnú s priamkou a. Nech je to priamka EF (konštrukcia zrejmá z obrázka).



5. Zostrojíme rovinu β' rovnobežnú s priamkou k a incidentnú s priamkou b. Keďže tieto dve priamky sú rôznobežné, teda ležia v jednej rovine $\beta' = ACC'A'$.

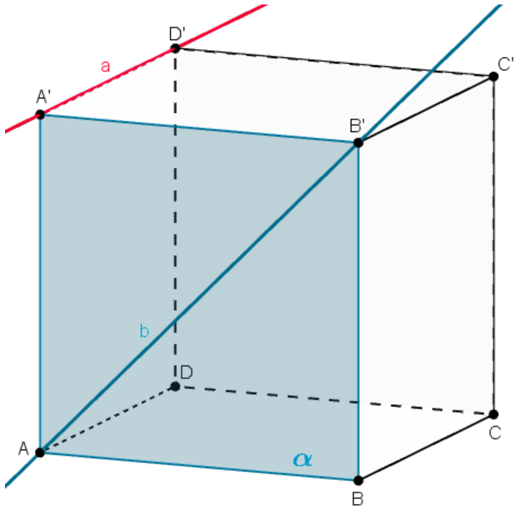


6. Priesečnica rovín $\alpha \cap \beta$ je priamka $XY = o$, kde $X = ED' \cap AA'$ a $Y = FD' \cap CC'$.

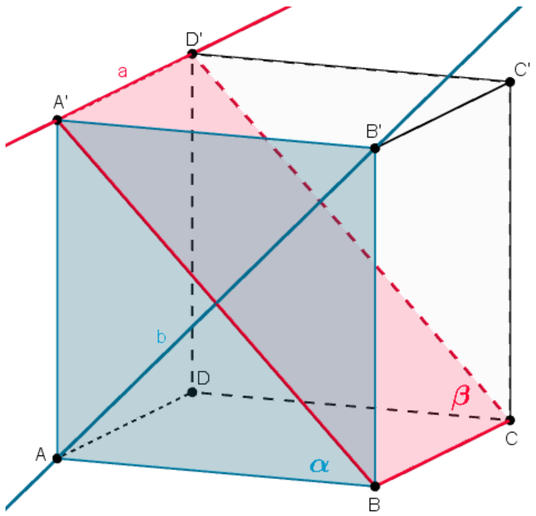


Príklad 7.b.:

1. Potrebujeme zostrojiť rovinu, kolmú na priamku a. Je zrejmé, že je to rovina $\alpha = ABB'$.



2. Potrebujeme zostrojiť rovinu, kolmú na priamku b. Je zrejmé, že je to rovina $\beta = BCD'$.



3. Priesečnica $o = A'B$ rovín α a β je už osou mimobežiek a a b pretože je na obe priamky kolmá a s obomi mimobežná.