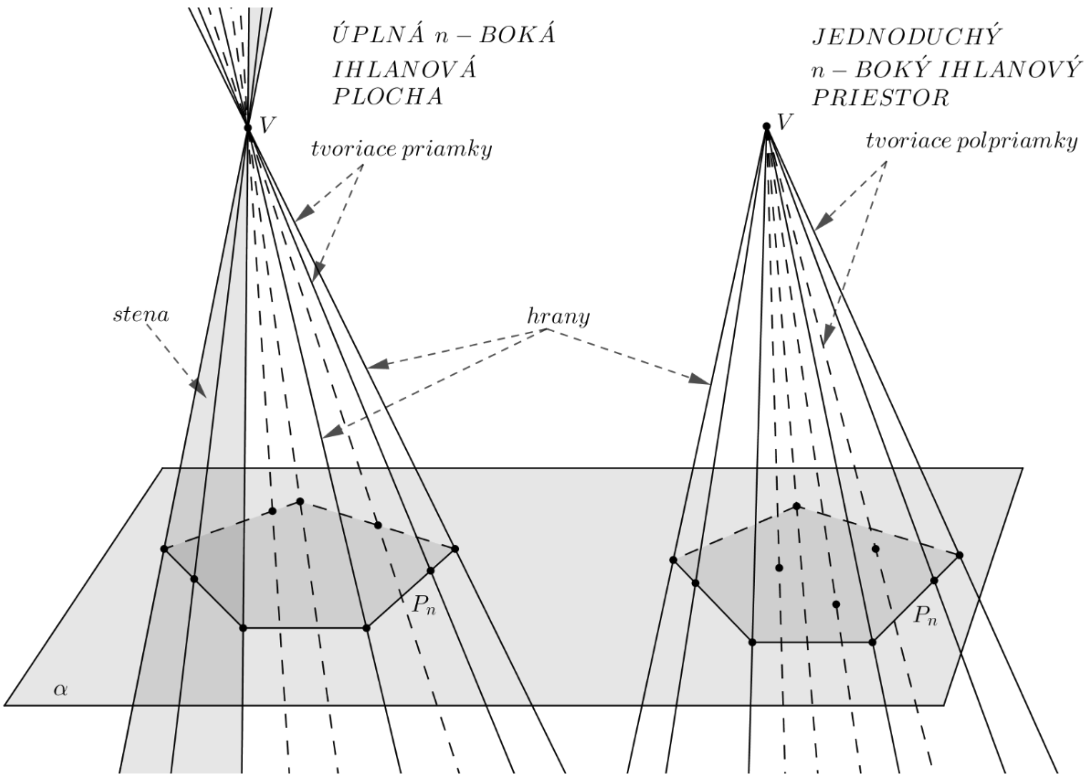
## Ihlanová plocha. Ihlan

**Definícia 5.11** Nech je $P_n$ ľubovoľný konvexný $n$-uholník roviny $\alpha$ a $V$ ľubovoľný bod neležiaci v rovine α. Množinu bodov všetkých priamok prechádzajúcich bodom $V$ [polpriamok so začiatkom v bode $V$], ktoré pretínajú $n$-uholník $P_n$ , resp. $n$-uholník $P_n$ s jeho vnútrom, nazývame úplná $n$-boká ihlanová plocha [jednoduchá $n$-boká ihlanová plocha], resp. úplný [jednoduchý] $n$-boký ihlanový priestor.

- $n$-uholník $P_n$ sa nazýva určujúcim $n$-uholníkom ihlanovej plochy a bod $V$ vrcholom plochy
- všetky priamky [polpriamky] patriace ihlanovej ploche nazývame *tvoriacimi priamkami* [*tvoriacimi polpriamkami*] *plochy*
- *hrany úplnej* [*jednoduchej*] *ihlanovej plochy* - tvoriace priamky [polpriamky] incidentné s vrcholmi určujúceho $n$-uholníka
- *stena úplnej* [*jednoduchej*] *ihlanovej plochy* - množina bodov všetkých tvoriacich priamok [polpriamok] plochy, ktoré pretínajú jednu stranu určujúceho $n$-uholníka $P_n$
- *vrcholová priamka/rovina plochy* - každá priamka/rovina prechádzajúca vrcholom plochy

Ihlanovú plochu, resp. ihlanový priestor s určujúcim $n$-uholníkom $P_n$ v rovine $\alpha$ s vrcholom $V$ budeme označovať $I_n( P_n \subset \alpha ; V)$, resp. $I_n ( P_n \subset \alpha ; V )$.



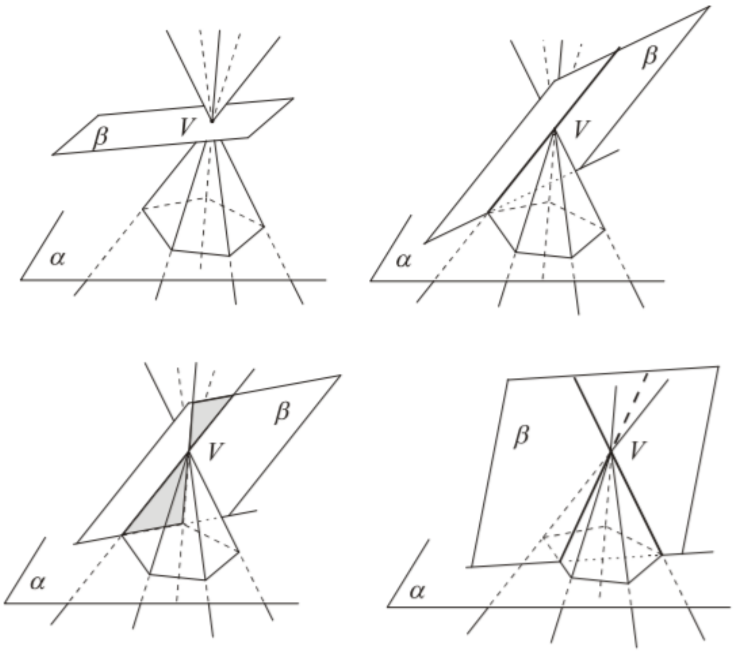

**Veta 5.10** Vrcholová rovina $\beta$ má s úplnou [jednoduchou] ihlanovou plochou $I_n( P_n \subset \alpha ;V )$ jednu z nasledujúcich vzájomných polôh:

a) má s plochou spoločný len vrchol
b) obsahuje práve jednu hranu alebo stenu plochy
c) pretína plochu v dvoch (rôznych) tvoriacich priamkach [polpriamkach]

**Dôkaz**

Označme si priesečnicu rovín $\beta \cap \alpha = p$ a ďalej sa budeme zaoberať vzájomnou polohou priamky $p$ s určujúcim $n$-uholníkom ihlanovej plochy.

- Ak priamka $p$ nemá s určujúcim $n$-uholníkom žiadny spoločný bod, tak rovina $\beta$ má s ihlanovou plochou spoločný len vrchol (Obr a)
- Ak má priamka $p$ spoločný s určujúcim $n$-uholníkom práve jeden bod (je zrejmé že to musí byť jeden z vrcholov určujúceho $n$-uholníka), tak potom rovina $\beta$ má s ihlanovou plochou spoločnú tvoriacu priamku ihlanovej plochy prechádzajúcu týmto vrcholom (Obr b)
- Ak má priamka $p$ s určujúcim $n$-uholníkom spoločnú celú jednu stranu $n$-uholníka, tak potom rovina $\beta$ má s ihlanovou plochou spoločnú stenu (Obr c)
- Ak priamka $p$ pretína určujúci $n$-uholník v dvoch rôznych bodoch, tak potom je zrejmé, že rovina $\beta$ pretína ihlanovú plochu v dvoch rôznych tvoriacich priamkach prechzajúcich týmito bodmi (Obr d)




Zo vzájomnej polohy vrcholovej roviny s ihlanovou plochou môžeme odvodiť vzájomnú polohu ľubovoľnej priamky s plochou. Ak táto priamka nie je vrcholovou priamkou, preložíme ňou vrcholovú rovinu plochy a klasifikáciu vzájomnej polohy priamky (ktorá neprechádza vrcholom) a plochy môžeme urobiť ako dôsledok vety 5.10. Platí nasledujúca veta.

**Veta 5.11** Priamka má s úplnou [jednoduchou] ihlanovou plochou jednu z nasledujúcich vzájomných polôh:

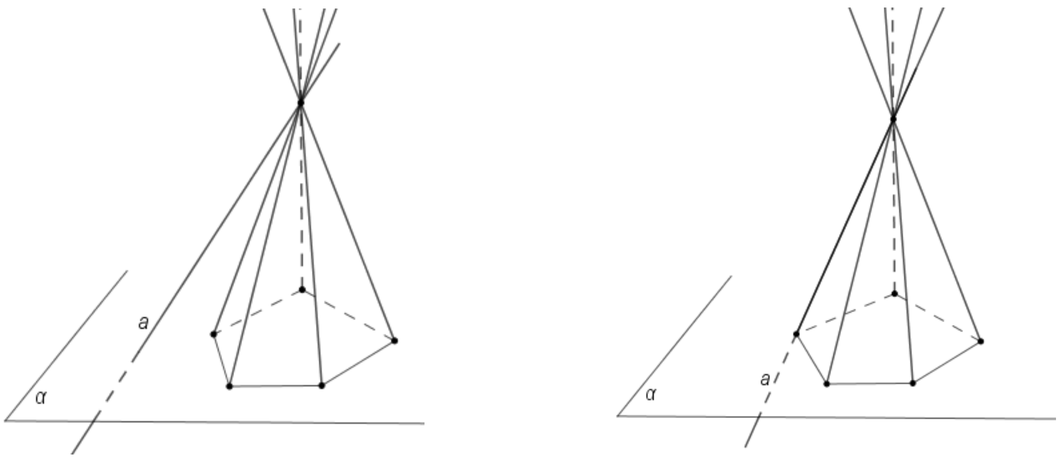
a) Priamka je vrcholovou priamkou plochy a:
   a1) je tvoriacou priamkou [polpriamkou] plochy
   a2) má s plochou spoločný len vrchol plochy
b) Priamka nie je vrcholovou priamkou plochy a:
   b1) nemá s plochou žiaden spoločný bod

b2) obsahuje bod hrany rôzny od vrcholu, úsečku alebo jednu polpriamku alebo dve polpriamky [úsečku alebo jednu polpriamku] v stene plochy

b3) pretína plochu v dvoch (rôznych) bodoch

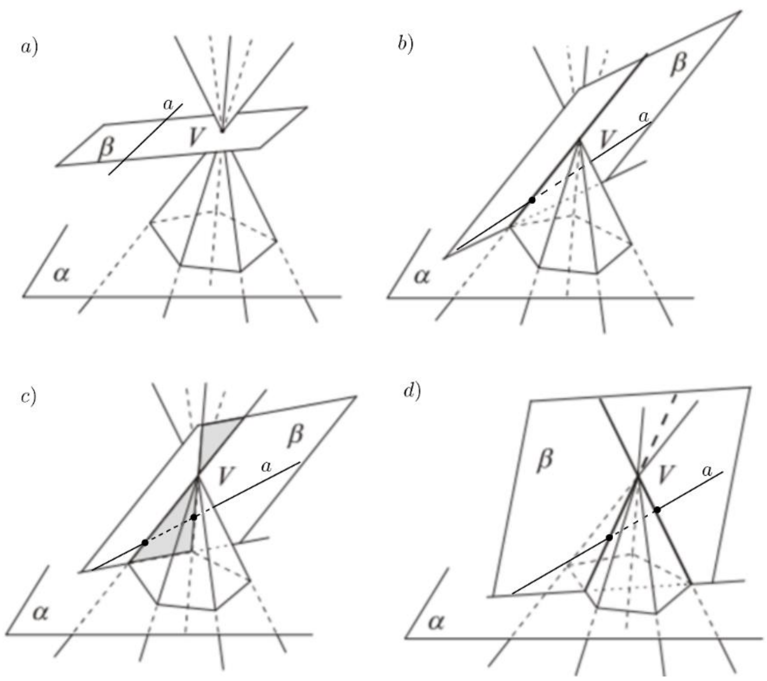
**Dôkaz**

**a)** V prípade, keď priamka $a$ je vrcholová, je dôkaz zrejmý




**b)** Nech priamka $a$ nie je vrcholová

- Priamkou $a$ preložíme vhodnú rovinu $\lambda$ (najvýhodnejšia je rovina vrcholová). Ďalej stačí zistiť vzájomnú polohu roviny $\lambda$ s plochou $I_n$. Platí: $a \cap I_n = (a \cap \lambda) \cap I_n = a \cap (\lambda \cap I_n)$, pričom $(\lambda \cap I_n)$ určíme podľa dôkazu predchádzajúcej vety. Potom ak
  - $(\lambda \cap I_n) = \emptyset$, teda rovina $\lambda$ nemá s plochou $I_n$ žiaden spoločný bod (okrem vrcholu $V$), tak ani priamka $a$ nemá s plochou žiaden spoločný bod
  - $(\lambda \cap I_n)$ je hrana plochy, tak priamka $a$ má s touto hranou spoločný práve jeden bod alebo $(\lambda \cap I_n)$ je stena plochy a priamka $a$ má s touto stenou spoločnú úsečku
  - $(\lambda \cap I_n)$ sú dve tvoriace priamky, tak priamka $a$ pretína každú z týchto tvoriacich priamok v jednom bode, teda priamka $a$ pretína plochu $I_n$ v dvoch navzájom rôznych bodoch



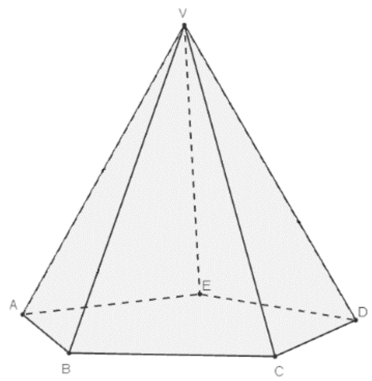
**Definícia 5.12** Vrcholová rovina ihlanovej plochy obsahujúca hranu alebo stenu plochy sa nazýva styčnou rovinou ihlanovej plochy. Je zrejmé, že priesečnica styčnej roviny ihlanovej plochy $I_n( P_n \subset \alpha ;V )$ s rovinou $\alpha$ je styčnou priamkou $n$-uholníka $P_n$.

Z tohoto poznatku vyplýva riešenie úloh o konštrukcii styčnej roviny ihlanovej plochy, ktorá má požadované vlastnosti.

**Dôsledok 5.3** Rovina, ktorá nie je vrcholová ani rovnobežná so žiadnou tvoriacou priamkou plochy, t.j. pretínajúca všetky tvoriace priamky ihlanovej plochy $I_n( P_n \subset \alpha ; V )$, pretína plochu v konvexnom $n$-uholníku. Ak sú dva rovinné rezy plochy $n$-uholníky v navzájom rovnobežných rovinách, tak sú tieto $n$-uholníky podobné alebo zhodné (dva zhodné $n$-uholníky ležia v rovinách súmerne združených podľa vrcholu plochy).

**Definícia 5.13**

- *ihlan* - prienik jednoduchého ihlanového priestoru $I_n$ ( $P_n \subset \alpha$ ; $V$) a polpriestoru a $\alpha V$. Hovoríme aj o jednoduchom ihlane.
- *podstava* - $n$-uholník $P_n$ s jeho vnútrom
- *hlavný vrchol* - vrchol ihlanovej plochy *In*
- vrcholy podstavy $P_n$ sú ďalšie vrcholy ihlana
- *bočné steny* [*hrany*] - časti stien [hrán] príslušnej ihlanovej plochy $I_n$ patriace ihlanu
- *podstavné hrany* - strany podstavy ihlana
- *steny* - bočné steny a podstava ihlana




**Poznámka 5.6**

**1.** Je zrejmé, že bočné steny jednoduchého ihlana sú trojuholníky.

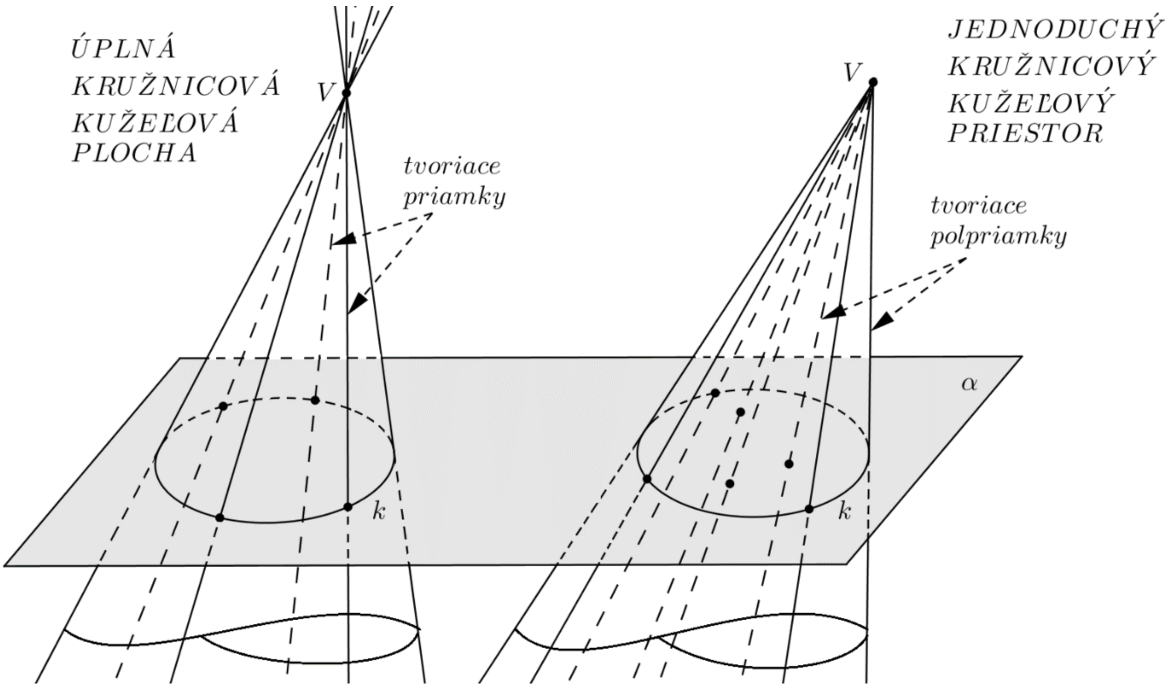
**2.** V prípade úplného ihlanového priestoru $I$, keď nahradíme polpriestor $\alpha V$ v definícii 5.15 priestorovou vrstvou určenou rovinami $\alpha$, $\alpha'$, pre ktorú je bod $V$ vnútorným bodom, hovoríme o dvojihlane.

## Kružnicová kužeľová plocha, kružnicový kužeľový priestor, kužeľ

**Definícia 5.14** Nech je $k$ ľubovoľná kružnica roviny $\alpha$ a $V$ ľubovoľný bod nepatriaci tejto rovine. Množinu bodov všetkých priamok prechádzajúcich bodom $V$ a pretínajúcich kružnicu $k$ [kružnicu $k$ a jej vnútro] nazývame úplná kružnicová kužeľová plocha [úplný kružnicový kužeľový priestor]. Označujeme $K\,(\,k \subset \alpha\,;\,V\,)$ [ $K\,(\,k \subset \alpha\,;\,V\,)$].

- *kružnica k* - určujúca kružnica plochy
- *vrchol kružnicovej kužeľovej plochy* - bod V
- *tvoriace priamky* - všetky priamky prechádzajúce vrcholom a patriace kužeľovej plochy

**Poznámka 5.7** Jednoduchou kružnicovou kužeľovou plochou [jednoduchým kružnicovým kužeľovým priestorom] nazývame množinu bodov všetkých polpriamok so začiatkom v bode $V$ a pretínajúcich kružnicu $k$ [kružnicu $k$ a jej vnútro].

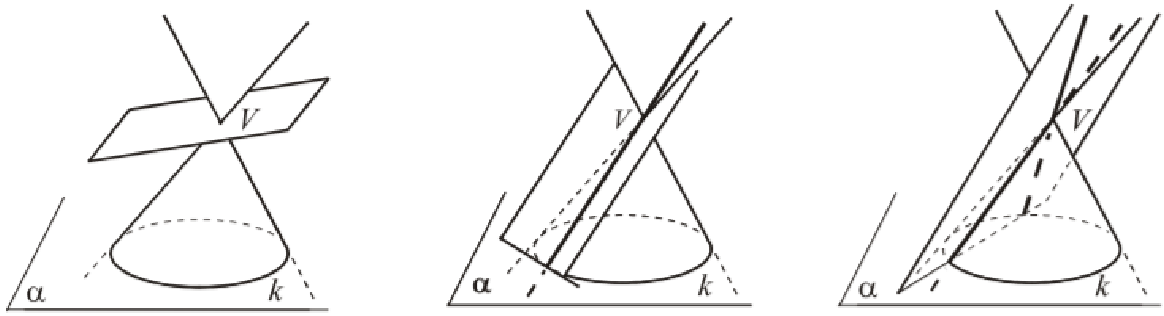



**Definícia 5.15** Vrcholovou priamkou [rovinou] nazývame každú priamku [rovinu], ktorá prechádza vrcholom kužeľovej plochy.

**Veta 5.12** Vrcholová rovina $\beta$ má s úplnou kužeľovou plochou $K(\,k \subset \alpha\,;\,V)$ jednu z nasledujúcich vzájomných polôh:

a) má s plochou spoločný práve jeden bod, je ním vrchol plochy (Obr a)
b) obsahuje práve jednu tvoriacu priamku plochy (Obr b)
c) má s plochou spoločné práve dve tvoriace priamky (Obr c)

a) b) c)




Rovina, ktorá nie je vrcholová, pretína kružnicovú kužeľovú plochu v kužeľosečke (kružnica, elipsa, parabola, hyperbola).

**Dôkaz**

Nech je rovina $\beta$ vrcholová. Na to aby sme zistili vzájomnú polohu roviny $\beta$ s kružnicovou kužeľovou plochou, stačí zistiť vzájomnú polohu priamky $(\beta \cap K) = p$ s určujúcou kružnicou $k$ plochy.

- Ak priamka $(\beta \cap K) = p$ nemá s kružnicou $k$ žiaden spoločný bod, je zrejmé, že ani vrcholová rovina $\beta$ incidentná s priamkou $p$ nemá okrem vrchola $V$ s plochou $K$ žiaden iný spoločný bod (Obr. a)
- Ak priamka $(\beta \cap K) = p$ má s určujúcou kružnicou $k$ práve jeden spoločný bod, tak vrcholová rovina $\beta$ má s plochou $K$ spoločnú práve jednu tvoriacu priamku prechádzajúcu týmto bodom (Obr. b)
- Ak priamka $(\beta \cap K) = p$ pretína kružnicu v dvoch bodoch, tak vrcholová rovina $\beta$ má s plochou $K$ spoločné dve tvoriace priamky incidentné s týmit bodmi (Obr. c)

**Veta 5.13** Priamka $a$ má s úplnou kužeľovou plochou $K( k \subset \alpha ; V )$ jednu z nasledujúcich vzájomných polôh:

a) Priamka $a$ je vrcholovou priamkou a:
   a1) je tvoriacou priamkou plochy
   a2) má s úplnou kužeľovou plochou spoločný práve jeden bod, je ním vrchol plochy
b) Priamka $a$ nie je vrcholovou priamkou a:
   b1) nemá s plochou žiaden spoločný bod
   b2) obsahuje bod tvoriacej priamky plochy
   b3) pretína plochu v dvoch rôznych bodoch

**Dôkaz**

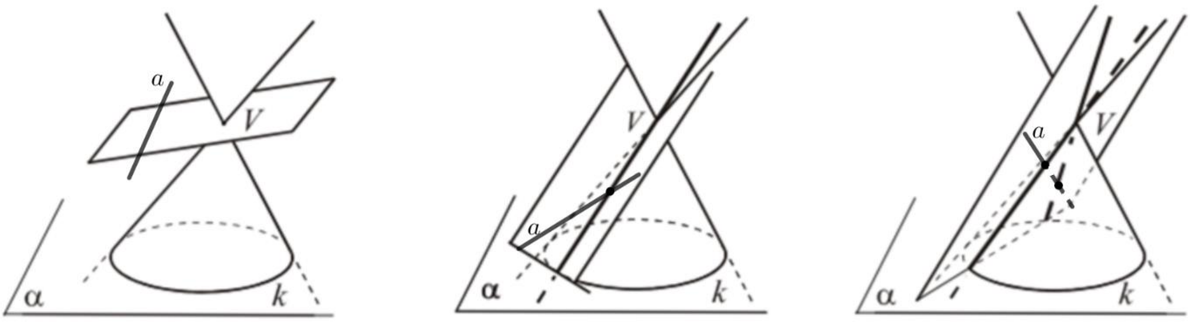
Ukážeme pre prípad, keď priamka $a$ nie je vrcholovou priamkou plochy. Pre prípad a) je dôkaz zrejmý.

b) Nech priamka $a$ nie je vrcholová

- Priamkou $a$ preložíme vhodnú rovinu $\lambda$ (najvýhodnejšia je rovina vrcholová). Ďalej stačí zistiť vzájomnú polohu roviny $\lambda$ s plochou $K$. Platí: $a \cap K = (a \cap \lambda) \cap K = a \cap (\lambda \cap K)$, pričom $(\lambda \cap K)$ určíme podľa dôkazu predchádzajúcej vety. Potom ak

- ○ ($\lambda \cap K$) = $\emptyset$, teda rovina $\lambda$ nemá s plochou $K$ žiaden spoločný bod (okrem vrcholu $V$), tak ani priamka $a$ nemá s plochou žiaden spoločný bod (Obr. a)
- ○ ($\lambda \cap K$) je tvoriaca priamka plochy, tak priamka $a$ má s touto tvoriacou priamkou a teda aj s plochou $K$, spoločný práve jeden bod (Obr. b)
- ○ ($\lambda \cap K$) sú dve tvoriace priamky, tak priamka $a$ pretína každú z týchto tvoriacich priamok v jednom bode, teda priamka $a$ pretína plochu $K$ v dvoch navzájom rôznych bodoch (Obr. c)

a) b) c)




**Definícia 5.16** Dotykovou rovinou kužeľovej plochy $K$ nazývame takú vrcholovú rovinu, ktorá obsahuje práve jednu tvoriacu priamku plochy.

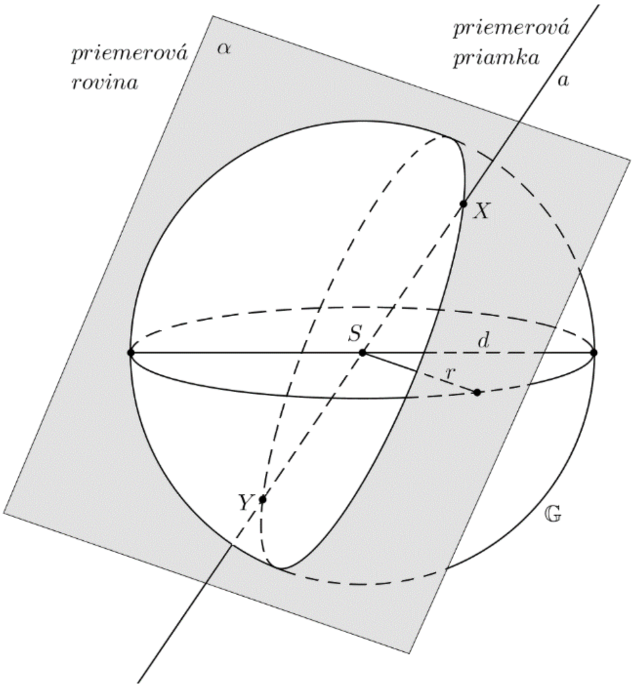
**Definícia 5.17**

- *kužeľ* - prienik jednoduchého kužeľového priestoru $K$ ( $k \subset \alpha$ ; $V$) a polpriestoru $\alpha V$. Hovoríme aj o jednoduchom kuželi.
- *podstava* - kružnica $k$ s jej vnútrom
- *vrchol* - vrchol príslušnej kružnicovej kužeľovej plochy $K$
- *podstavná hrana* - kružnica $k$
- *plášť kužeľa* - tá časť kružnicovej kužeľovej plochy $K$, ktorá je prienikom jednoduchej kužeľovej plochy $K$ ( $k \subset \alpha$ ; $V$ ) a polpriestoru $\alpha V$

## Guľová plocha

**Definícia 5.18** Nech je $S$ ľubovoľný bod trojrozmerného euklidovského priestoru $E_3$ a nech $r$ je ľubovoľná nenulová úsečka. Množinu všetkých bodov $X$ priestoru, pre ktoré sú úsečky $SX$ a $r$ zhodné, nazývame guľovou plochou.

- *stred* - bod $S$
- *polomer* - úsečka $r$
- *priemer* - úsečka $2r$
- *vnútorný bod /vonkajší bod danej guľovej plochy* - bod $X$, pre ktorý je úsečka $SX$ menšia/väčšia než úsečka $r$
- *vnútro guľovej plochy* - množina všetkých vnútorných bodov guľovej plochy
- *guľa* - guľová plocha s jej vnútrom nazývame guľou
- *priemerová priamka/ priemerová rovina* - priamka/rovina prechádzajúca stredom guľovej plochy




**Poznámka 5.8**

- Z definície 5.18 a planimetrických poznatkov o kružnici je zrejmé, že každá priemerová priamka guľovej plochy má s plochou spoločné práve dva body. Tieto body sú krajnými bodmi priemeru guľovej plochy. Zrejmé je tiež, že každá priemerová rovina má s danou guľovou plochou $G(S;\ r)$ spoločnú kružnicu so stredom $S$ a polomerom $r$. Takúto kružnicu nazývame hlavnou kružnicou guľovej plochy.
- Guľovú plochu [guľu] so stredom $S$ a polomerom $r$ budeme označovať $G\ (S;\ r)$ [$G(S;r)$]

**Veta 5.14** Rovina má s guľovou plochou $G\ (S;\ r)$ jednu z nasledujúcich vzájomných polôh:

a) nemá s plochou žiaden spoločný bod
b) má s plochou spoločný práve jeden bod
c) má s plochou spoločnú kružnicu

**Dôkaz**

Nech $\alpha \subset E_3$ je ľubovoľná rovina a $G$ $(S; r)$ guľová plocha. Klasifikáciu urobíme analogicky s klasifikáciou vzájomnej polohy priamky a kružnice. Pre rovinu $\alpha$ nastane práve jedna z možností:

a) $|S\alpha| > r$

Vzdialenosť bodu $S$ od roviny $\alpha$ je zhodná s úsečkou $SP$, kde $P$ je päta kolmice z bodu $S$ na rovinu $\alpha$ . Odtiaľ je zrejmé, že pre každý ďalší bod $X$ roviny $\alpha$ je $|SX| > |SP| > r$, tj. $\alpha \cap G = \emptyset$

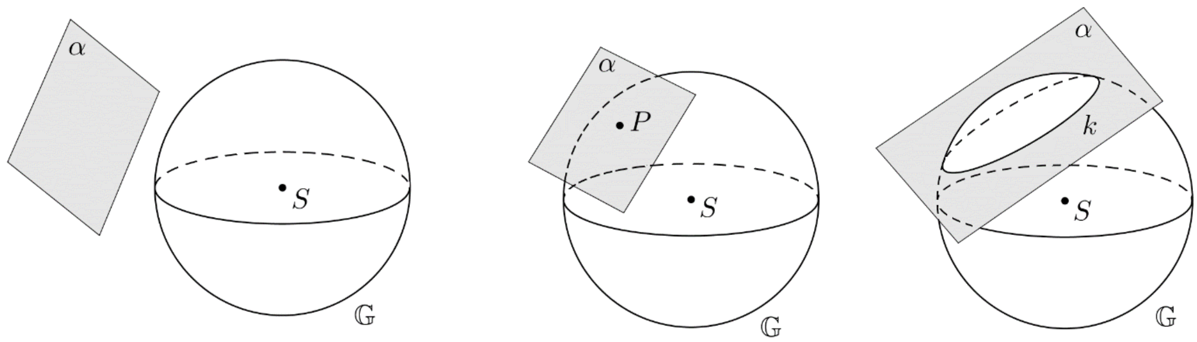
b) $|S\alpha| \cong r$

Pri označení ako v bode a) platí analogicky: $|SX| > |SP| \cong r$ ( $X \in \alpha$, $X \neq P$), odkiaľ vyplýva: $\alpha \cap G = \{P\}$

c) $|S\alpha| < r$

Nech platí $|S\alpha| = |SP| < r$. V prípade S = P rovinným rezom $\alpha \cap G$ je hlavná kružnica guľovej plochy.

a) b) c)




**Poznámka 5.9**

1. V prípade b) rovinu $\alpha$ nazývame dotykovou rovinou guľovej plochy v bode $P$ (dotykový bod). Každá priamka dotykovej roviny $\alpha$ incidentná s dotykovým bodom $P$ má s guľovou plochou spoločný práve bod $P$. Preto túto priamku nazývame dotyčnicou guľovej plochy.

2. Klasifikáciu vzájomnej polohy priamky $m$ s guľovou plochou $G(S; r)$ urobíme jednoducho pomocou priemerovej roviny $\alpha$, ktorá je s danou priamkou incidentná; v prípade $S \in m$ je každá rovina priemerová, v opačnom prípade $\alpha = mS$. Potom platí: $m \cap G = m \cap (\alpha \cap G) = m \cap k$, kde $k$ je priemerovou kružnicou guľovej plochy. Priamka $m$ buď nemá s kružnicou $k$ spoločný žiaden bod alebo je dotyčnicou kružnice $k$ alebo pretína kružnicu $k$ práve v dvoch bodoch. To nastane práve vtedy, keď: $m \cap G = \emptyset$ alebo $m \cap G = \{T\}$ alebo $m \cap G = \{M, N \neq M\}$. V prvom prípade zrejme platí $|Sm| > r$ a priamku $m$ nazývame nesečnicou guľovej plochy. V druhom prípade $|Sm| \cong r$ a priamka $m$ je dotyčnicou plochy. V treťom prípade $|Sm| < r$ a priamku $m$ nazývame sečnicou plochy. Dokázali sme:

**Veta 5.15** Nech je $m$ priamka a $G$ guľová plocha. Potom platí: Priamka $m$ je alebo nesečnicou alebo dotyčnicou alebo sečnicou guľovej plochy $G$.