Úvod do geometrie priestoru

Geometria (3)

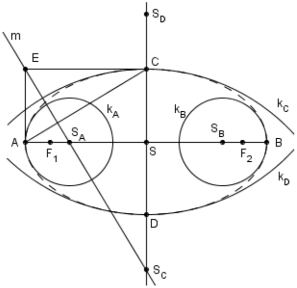
Barbora Pokorná

KAG, FMFI UK

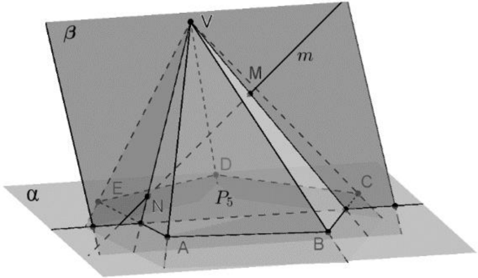
2020

Ciele predmetu

- nadväzuje na elementárnu planimetriu (Geometria 2)
- rozvíjanie priestorovej predstavivosti
- získanie konštrukčných zručností
- riešenie geometrických úloh o vzájomnej polohe objektov v priestore



Obr. 1: Konštrukcia stredov oskulačných kružníc elipsy.



Obr. 2: Rez päťbokého ihlana.

Forma

PREDNÁŠKY

- Barbora Pokorná
- štvrtok 9:00, M-VI, 2 hod
- sccg.sk/~pokorna/geo3.html
  texty prednášok, pravidlá, hodnotenie
- M-118, barbora.pokorna@fmph.uniba.sk

CVIČENIA

- Alžbeta Mackovová
- štvrtok 8:10, M-VI / piatok 8:10, M-120 (delené)
- M-155, alzbeta.mackovova@fmph.uniba.sk

HODNOTENIE

- 4 kredity
- 40% cvičenia a 60% skúška

Odporúčaná literatúra

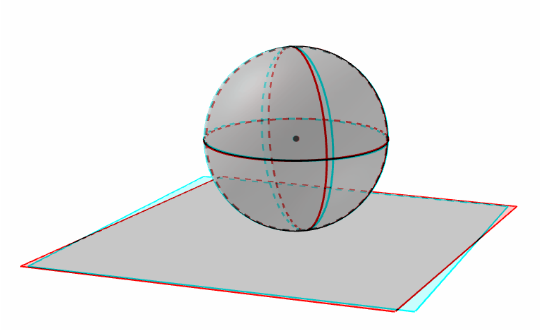
- Piják a kol.: *Konštrukčná geometria*, SPN, Bratislava, 1985
- Urban, A.: *Deskriptivní geometrie I*, SNTL, Praha, 1965
- Kraemer, E.: *Zobrazovací metody I*, SPN, Praha, 1991
- Bašová, Kyselová a kol.: *Deskriptívna geometria-návody na cvičenia*, STU, Bratislava, 2000
- Hansmanová D.: *Základné geometrické telesá a ich styčné, dotykové roviny*, 2017
- Hansmanová D.: *Vizualizácia stereometrie pomocou anaglyfov*, 2019
- Klenková, P.: *Stereometria*, 2006

Čo bude obsahom prednášok

1. stereometria
   – didaktický systém axióm euklidovskej geometrie
2. základné geometrické telesá
   – Eulerove telesá
3. princípy premietania
   – analytické vyjadrenie rovnobežného premietania
4. zobrazovacie metódy
   – Mongeovo a šikmé/kosouhlé premietanie

Anaglyfický obraz a anaglyf

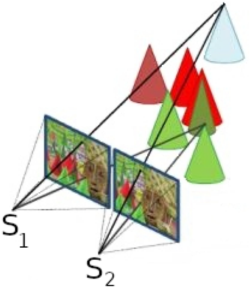
- didaktická pomôcka zameraná na vizualizáciu objektov geometrie priestoru
- nástroj „Projekcia pre okuliare“ v softvéri GeoGebra generuje anaglyfické obrazy
- anaglyf je ilúzia vytvorená mozgom, t.j. zdanlivo trojrozmerný obraz



Obr. 3: Anaglyfický obraz gule vytvorený v softvéri GeoGebra.

Tvorba anaglyfických obrazov

- Využívame princíp dvojstredového premietania, čo simuluje ľudské videnie.



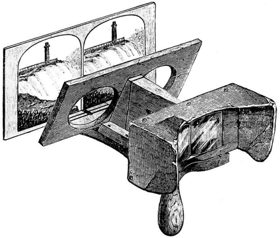
Obr. 4: Stredy premietania S_1, S_2 sú od seba vzdialené toľko, ako optické osi človeka.

- Na každý stredový priemet sú použité komplementárne farby z farebného kruhu, lebo vytvárajú najväčší kontrast.

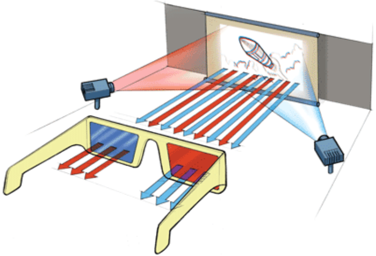
Obr. 5: Softvér GeoGebra vygeneruje anaglyfický obraz v komplementárnych farbách červená – azúrová.

Vytvorenie anaglyfu

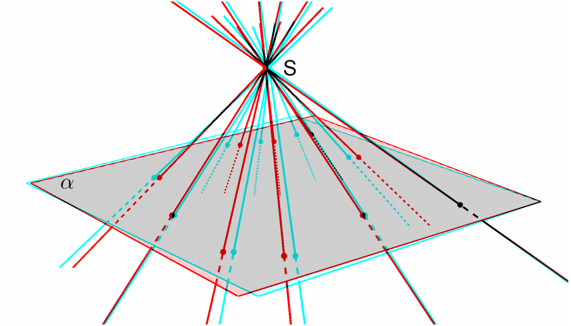
- V minulosti sa na dosiahnutie „3D efektu“ používal prístroj stereoskop.
- Vytvoriť anaglyf z anaglyfických obrazov zabezpečia anaglyfické okuliare s farebnými filtrami.
- Farebné filtre musia byť tej istej kombinácie farieb ako anaglyfické obrazy.



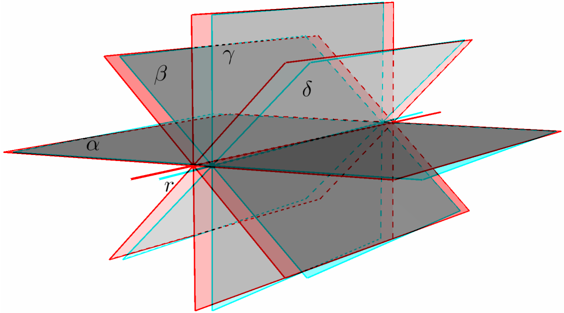
Obr. 6: Stereoskop bol prístroj podobný okuliarom s dvoma šošovkami so vzdialenosťou 65 mm.



Obr. 7: Princíp anaglyfických okuliarov.



Obr. 8: Trs priamok.



Obr. 9: Zväzok rovín.

Euklidovský priestor $\mathbb{E}^3$

Trojrozmerný afinný euklidovský priestor $\mathbb{E}^3$ je usporiadaná trojica $(\mathscr{B}, V, +)$, kde

- $\mathscr{B}$ je množina bodov, prvky ozn. $A = (a_1, a_2, a_3)$, kde $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$
- V je vektorový priestor nad poľom $\mathbb{R}$, prvky ozn. $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$
- $+$ je operácia sčitovania bodov s vektormi,
  t.j. zobrazenie $+ : \mathscr{B} \times V \to \mathscr{B}$ s vlastnosťami
  - $(A + \vec{v}) + \vec{w} = A + (\vec{v} + \vec{w})$ pre ľubovoľné $A \in \mathscr{B}$, $\vec{v}, \vec{w} \in V$
  - $A + \vec{v} = A$ vtedy a len vtedy, keď $\vec{v} = \vec{0}$ pre ľubovoľné $A \in \mathscr{B}$
  - pre ľubovoľné $A, B \in \mathscr{B}$ existuje jediné $\vec{v} \in V$ také, že $A + \vec{v} = B$

Axiomatická výstavba euklidovského priestoru

- opísaná nemeckým matematikom Davidom Hilbertom (1862 – 1943)
- základné geometrické objekty
  - množina bodov $\mathscr{B}$, prvky označujeme $A, B, C, \dots, 1, 2, \dots$
  - množina priamok $\mathscr{P}$, prvky označujeme $a, b, c, \dots, p, q, \dots$
  - množina rovín $\mathscr{R}$, prvky označujeme $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \pi, \rho, \dots$
- základné relácie
  - incidencia
  - usporiadanie
  - zhodnosť
  - spojitosť
  - rovnobežnosť
- základné výroky – axiómy
  - jednoduché tvrdenia, ktoré sa nedokazujú
  - ide o „pravidlá hry“ s geometrickými objektami

Hilbertova axiomatická sústava

Axiómy sú rozdelené do piatich skupín podľa základných relácií.

I. AXIÓMY INCIDENCIE

- incidovať, ležať na, prechádzať, obsahovať
- zápis $\subset$, $\in$
- kolineárne body – množina bodov incidentná s nejakou priamkou
- komplanárne body – množina bodov incidentná s nejakou rovinou
- priamka incidentná s rovinou – ak každý bod priamky leží v rovine

I. AXIÓMY INCIDENCIE

$\mathbf{I_1}$ Ku každým dvom rôznym bodom existuje práve jedna priamka s nimi incidentná.

$\mathbf{I_2}$ Na každej priamke existujú aspoň dva rôzne body.

$\mathbf{I_3}$ Existujú body, ktoré všetky neležia na jednej priamke.

$\mathbf{I_4}$ Ku každým trom nekolineárnym bodom existuje práve jedna rovina s nimi incidentná.

$\mathbf{I_5}$ V každej rovine existujú aspoň tri nekolineárne body.

$\mathbf{I_6}$ Ak dva body priamky ležia v rovine, tak každý bod tejto priamky leží v danej rovine.

$\mathbf{I_7}$ Ak majú dve roviny spoločný bod, tak majú spoločnú aspoň jednu priamku.

$\mathbf{I_8}$ Existujú body, ktoré neležia všetky v jednej rovine.

Planimetrický axiomatický systém

II. AXIÓMY USPORIADANIA $(\mathbf{U_1} - \mathbf{U_4})$

- vymedzujú základný vzťah „ležať medzi“, Paschova axióma

III. AXIÓMY ZHODNOSTI $(\mathbf{Z_1} - \mathbf{Z_6})$

- opisujú zhodnosť úsečiek a uhlov

IV. AXIÓMY SPOJITOSTI $(\mathbf{S_1} - \mathbf{S_2})$

- umožňujú meranie úsečiek (nezávislosť od miesta merania, meranie po častiach)
- Archimedov výrok, Cantorov výrok

V. AXIÓMA ROVNOBEŽNOSTI $(\mathbf{R_1})$

- **Euklidova axióma** Bodom neležiacim na danej priamke prechádza práve jedna priamka rovnobežná s danou priamkou.

  (Lobačevského axióma) Bodom neležiacim na danej priamke prechádzajú aspoň dve priamky rovnobežné s danou priamkou.

Stereometria

Euklidovský afinný priestor $\mathbb{E}^3$

- vďaka axiómam spojitosti môžeme definovať euklidovskú metriku
  pre $\vec{x}, \vec{y} \in V$ je $d(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$
- je metrický priestor

Stereometria

- geometria v $\mathbb{E}^3$
- založená na
  - axiómach incidencie (I_{1-8})
  - planimetrickom axiomatickom systéme $(\mathrm{U}_{1-4}, \mathrm{Z}_{1-6}, \mathrm{S}_{1-2})$, ktorý platí v každej rovine
  - axióme rovnobežnosti (R_1)
- obsahuje sústavu tvrdení a viet, ktoré opisujú vlastnosti útvarov

Priame dôsledky axióm incidencie a usporiadania

- Dve rôzne priamky majú najviac jeden spoločný bod.

  $$p, q \in \mathscr{P},\ p \neq q \ \Rightarrow\ p \cap q = \{X\}, X \in \mathscr{B} \ \vee\ p \cap q = \emptyset$$

- Rovina a priamka s ňou neincidentná majú najviac jeden spoločný bod.

  $$p \in \mathscr{P}, \alpha \in \mathscr{R}, p \not\subset \alpha \ \Rightarrow\ p \cap \alpha = \{X\}, X \in \mathscr{B} \ \vee\ p \cap \alpha = \emptyset$$

- Ak majú dve rôzne roviny spoločný bod, tak majú spoločnú práve jednu priamku s týmto bodom incidentnú.

  $$\alpha, \beta \in \mathscr{R}, \alpha \neq \beta \ \wedge\ \exists M \in \mathscr{B}, M \in \alpha, M \in \beta \ \Rightarrow\ \alpha \cap \beta = p, p \in \mathscr{P}, M \in p$$

Vzájomná poloha priamok v $\mathbb{E}^3$

- Dve priamky, ktoré sú buď totožné alebo ležia v jednej rovine a nemajú spoločný bod, nazývame rovnobežné.
  $p, q \in \mathscr{P},\ p \parallel q : (p = q) \ \vee \ (p \cup q \subset \alpha \ \wedge \ p \cap q = \emptyset)$
- Dve priamky, ktoré majú práve jeden spoločný bod, nazývame rôznobežné.
  Tento spoločný bod nazývame priesečník priamok.
  $p, q \in \mathscr{P},\ p \nparallel q : p \cap q = \{X\}, X \in \mathscr{B}$
- Dve priamky, ktoré neležia v jednej rovine, nazývame mimobežné.
  $p, q \in \mathscr{P},\ p \setminus q \ : \nexists\, \alpha \in \mathscr{R},\ p \cup q \subset \alpha$
- Množinu všetkých priamok prechádzajúcich jedným bodom nazývame trs priamok.
  Ich spoločný bod nazývame stred trsu priamok.

Vzájomná poloha priamky a roviny v $\mathbb{E}^3$

- Hovoríme, že priamka je rovnobežná s rovinou, ak v tejto rovine leží, alebo s ňou nemá spoločný bod.
  $p \in \mathscr{P}, \alpha \in \mathscr{R},\ p \parallel \alpha : (p \subset \alpha)\ \vee\ (p \cap \alpha = \emptyset)$
- Hovoríme, že priamka je rôznobežná s rovinou, ak s ňou má práve jeden spoločný bod. Tento spoločný bod nazývame priesečník priamky a roviny.
  $p \in \mathscr{P}, \alpha \in \mathscr{R},\ p \nparallel \alpha : p \cap \alpha = \{X\}, X \in \mathscr{B}$

Vzájomná poloha rovín v $\mathbb{E}^3$

- Dve roviny, ktoré sú buď totožné alebo nemajú spoločný bod, nazývame rovnobežné.
  $\alpha, \beta \in \mathscr{R},\ \alpha \parallel \beta : (\alpha = \beta)\ \vee\ (\alpha \cap \beta = \emptyset)$
- Dve roviny, ktoré majú spoločnú práve jednu priamku, nazývame rôznobežné.
  Túto spoločnú priamku nazývame priesečnica rovín.
  $\alpha, \beta \in \mathscr{R},\ \alpha \nparallel \beta : \alpha \cap \beta = p, p \in \mathscr{P}$
- Množinu všetkých rovín prechádzajúcich jednou priamkou nazývame zväzok rovín.
  Ich spoločnú priamku nazývame osou zväzku rovín.

Úplná klasifikácia vzájomnej polohy základných geometrických útvarov

TVRDENIE

- **Dve priamky** sú alebo rovnobežné alebo rôznobežné alebo mimobežné.
  Dôkaz
- **Priamka** je **s rovinou** alebo rovnobežná alebo rôznobežná.
- **Dve roviny** sú alebo rovnobežné alebo rôznobežné.

Ďalšie spôsoby určenia roviny

VETA

Rovina môže byť určená aj niektorým z nasledovných spôsobov.

- **Priamkou a bodom**, ktorý na nej neleží.
  Dôkaz
- **Dvoma** rôznymi **rovnobežkami**.
- **Dvoma rôznobežkami**.
  Dôkaz

Zoznam použitých obrázkov

- obr. 1: Kudličková S., Mackovová A.: *Metrické konštrukcie elipsy*
- obr. 2: Hansmanová D.: *Základné geometrické telesá a ich styčné, dotykové roviny*, 2017
- obr. 3, 8, 9: Hansmanová D.: *Vizualizácia stereometrie pomocou anaglyfov*, 2019
- obr. 4: http://www.adept.net.au/news/newsletter/201211-nov/article_3D_stereo.shtml
- obr. 5: https://ringofcolour.com/en/
- obr. 6: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:
  PSM_V21_D058_The_american_grandfather_stereoscope_1861.jpg
- obr. 7: https://mediamagie.nl/technologie/3d/de-werking-van-een-3d-bril/