Mongeovo zobrazenie

Geometria (3)

Barbora Pokorná

KAG, FMFI UK

2020

Gaspard Monge (1746 – 1818)

Princíp metódy

DANÉ

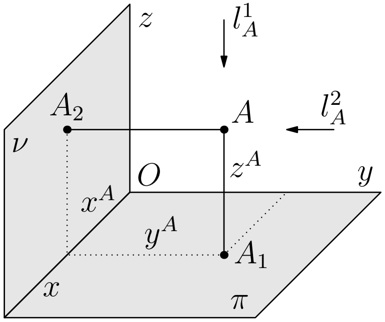
- dve navzájom kolmé roviny π, ν v pravouhlom trojhrane $Oxyz$, kde rovina $\pi = xy$ a rovina $\nu = xz$
- bod $A(x^A, y^A, z^A)$ z priestoru $\mathbb{E}^3$

PRE BOD A ZOSTROJÍME

- prvý priemet bodu – kolmý priemet do priemetne π, $A_1(x^A, y^A)$
- druhý priemet bodu – kolmý priemet do priemetne ν, $A_2(x^A, z^A)$

VÝSTUP

- bijektívne zobrazenie $f\colon \mathbb{E}^3 \to \pi \times \nu$, ktoré bodu $A \in \mathbb{E}^3$ priradí usporiadanú dvojicu bodov $(A_1, A_2) \in \pi \times \nu$, t. j. $f\colon A \mapsto (A_1, A_2)$



Obr. 2: Priesečnicu priemetní $x = \pi \cap \nu$ nazývame základnica.

Priamka A_1A_2 je kolmá na základnicu.

- priemetňu π otočíme zobrazením o okolo základnice x do priemetne ν

PRE BOD A_1 ZÍSKAME

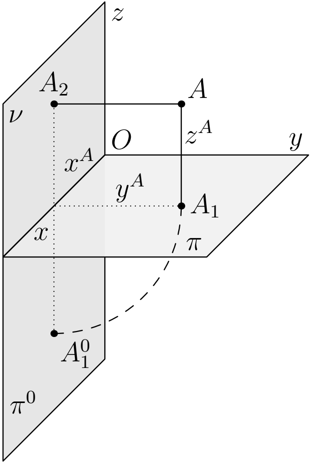
- otočenú polohu bodu – otočenie $o\colon A_1 \mapsto A_1^0$
  $A_1^0(x^A, y^A)$

VÝSTUP

- v priemetni $\varepsilon = \pi^0 \times \nu$ získame bijektívne zobrazenie
  $$g\colon \mathbb{E}^3 \to \pi^0 \times \nu \qquad g\colon A \mapsto (A_1^0, A_2)$$

Zobrazenie g je zobrazovacia metóda, ktorú nazývame Mongeovo zobrazenie, resp. pravouhlé premietanie do dvoch navzájom kolmých priemetní.

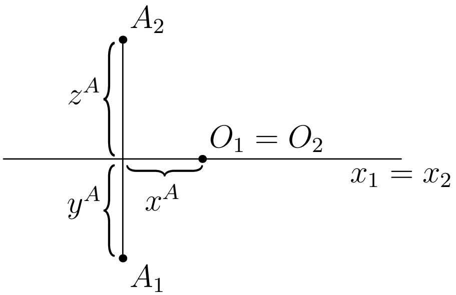
Priemetňu $\varepsilon = \pi^0 \times \nu$ stotožníme s nákresňou (tabuľa, zošit) a ďalej budeme otočenú polohu bodu A_1^0 označovať len A_1.



Obr. 3: Priamka $A_1^0 A_2 \perp x$ alebo $A_1^0 = A_2$.

Obraz bodu v Mongeovom zobrazení

- základnica $x = x_1 = x_2$
- začiatok $O = O_1 = O_2$
- pôdorys bodu A – bod $A_1(x^A, y^A)$
- nárys bodu A – bod $A_2(x^A, z^A)$

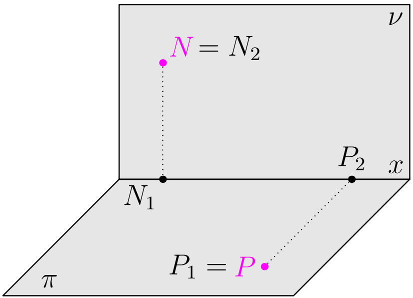


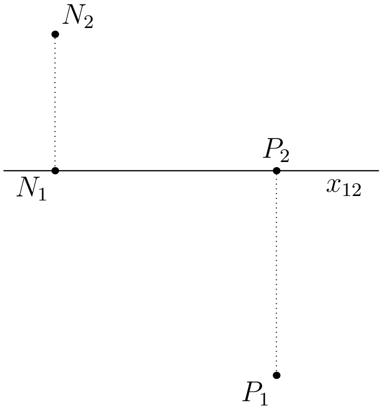
Obraz bodu A je usporiadaná dvojica bodov (A_1, A_2).

Body A_1, A_2 nazývame združené priemety bodu A.

Priamka A_1A_2 je kolmá na základnicu x a nazývame ju ordinála bodu.

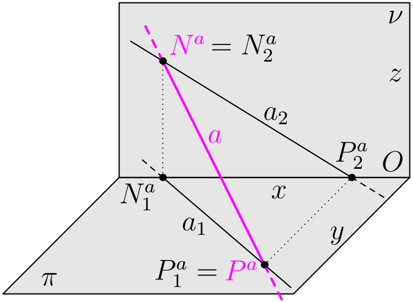
Špeciálne polohy bodu vzhľadom na priemetne π a ν

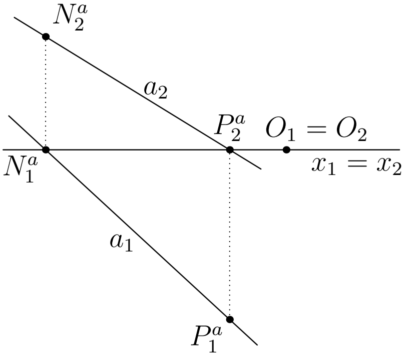




- bod P leží v π, preto nárys $P_2 \in x$
- bod N leží v ν, preto pôdorys $N_1 \in x$

Obraz priamky v Mongeovom zobrazení

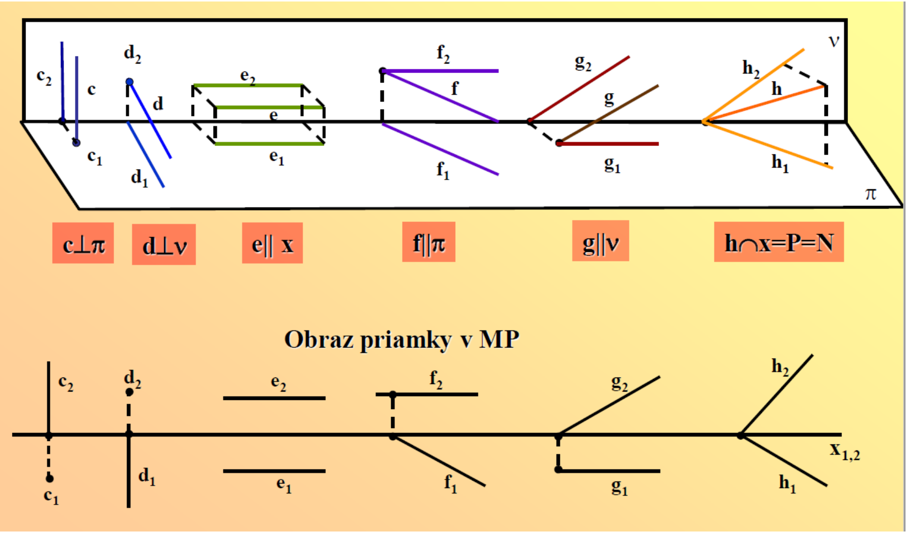




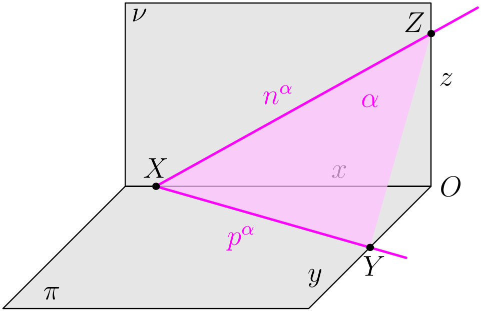
Obrazom priamky a je usporiadaná dvojica priamok (a_1, a_2), ktorú nazývame združené priemety priamky. Významné body priamky:

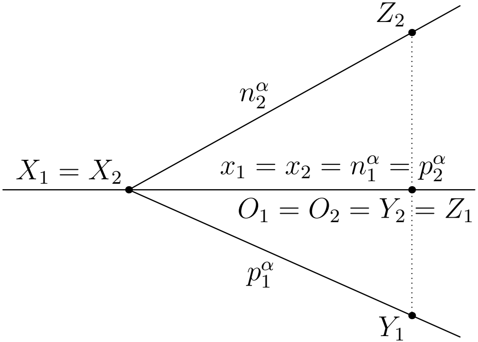
- prvý (pôdorysný) stopník priamky $P^a \ (P_1^a, P_2^a) = a \cap \pi$
- druhý (nárysný) stopník priamky $N^a \ (N_1^a, N_2^a) = a \cap \nu$

Špeciálne polohy priamky vzhľadom na priemetne π a ν



Obraz roviny v Mongeovom zobrazení

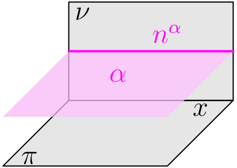




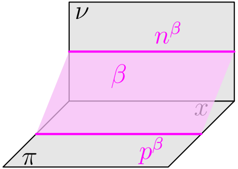
Obrazom roviny $\alpha = \overleftrightarrow{XYZ}$ je trojica usporiadaných dvojíc bodov $X(X_1, X_2)$, $Y(Y_1, Y_2)$, $Z(Z_1, Z_2)$, kde $X = \alpha \cap x$, $Y = \alpha \cap y$, $Z = \alpha \cap z$. Významné priamky roviny:

- prvá (pôdorysná) stopa roviny p^α $(p_1^\alpha, p_2^\alpha) = \alpha \cap \pi$ $\quad (p^\alpha = XY, p_1^\alpha = X_1Y_1, p_2^\alpha = X_2Y_2)$
- druhá (nárysná) stopa roviny n^α $(n_1^\alpha, n_2^\alpha) = \alpha \cap \nu$ $\quad (n^\alpha = XZ, n_1^\alpha = X_1Z_1, n_2^\alpha = X_2Z_2)$

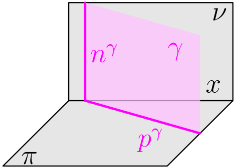
Špeciálne polohy roviny vzhľadom na priemetne π a ν



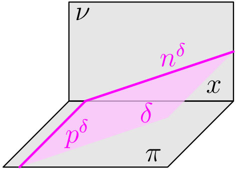
(a) $\alpha \parallel \pi$



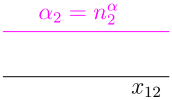
(b) $\beta \parallel x$



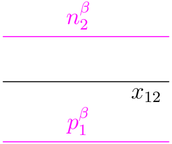
(c) $\gamma \perp \pi$



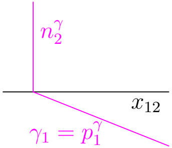
(d) $\delta \perp \nu$



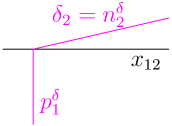
(a) $\alpha_2 = n_2^\alpha \parallel x_{12}$



(b) $p_1^\beta \parallel n_2^\beta \parallel x_{12}$

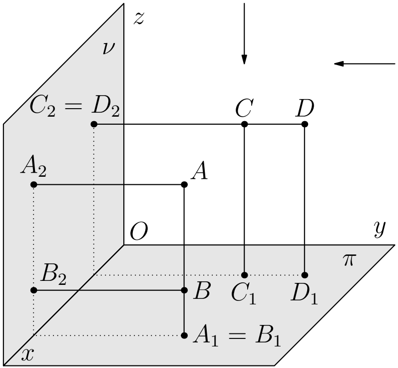


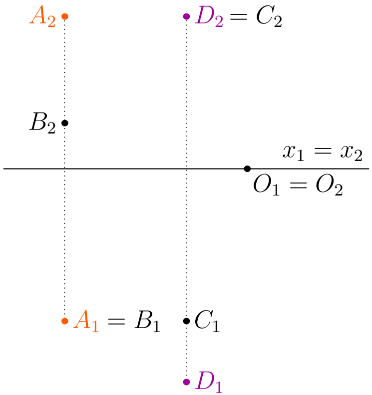
(c) $\gamma_1 = p_1^\gamma \ \wedge \ n_2^\gamma \perp x_{12}$



(d) $\delta_2 = n_2^\delta \ \wedge \ p_1^\delta \perp x_{12}$

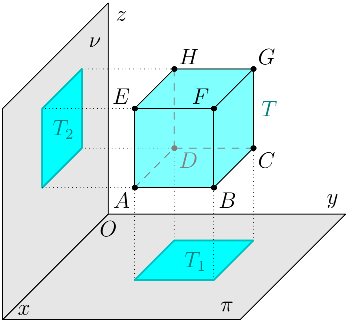
Viditeľnosť bodov vzhľadom na priemetňu

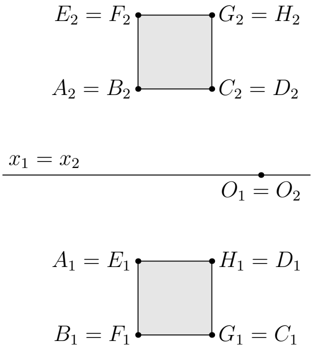




- body A, B a priemetňa π
  $z^A > z^B$, t. j. bod A je „vyššie“ ako bod B a teda bod A vidíme a zakrýva bod B
- body C, D a priemetňa ν
  $y^C < y^D$, t. j. bod D je „ďalej“ od priemetne ν ako bod C a teda D vidíme a zakrýva bod C

Telesom T rozumieme množinu bodov priestoru, ktoré patria vnútru a „hranici“ telesa.





Obrazom telesa T je usporiadaná dvojica (T_1, T_2), kde T_1 je množina pôdorysov bodov telesa a T_2 je množina nárysov bodov telesa. Usporiadanú dvojicu (T_1, T_2) nazývame združené priemety telesa T.

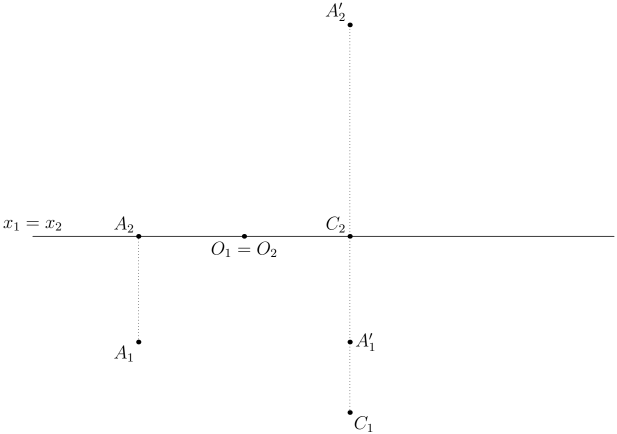
PRÍKLAD

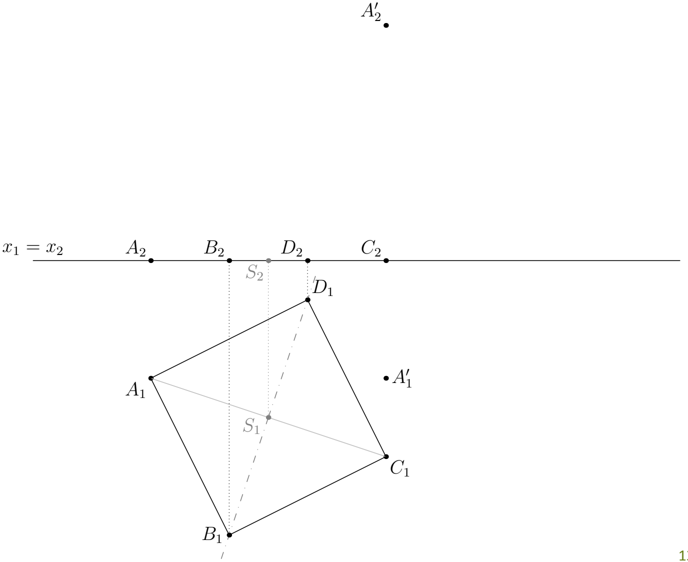
Zostrojte obraz šikmého hranola $ABCDA'B'C'D'$, ktorého podstava je štvorec $ABCD$ v π, ak bod $A = (3, 3, 0)$, bod $C = (-3, 5, 0)$ a vrchol hornej podstavy $A' = (-3, 3, 6)$.

Krok č. 1

Zostrojíme združené priemety bodov A, C, A'.

- sú to usporiadané dvojice (A_1, A_2), (C_1, C_2), (A'_1, A'_2)





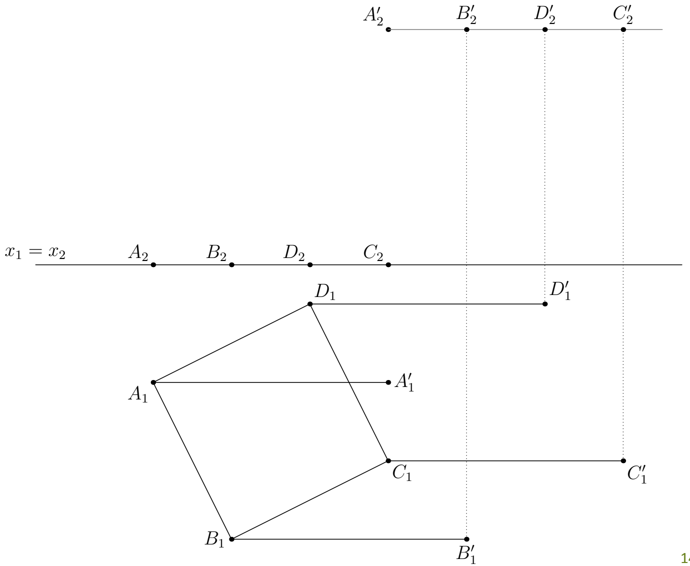
Krok č. 2
Zostrojíme združené priemety podstavy $ABCD$.

- prvý priemet – štvorec $A_1B_1C_1D_1$
- druhý priemet – úsečka na základnici s bodmi A_2, B_2, D_2, C_2

Základné geometrické telesá v Mongeovom zobrazení

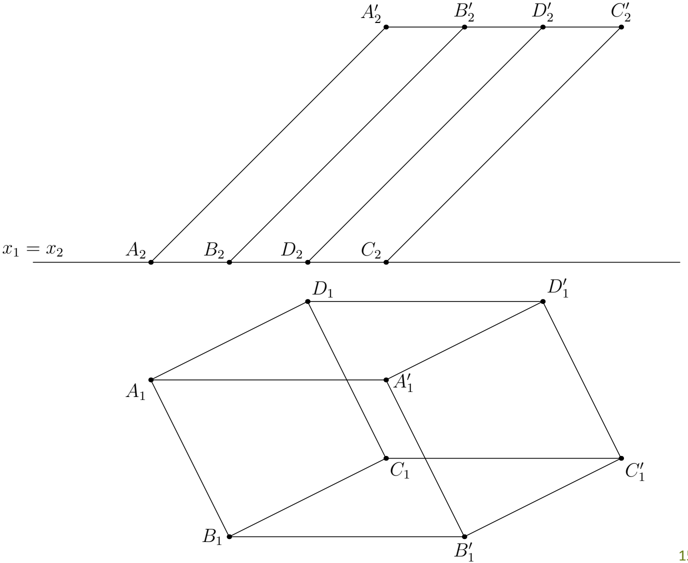
Krok č. 3
Zostrojíme združené priemety vrcholov podstavy $A'B'C'D'$.

- prvý priemet hrany AA' – úsečka A_1A_1'
- platí $A_1A_1' \parallel B_1B_1' \parallel C_1C_1' \parallel D_1D_1'$ a $|A_1A_1'| = |B_1B_1'| = |C_1C_1'| = |D_1D_1'|$
- podstava $A'B'C'D'$ je rovnobežná s π a teda $z^{A'} = z^{B'} = z^{C'} = z^{D'}$



Krok č. 4

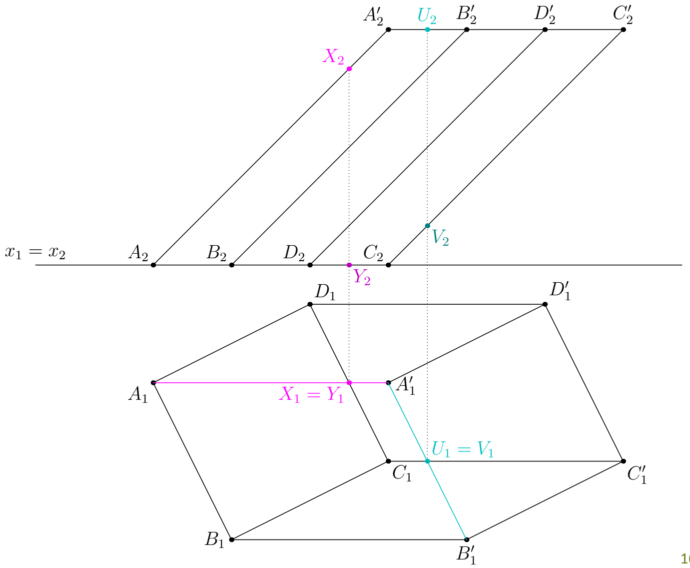
Doplníme združené priemety hrán hranola.



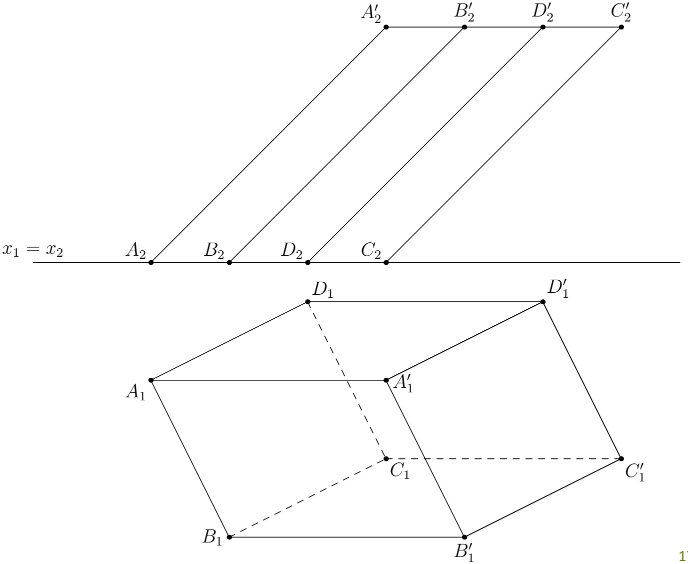
Základné geometrické telesá v Mongeovom zobrazení

Krok č. 5
Určíme viditeľnosť hrán v pôdorysni.

- nech $X_1 = Y_1$ je priesečník hrán C_1D_1 a A_1A_1', kde $X \in AA'$ a $Y \in CD'$
- keďže $z^X > z^Y$, tak „vidíme“ bod X a teda aj hranu AA' (prvý priemet A_1A_1' kreslíme súvislou čiarou)
- rovnako určíme viditeľnosť hrán $A'B'$ a CC'

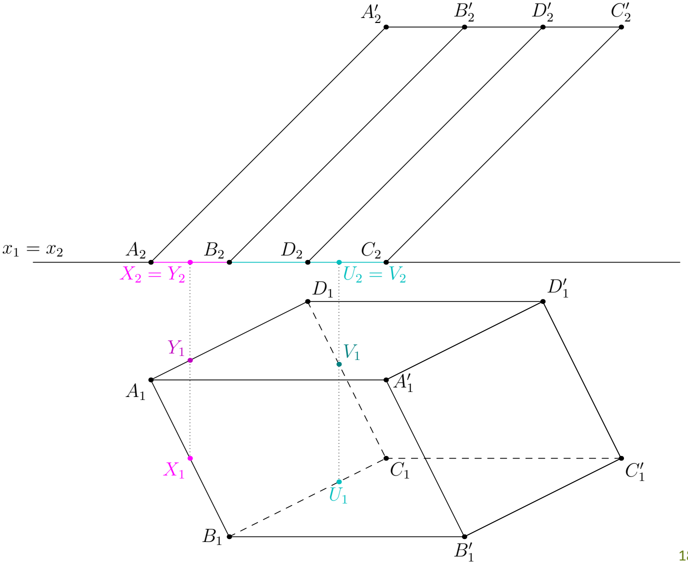


Krok č. 6
Vyznačíme viditeľné hrany (súvislá čiara) a zakryté hrany (čiarkovaná čiara) v pôdorysni.



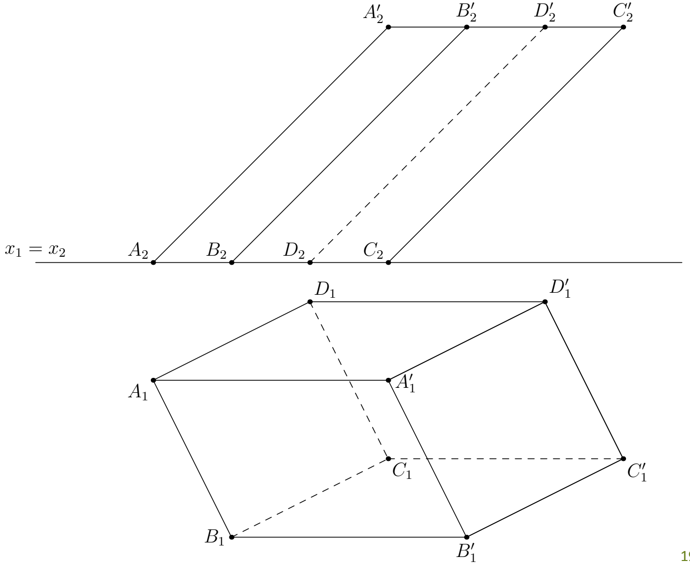
Krok č. 7
Určíme viditeľnosť hrán v nárysni.

- nech $X_2 = Y_2$ je taký bod, že $X \in AB$ a $Y \in AD$
- keďže $y^X > y^Y$, tak „vidíme“ bod X a teda aj hranu AB (A_2B_2 – súvislá čiara)
- rovnako určíme viditeľnosť hrán BC a CD
- viditeľnosť v hornej podstave hranola určíme podobne



Krok č. 8
Vyznačíme viditeľnosť hrán v nárysni.

- v náryse je bod D zakrytý a teda celá hrana DD' je zakrytá



Rez na hranole v Mongeovom zobrazení

- vieme zostrojiť rez hranola
- využijeme vetu (vlastnosť č. 4 osovej afinity):
  „ Medzi rovnobežnými priemetmi dvoch rovinných rezov tej istej hranolovej plochy ...je vzťah osovej afinity.“
  $(\alpha \cap H)_1 \xrightarrow{OA} (\alpha' \cap H)_1 \qquad OA(o = (\alpha \cap \alpha')_1, A_1 = (\alpha \cap a)_1, A'_1 = (\alpha' \cap a)_1)$
- ak prvý priemet pôdorysnej stopy rezovej roviny ρ využijeme ako os afinity:
  Medzi pôdorysmi dvoch rovinných rezov tej istej hranolovej plochy je vzťah osovej afinity.
  $(\pi \cap H)_1 \xrightarrow{OA} (\rho \cap H)_1 \qquad OA(o = (\pi \cap \rho)_1 = p_1^\rho, X_1, X_1^\rho)$, kde $X^\rho = XX' \cap \rho$

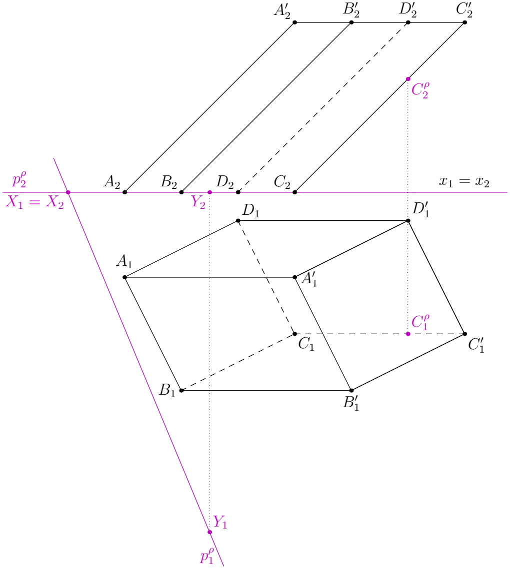
ÚLOHA

Majme šikmý hranol $ABCDA'B'C'D'$ z predchádzajúcej úlohy. Zostrojte rez hranola rovinou ρ, ktorá je určená ako $\rho = p^\rho C^\rho$. Prvá stopa roviny $p^\rho = \overleftrightarrow{XY}$, kde $X = (5, 0, 0)$ a $Y = (0, 12, 0)$. Bod $C^\rho \in CC'$ a $C^\rho = (-7, y, z)$.

Rez na hranole v Mongeovom zobrazení

Krok č. 1
Nakreslíme obraz roviny ρ.

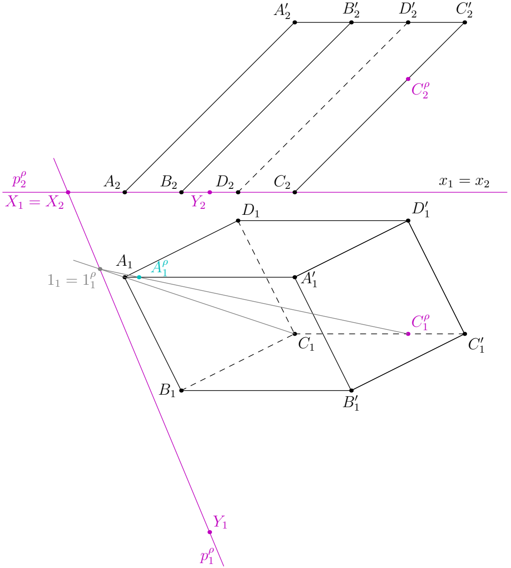
- zostrojíme združené priemety bodov X, Y, C^ρ
- prvý priemet pôdorysnej stopy roviny $p_1^\rho = \overleftrightarrow{X_1 Y_1}$
- druhý priemet pôdorysnej stopy roviny $p_2^\rho = \overleftrightarrow{X_2 Y_2}$



Rez na hranole v Mongeovom zobrazení

Krok č. 2
Využijeme osovú afinitu $OA(p_1^\rho, C_1, C_1^\rho)$.

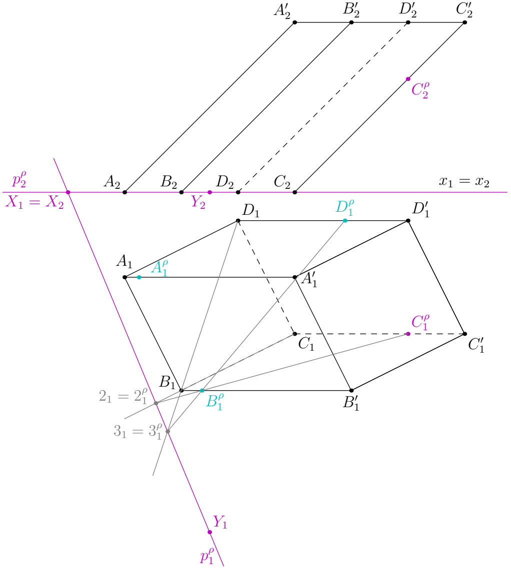
- určíme samodružný bod $\{1_1 = 1_1^\rho\} = A_1C_1 \cap p_1^\rho$
- bod $A_1^\rho = A_1A_1' \cap C_1^\rho 1_1^\rho$



Krok č. 3

Pomocou OA určíme body B_1^ρ, D_1^ρ.

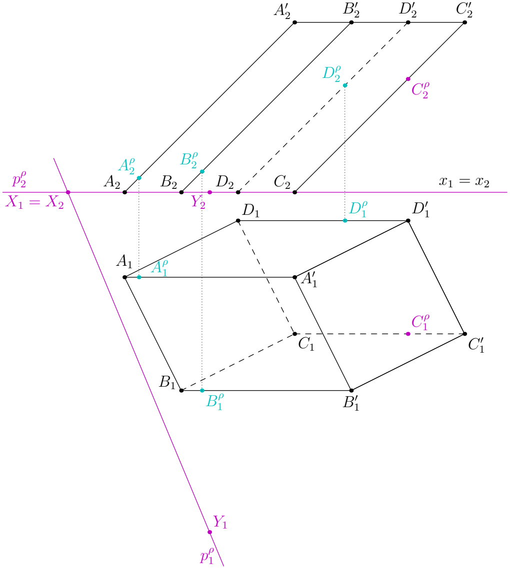
- $OA(B_1) = B_1^\rho$
  - $\{2_1 = 2_1^\rho\} = B_1C_1 \cap p_1^\rho$
  - $B_1^\rho = B_1B_1' \cap C_1^\rho 2_1^\rho$
- $OA(D_1) = D_1^\rho$
  - $\{3_1 = 3_1^\rho\} = B_1D_1 \cap p_1^\rho$
  - $D_1^\rho = D_1D_1' \cap B_1^\rho 3_1^\rho$



Krok č. 4

Určíme nárysy bodov A^ρ, B^ρ, D^ρ.

- $A^\rho \in AA'$ a teda $A_2^\rho \in A_2A_2'$
- $B^\rho \in BB'$ a teda $B_2^\rho \in B_2B_2'$
- $D^\rho \in DD'$ a teda $D_2^\rho \in D_2D_2'$

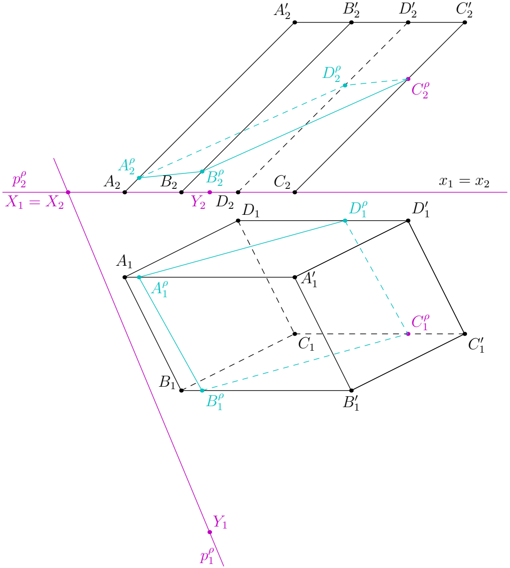


Rez na hranole v Mongeovom zobrazení

Krok č. 5

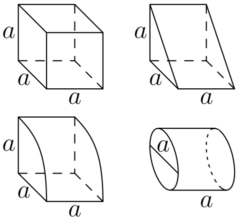
Vykreslíme združené priemety rezu rovinou ρ na hranole.

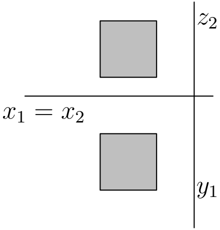
- viditeľnosť rezu je v súlade s viditeľnosťou jednotlivých stien hranola



Mongeovo zobrazenie v technickej praxi

- Mongeovo zobrazenie je výhodné pri zobrazovaní základných geometrických telies ako kocka, kváder, ihlan valec, kužeľ a guľa
- pri zobrazovaní technických objektov, ktoré sú omnoho zložitejšie, príp. vytvorené z viacerých geometrických telies, nám dva pohľady, pôdorys („zhora“) a nárys („spredu“), nemusia jednoznačne opísať objekt
- príklad telies, ktorých združené priemety sú zhodné

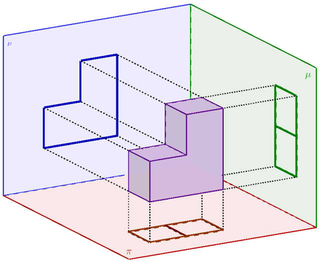




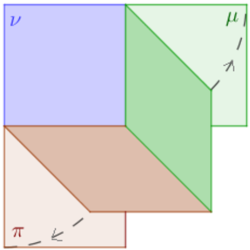
- pre jednoznačnosť a názornosť doplníme pohľad „zboku - zľava“
- v prípade potreby je možné doplniť aj viacero pohľadov („sprava, zospodu, ...“)

Tretia priemetňa – bokorysňa

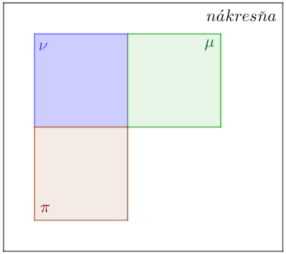
- doplníme tretiu priemetňu, ktorou je rovina $\mu = yz$ v pravouhlom trojhrane $Oxyz$
- rovinu μ nazývame bokorysňa a je kolmá na roviny π a ν
- navzájom kolmé sú aj tri susedné steny súradnicovej sústavy $Oxyz$ vhodne umiestnenej, ktoré v praxi vytvoria tzv. premietací kút



Obr. 6: Premietací kút.

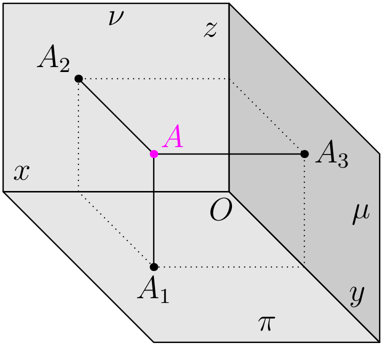


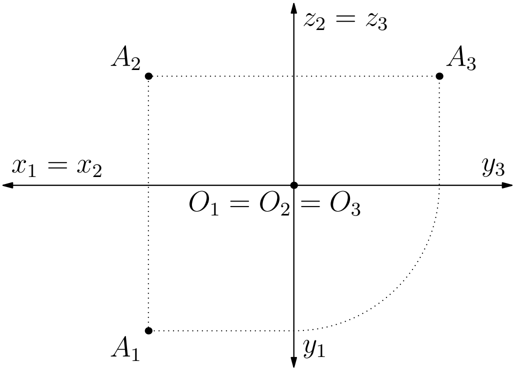
Obr. 7: Združenie priemetní.



Obr. 8: Umiestnenie v nákresni.

Zobrazenie bodu do troch priemetní



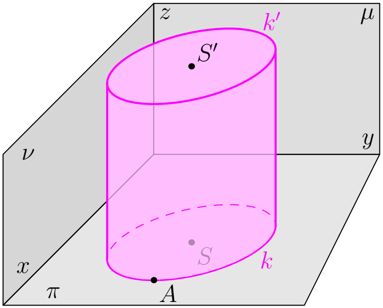


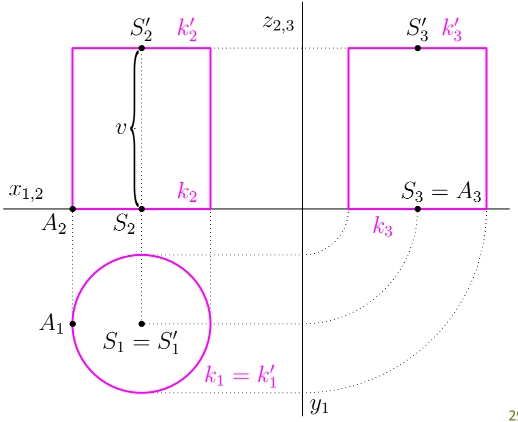
Bod A_3 je kolmý priemet bodu A do roviny $\mu = yz$.

Príklad zobrazenia telesa do troch priemetní

ÚLOHA

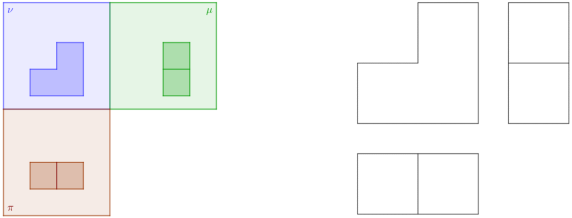
Zostrojte pôdorys, nárys a bokorys rotačného valca, ktorého podstava leží v pôdorysni. Dané sú priemety stredu S a bodu A podstavnej kružnice. Výška valca je $v = 7j$.





Združenie priemetní podľa normy STN

- združenie troch priemetní π, ν, μ je určené normou STN ISO 5456-2: *Kolmé (ortografické) zobrazenie*
- po združení priemetní dostaneme v priemetni združené priemety objektu, ktorými sú nárys (pohľad spredu), pôdorys (pohľad zhora) a bokorys objektu (pohľad zboku)
- pri technických objektoch nepoužívame označenie vrcholov
- priemety osí x, y, z sa nekreslia a vzdialenosti medzi priemetmi sa volia tak, aby ostalo miesto napríklad na okótovanie (zápis rozmerov) alebo iné informácie technického charakteru



Obr. 9: Umiestnenie nárysu, pôdorysu a bokorysu je v nákresni záväzné.

Zoznam použitých obrázkov

- obr. 1: https://cs.wikipedia.org/wiki/Gaspard_Monge
- obr. na slajdoch 2 – 6, 8 – 26, 28, 29: B. Pokorná
- obr. na slajde 7: Kyselová D., *Mongeova projekcia*
- obr. na slajdoch 27, 30: A. Mackovová