Šikmé (kosouhlé) premietanie

Geometria (3)

Barbora Pokorná

KAG, FMFI UK

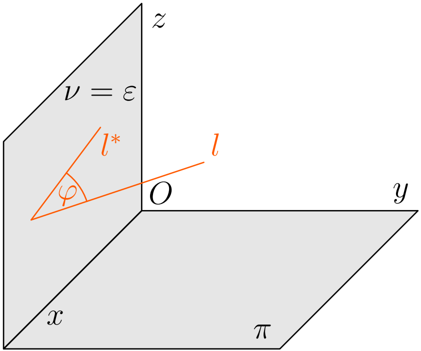
2020

Princíp metódy

Šikmé (kosouhlé) premietanie je zovšeobecnenie voľného rovnobežného premietania.

DANÉ

- dve navzájom kolmé roviny v pravouhlom trojhrane $Oxyz$
  - prvá priemetňa $\pi = xy$
  - druhá priemetňa $\nu = xz$
- priemetňa $\varepsilon = \nu = xz$
- osnova premietania:
  priamka l, $l \nparallel \varepsilon$, $l \nparallel \pi$ $\quad (l \not\perp \varepsilon)$
- odchýlka premietania: uhol $\varphi = \measuredangle l, \varepsilon = \measuredangle l^*, l$



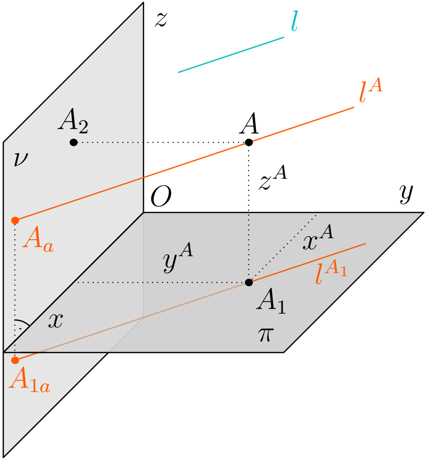
Obraz bodu

Zostrojíme k bodu $A(x^A, y^A, z^A)$ z priestoru $\mathbb{E}^3$

- prvý a druhý priemet: $A_1(x^A, y^A)$, $A_2(x^A, z^A)$
- rovnobežný priemet bodu A do priemetne ε
  $A_a = l^A \cap \varepsilon$, kde $l^A \in \{l\}$, $A \in l^A$,
  t. j. A_a – šikmý priemet bodu A
- rovnobežný priemet bodu A_1 do priemetne ε
  $A_{1a} = l^{A_1} \cap \varepsilon$, kde $l^{A_1} \in \{l\}$, $A_1 \in l^{A_1}$,
  t. j. A_{1a} – šikmý pôdorys bodu A
- základnica – priamka $x = \pi \cap \nu$, $A_{1a}A_a \perp x$

VÝSTUP

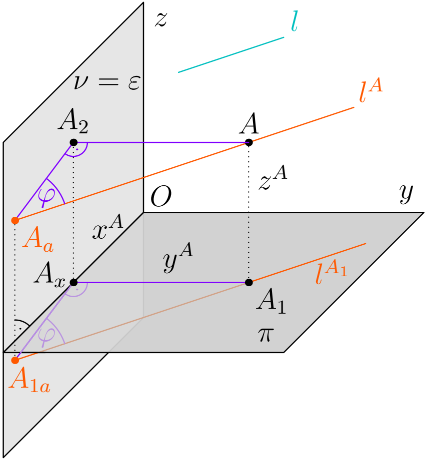
Zobrazenie $h : \mathbb{E}^3 \to \varepsilon$, ktoré bodu A priradí usporiadanú dvojicu bodov (A_{1a}, A_a), je bijektívne bodové zobrazenie, ktoré nazývame šikmé (kosouhlé) zobrazenie.



Obr. 1: Priamka $A_{1a}A_a$ je kolmá na základnicu x.

Koeficient skrátenia v priestore

- označme bod $A_x = x \cap AA_1A_2$
- trojuholníky $\triangle AA_2A_a$ a $\triangle A_1A_xA_{1a}$ sú zhodné
- platí:
  - $|A_{1a}A_a| = |A_xA_2| = |AA_1| = z^A$
  - cotg $\varphi = \frac{|A_2A_a|}{|y^A|} \quad \Rightarrow$
    $|A_2A_a| = |y^A|$cotg $\varphi = |A_xA_{1a}|$
- číslo cotg $\varphi = v$ nazývame koeficient skrátenia
- pre ostrý uhol $\varphi \in (90^\circ, 45^\circ\rangle$ je $v \in (0, 1\rangle$

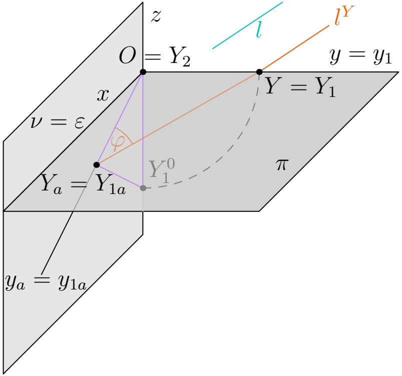


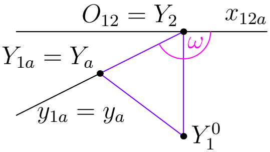
Obr. 2: Priamka $A_{1a}A_a$ je kolmá na základnicu x.

Koeficient skrátenia v nákresni

Nech $Y(0,1,0)$ je bod na osi y

- zostrojme jeho prvý a druhý priemet: Y_1, Y_2
- zostrojme bod Y_1^0, čiže otočenú polohu bodu Y_1
- ďalej zostojme šikmý pôdorys $Y_{1a} = Y_a$
- platí cotg $\varphi = |Y_2 Y_a| = v$
- v nákresni trojuholníkom skrátenia $\triangle Y_2 Y_1^0 Y_a$ určíme jednoznačne šikmé zobrazenie $K(\omega, v)$, kde
  $\omega = \measuredangle Y_2 Y_a, x = \measuredangle y_a x_a$
  $v = |Y_2 Y_a|$
- dĺžka úsečky $|Y_2 Y_1^0| = 1$

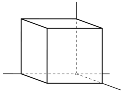




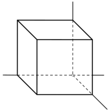
Veľkosť uhla ω v nákresni

Po zadaní koeficientu skrátenia $v \in (0, 1\rangle$ môžeme veľkosť uhla ω vybrať z intervalu $(15°, 165°)$. Nech $v = \operatorname{cotg} 63.4° = \frac{1}{2}$, potom obraz úplnej kocky je pre:

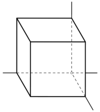
- $\omega \in (0°, 90°)$ tzv. nadhľady zľava



(a) $\omega = 20°$

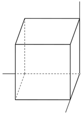


(b) $\omega = 45°$

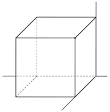


(c) $\omega = 60°$

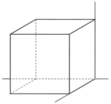
- $\omega \in (90°, 180°)$ tzv. nadhľady sprava



(d) $\omega = 110°$



(e) $\omega = 135°$

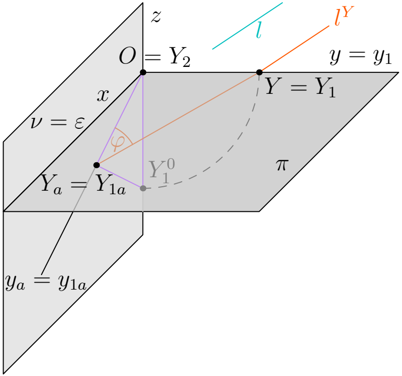


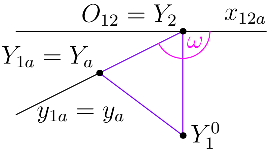
(f) $\omega = 150°$

V pedagogickej praxi pre koeficient skrátenia $v = \frac{1}{2}$ je uprednostnená veľkosť uhla $\omega = 45°$ (obr. b) alebo $\omega = 135°$ (obr. e), čiže voľné rovnobežné premietanie.

Obraz útvaru v rovine π

- priemetňu ε stotožníme s nákresňou (zošit, tabuľa)
- v nákresni sú dve súmiestne rovinné polia
  (π_1^0) – otočená poloha rovinného poľa π_1
  (π_{1a}) – rovnobežný priemet poľa π_1 v smere l
- existuje osová afinita
  $OA\colon (\pi_1^0) \to (\pi_{1a})$
  $OA(x_{12a} - os,\ Y_1^0,\ Y_{1a})$
- t. j. medzi otočenými polohami bodov Y_1^0 a šikmými pôdorysmi bodov Y_{1a} je vzťah osovej afinity s osou v základnici x
- otočenú polohu bodu Y_1^0 budeme ďalej označovať len Y_1 (podobne ako v MZ)





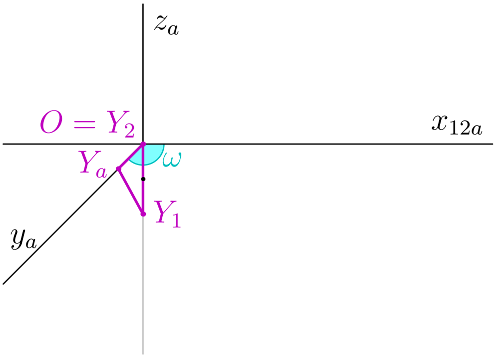
Obraz útvaru v rovine π

ÚLOHA

V šikmom zobrazení $K(\omega = 135°, v = \frac{1}{2})$ zostrojte obraz štvorca $ABCD$, kde $A = (-1, 2, 0)$ a $C = (-4, 4, 0)$.

Krok č. 1

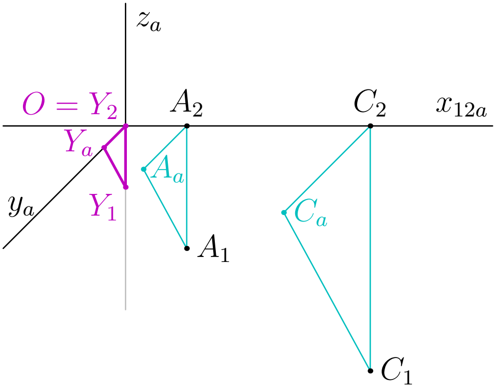
- zostrojíme $K(y) = y_a$, kde $\omega = \measuredangle x_{12a}, y_a = 135°$
- určíme trojuholník skrátenia $Y_2 Y_1 Y_a$, v ktorom $v = \frac{|Y_2 Y_a|}{|Y_2 Y_1|} = \frac{1}{2}$



Krok č. 2

Zostrojíme obraz bodov A, C.

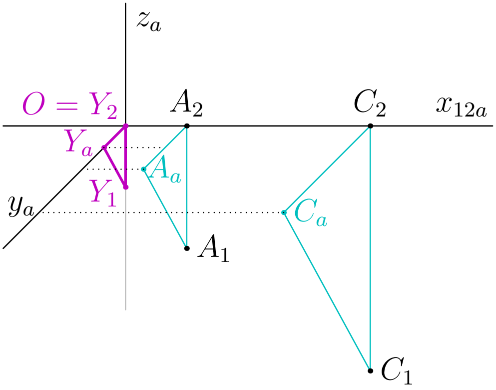
- $K(A) = (A_a, A_{1a})$
  - keďže $A \in \pi$, $A_a = A_{1a}$
  - zostrojíme priemety $A_2 = A_x$, A_1
  - $\triangle Y_1 Y_2 Y_a \sim \triangle A_1 A_2 A_a$, preto A_a určíme tak, aby $A_2 A_a \parallel Y_2 Y_a$ a $A_1 A_a \parallel Y_1 Y_a$
- $K(C) = (C_a, C_{1a})$
  - keďže $C \in \pi$, $C_a = C_{1a}$



Obraz útvaru v rovine π

Overenie:

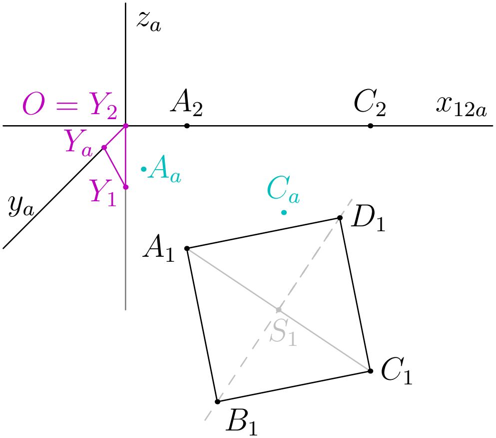
- zo zadania máme $y^A = 2$ a $y^C = 4$
- vidíme, že naozaj $|A_2 A_a| = 2|Y_2 Y_a|$ a $|C_2 C_a| = 4|Y_2 Y_a|$



Krok č. 3

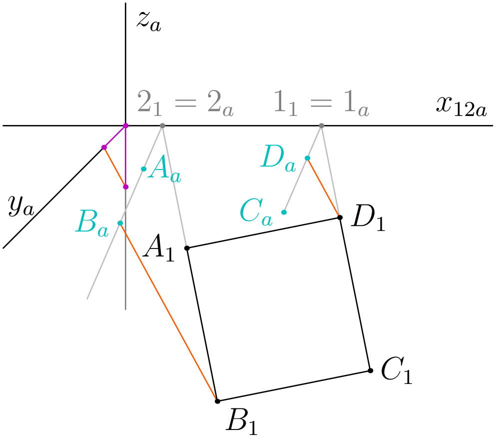
Zostrojíme pôdorys štvorca $ABCD$.

- prvý priemet $A_1B_1C_1D_1$ je opäť štvorec, pretože $ABCD \subset \pi$



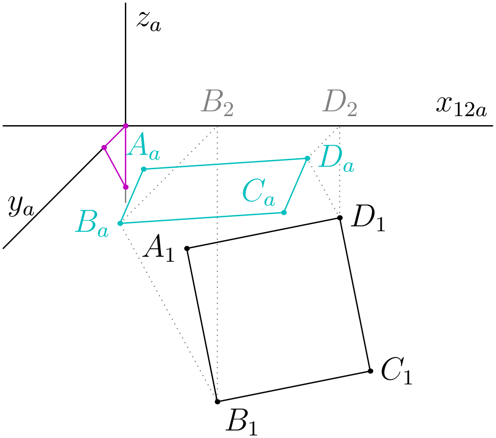
Krok č. 4
Využijeme osovú afinitu $OA(x_{12a}, Y_1, Y_a)$.

- smer afinity je znázornený oranžovou farbou
- $OA(B_1) = B_a$
- $OA(D_1) = D_a$



Krok č. 5
Zostrojíme obraz štvorca $ABCD$.

- obrazom štvorca je rovnobežník $A_aB_aC_aD_a$
- vidíme, že OA zachovala vlastnosť $\triangle Y_1Y_2Y_a \sim \triangle B_1B_2B_a \sim \triangle D_1D_2D_a$



Obraz telesa s podstavou v rovine π, resp. $\pi' \parallel \pi$

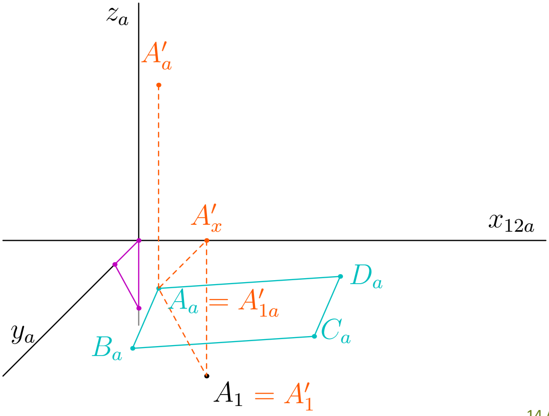
ÚLOHA

V šikmom zobrazení $K(\omega = 135°, v = \frac{1}{2})$ zostrojte obraz kolmého hranola $ABCDA'B'C'D'$, ktorého podstavou je štvorec $ABCD$ z predchádzajúcej úlohy a bod $A' = (-1, 2, 3)$.

Krok č. 1

Zostrojíme $K(A') = (A'_a, A'_{1a})$.

- bod $A'_{1a} = A_{1a} = A_a$
- zostrojíme bod A'_a, kde $A'_a A'_{1a} \parallel z_a$ a $|A'_a A'_{1a}| = z^{A'} = 3$



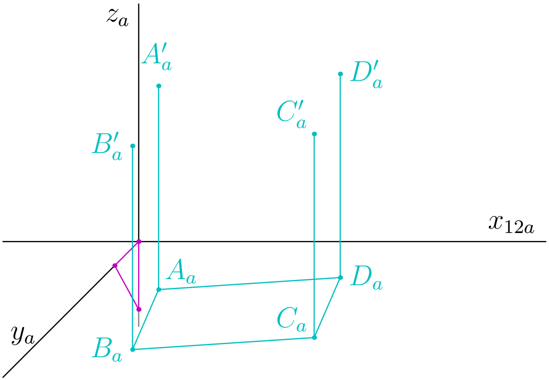
Obraz telesa s podstavou v rovine π, resp. $\pi' \parallel \pi$

Krok č. 2

Zostrojíme šikmé priemety bodov B', C', D'.

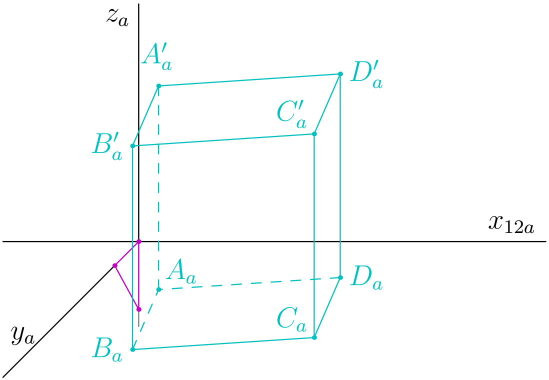
Platí:

- $B'_{1a} = B_a$, $C'_{1a} = C_a$, $D'_{1a} = D_a$,
- $A'_a A'_{1a} \parallel B'_a B'_{1a} \parallel C'_a C'_{1a} \parallel D'_a D'_{1a}$
- $|A'_a A'_{1a}| = |B'_a B'_{1a}| = |C'_a C'_{1a}| = |D'_a D'_{1a}|$



Krok č. 3
Vyznačíme viditeľnosť hrán.

- viditeľnosť hrán určíme podobne ako pri MZ



Zoznam použitých obrázkov

- B. Pokorná