Úlohy o vzájomnej polohe základných geometrických útvarov

Geometria (3)

Barbora Pokorná

KAG, FMFI UK

2020

Polohové úlohy

- prevažne konštrukčné úlohy riešiteľné pomocou axióm I, U, R
  (napr. rez telesa, prienik priamky s rovinou alebo s telesom, zostrojenie priečky)
- štruktúra riešenia je podobná ako u planimetrickej úlohy
  - Rozbor
  - Konštrukcia
  - Dôkaz
  - Diskusia
- analógiou „Konštrukcie“ v planimetrii by bolo vyhotovenie priestorového modelu, čo je nerealizovateľné
- konštrukcia v stereometrii – vytvorenie algoritmu , ktorým by bol hľadaný objekt vytvorený použitím elementárnych konštrukcií
- riešenie budeme ilustrovať na jednoduchých telesách (presnejšie ich priemetoch) v tzv. voľnom rovnobežnom premietaní

Elementárne konštrukcie

- Zostrojiť rovinu incidentnú s danými tromi nekolineárnymi bodmi.
- Zostrojiť priesečnicu dvoch rôznobežných rovín.
- Zvoliť ľubovoľný(ú)
  - bod, ktorý (ne)leží na danej priamke.
  - bod, ktorý (ne)leží v danej rovine.
  - priamku, ktorá (ne)prechádza daným bodom.
  - priamku, ktorá (ne)leží v danej rovine.
  - rovinu, ktorá (nie) je incidentná s daným bodom.
  - rovinu, ktorá (nie) je incidentná s danou priamkou.
- Zostrojiť priamku prechádzajúcu daným bodom a rovnobežnú s danou priamkou.

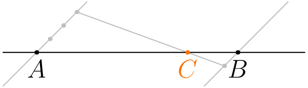
Voľné rovnobežné premietanie

- zobrazuje telesá z priestoru do roviny názorne a relatívne jednoducho
- obrazom geometrického útvaru U bude geometrický útvar, ktorý pozostáva z rovnobežných priemetov všetkých význačných bodov, ktorými je útvar U určený
- za význačné body považujeme vrcholy, hrany, obrysové priamky (body drôteného modelu)
- základná invariantná vlastnosť – rovnobežnosť
- základný invariant – deliaci pomer

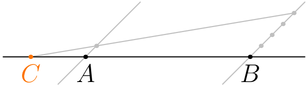
Deliaci pomer usporiadanej trojice

- Majme tri navzájom rôzne kolineárne body A, B, C, pričom $C \in AB$.
- Deliaci pomer usporiadanej trojice bodov A, B, C je číslo

$$\lambda = (ABC) = \frac{C - A}{C - B}, \quad \lambda \in \mathbb{R} - \{0, 1\}.$$



(a) $\lambda = -\frac{3}{1} = -3$

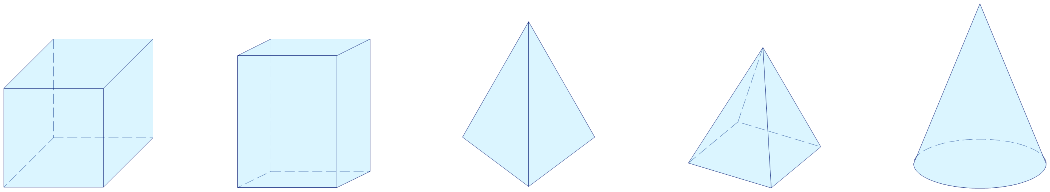


(b) $\lambda = \frac{1}{4}$

Obr. 1: Ako graficky nájsť C pre zadané A, B a $\lambda = (ABC)$.

Zobrazenia základných telies vo voľnom rovnobežnom premietaní

- priemet telesa by mal spĺňať zásady
  - správnosti
  - názornosti
  - jednoduchosti
- v názornom obrázku vieme zistiť vzťahy medzi jednotlivými hranami, stenami telesa alebo iné dôležité vlastnosti telesa



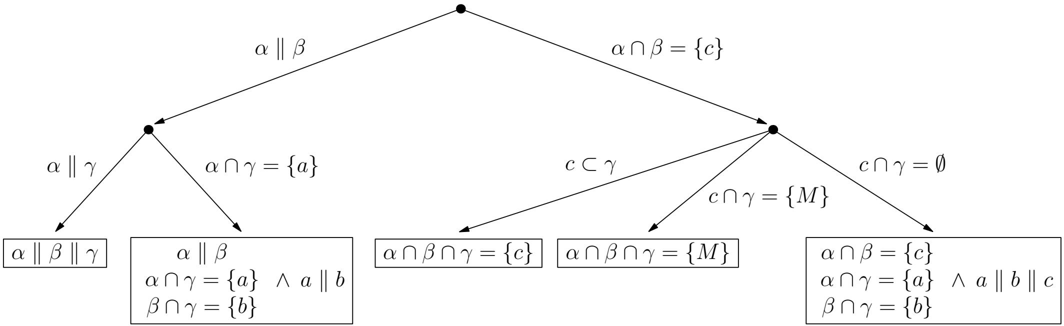
(a) kocka (b) kváder (c) štvorsten (d) ihlan (e) kužeľ

Obr. 2: Zobrazenia základných telies, ktoré spĺňajú všetky spomenuté zásady.

Určenie vzájomnej polohy troch navzájom rôznych rovín

ÚLOHA

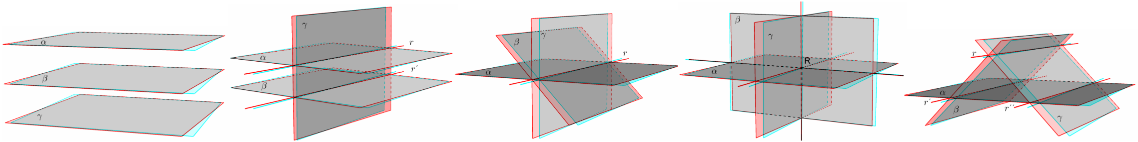
Určte vzájomnú polohu troch navzájom rôznych rovín α, β, γ.



Obr. 3: Postupujeme na základe tvrdenia o úplnej klasifikácii vzájomných polôh priamok a rovín.

Klasifikácia vzájomnej polohy troch navzájom rôznych rovín

- (a) Všetky tri roviny sú navzájom rovnobežné.
- (b) Dve rovnobežné roviny pretína tretia v navzájom rovnobežných priesečniciach.
- (c) Všetky tri roviny majú spoločnú priamku.
- (d) Všetky tri roviny majú spoločný práve jeden bod.
- (e) Všetky dvojice rovín sú navzájom rôznobežné a ich priesečnice sú navzájom rovnobežné priamky.



(a) (b) (c) (d) (e)

Obr. 4: Vzájomná poloha troch rovín.

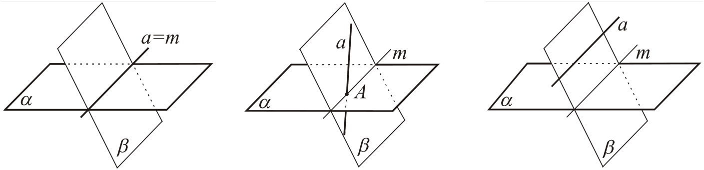
Určenie vzájomnej polohy priamky a roviny

ÚLOHA

Určte vzájomnú polohu priamky a a roviny α.

ROZBOR

- prevedieme stereometrickú úlohu na planimetrickú
- zvolíme ľubovoľnú rovinu $\beta:\ a \subset \beta,\ \beta \nparallel \alpha$
- platí, že $a \cap \alpha = (a \cap \beta) \cap \alpha = a \cap (\beta \cap \alpha) = a \cap m = \begin{cases} a & (a \subset \alpha) \\ \{A\} & \\ \emptyset & (a \parallel \alpha) \end{cases}$



(a) (b) (c)

Obr. 5: Rôzne prípady prieniku $a \cap \alpha$.

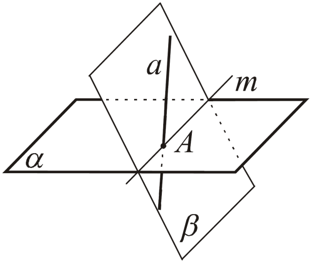
KONŠTRUKČNÝ ALGORITMUS

Zostrojte priesečník danej priamky s danou rovinou.

DANÉ
- $a \in \mathscr{P},\ \alpha \in \mathscr{R},\ a \nparallel \alpha$

POSTUP
- $\beta \in \mathscr{R} : a \subset \beta,\ \beta \nparallel \alpha$
- $m \in \mathscr{P} : m = \alpha \cap \beta$
- $A \in \mathscr{B} : \{A\} = a \cap m = a \cap \alpha$

VÝSTUP
- A

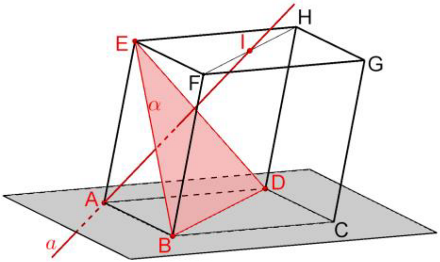


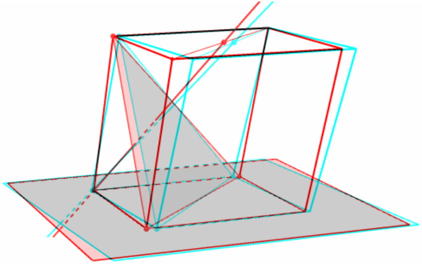
Obr. 6: Bod A je prienikom priamky a s rovinou α.

Príklad použitia algoritmu na hľadanie prieniku priamky a roviny

ÚLOHA

Daný je rovnobežnosten $ABCDEFGH$. Zostrojte priesečník priamky a a roviny α, ak $a = \overleftrightarrow{AI}$, kde $(FHI) = -1$ a $\alpha = \overleftrightarrow{BDE}$.

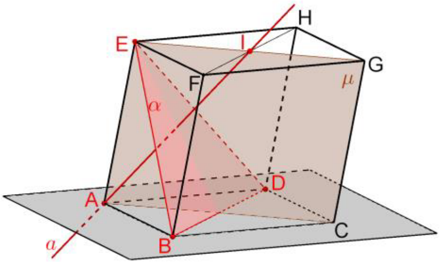


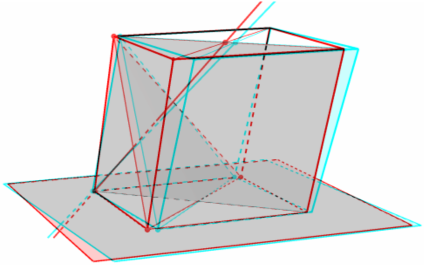


Obr. 7: Náčrt zadania.

Krok č. 1

Nájsť vhodnú rovinu μ takú, že $a \subset \mu,\ \mu \nparallel \alpha$.

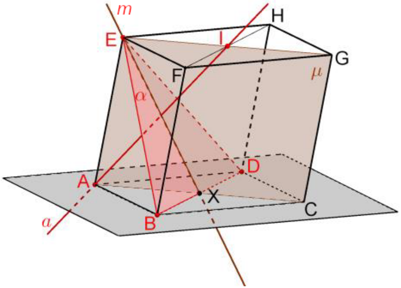


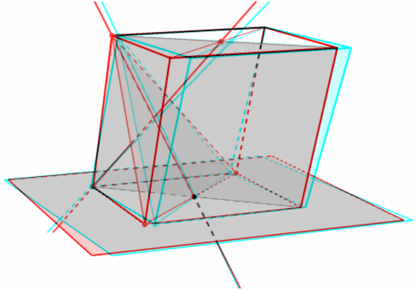


Obr. 8: Zvoľme rovinu $\mu = \overleftrightarrow{AIE}$. Určite $a \subset \mu$, lebo $A, I \in \mu$ a tiež $\mu \nparallel \alpha$, lebo $E \in \alpha \cap \mu$.

Krok č. 2

Určiť priamku m, ktorú dostaneme ako $m = \alpha \cap \mu$.

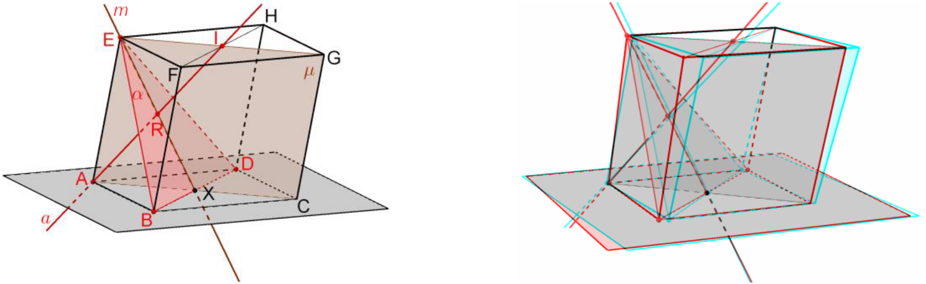




Obr. 9: Prienikom rovín α a μ je priamka $m = \overleftrightarrow{EX}$, pričom bod $X = \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{BD}$. Bod X vieme určiť, pretože body A, B, C, D ležia v jednej rovine.

Krok č. 3

Určiť priesečník R priamky a a priamky m, t.j. zároveň $\{R\} = a \cap \alpha$.

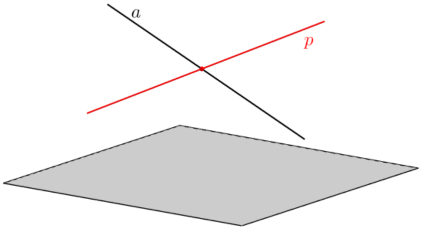


Obr. 10: Priesečník priamok a a m môžeme určiť, nakoľko obe ležia v jednej rovine μ. Tento bod R je zároveň naším hľadaným prienikom priamky a a roviny α.

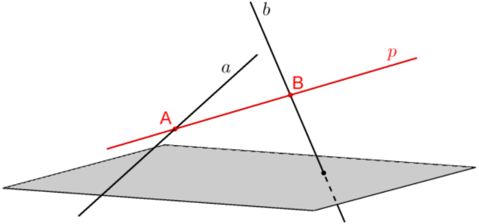
Priečky geometrických útvarov

- Priečkou **geometrického útvaru** nazývame priamku, ktorá má s útvarom spoločný aspoň jeden bod.

  $p \in \mathscr{P}$ *je priečkou útvaru* $U \Leftrightarrow p \cap U \neq \emptyset$



Obr. 11: Priečka priamky a je každá priamka p rôznobežná s a, t.j. $p \cap a \neq \emptyset$.



Obr. 12: Priečka mimobežiek a, b je každá priamka p rôznobežná s oboma mimobežkami, t.j. $a \cap p \neq \emptyset \ \wedge \ b \cap p \neq \emptyset$.

Priečka dvoch mimobežiek prechádzajúca daným bodom

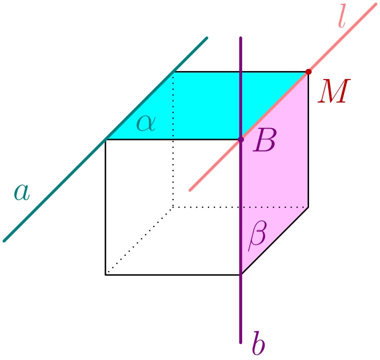
ÚLOHA

Zostrojte priečku mimobežných priamok a a b, ktorá prechádza bodom M (kde $M \notin a, M \notin b$).

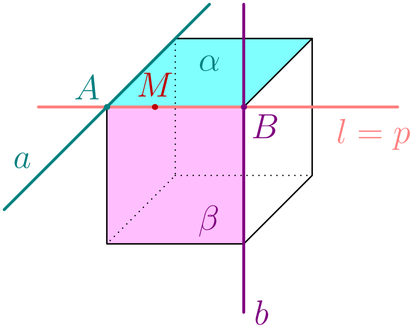
ROZBOR

- zostrojme roviny $\alpha = \overleftrightarrow{aM}$ a $\beta = \overleftrightarrow{bM}$
- platí, že $M \in \alpha \cap \beta$ a teda $\exists\, l \in \mathscr{P}: \ \alpha \cap \beta = l$
- hľadáme priečku p takú, že $M \in p$
- aby p existovala, musia $\exists\, A, B \in p$ také, že $p \cap a = \{A\}$ a $p \cap b = \{B\}$
- určite $p \subset \alpha$, lebo pre jej dva body A, M platí $M \in \alpha$ a $A \in \alpha$
- podobne $p \subset \beta$, lebo pre jej dva body B, M platí $M \in \beta$ a $B \in \beta$
- teda ak priečka p existuje, potom $p \subset \alpha \cap \beta \Rightarrow p \equiv l$
- pre priamku l môže nastať jedna z možností $\left\langle \begin{array}{lll} l \parallel a & \Rightarrow \nexists A & (\nexists p) \\ l \parallel b & \Rightarrow \nexists B & (\nexists p) \\ l \nparallel a \wedge l \nparallel b & \Rightarrow \exists A, B & (\exists\, p = \alpha \cap \beta) \end{array} \right.$

Príklady (ne)existencie priečky dvoch mimobežiek



Obr. 13: Priečka mimobežiek a, b prechádzajúca bodom M neexistuje, pretože $l \parallel a$.



Obr. 14: Priečka mimobežiek a, b prechádzajúca bodom M existuje, pretože $l \cap a = \{A\} \ \wedge \ l \cap b = \{B\}$.

Priečka dvoch mimobežiek prechádzajúca daným bodom

KONŠTRUKČNÝ ALGORITMUS

Zostrojte priečku mimobežných priamok a a b, ktorá prechádza bodom M.

DANÉ

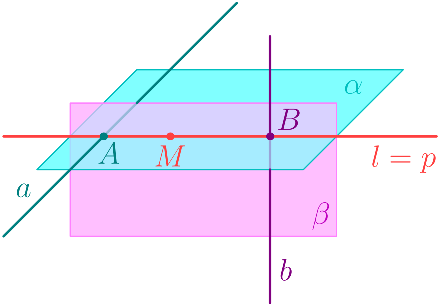
- $a, b \in \mathscr{P},\ M \in \mathscr{B},\ M \notin a, M \notin b$

POSTUP

- $\alpha \in \mathscr{R}:\ M \in \alpha, a \subset \alpha$
- $\beta \in \mathscr{R}:\ M \in \beta, b \subset \beta$
- $l \in \mathscr{P} : l = \alpha \cap \beta$
- $A \in \mathscr{B} : \{A\} = a \cap l$
- $B \in \mathscr{B} : \{B\} = b \cap l$
- $p \in \mathscr{P} : A \in p, B \in p$

VÝSTUP

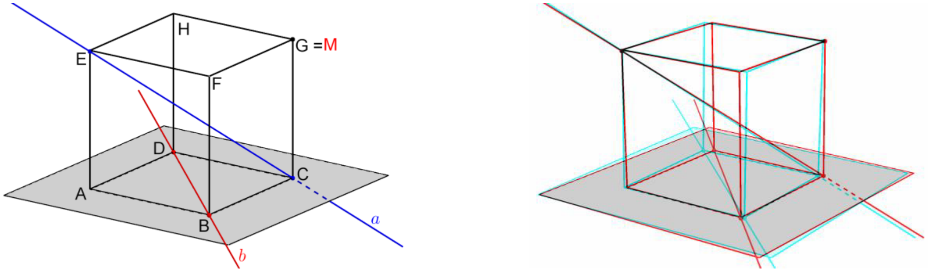
- p



Obr. 15: Konštrukcia priečky p prechádzajúcej bodom M.

ÚLOHA

Daná je kocka $ABCDEFGH$. Zostrojte priečku priamok $a = \overleftrightarrow{CE}$ a $b = \overleftrightarrow{BD}$ prechádzajúcu bodom $M = G$.

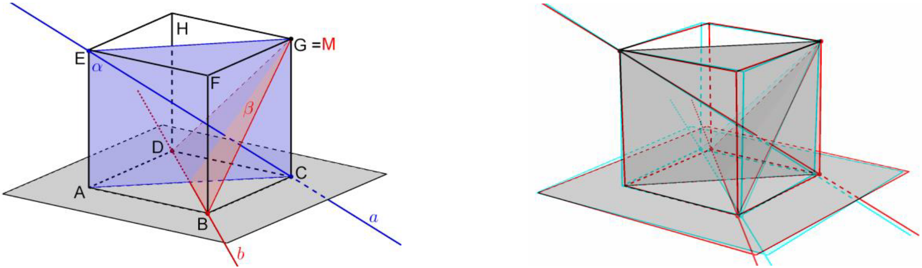


Obr. 16: Náčrt zadania.

Príklad použitia algoritmu na hľadanie priečky mimobežiek

Krok č. 1 a č. 2

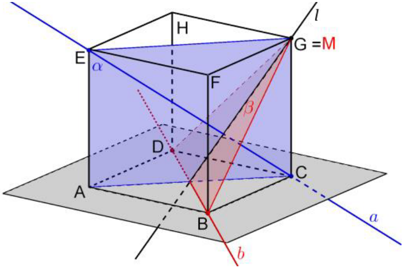
Zostrojíme roviny $\alpha = \overleftrightarrow{aM}$ a $\beta = \overleftrightarrow{bM}$.

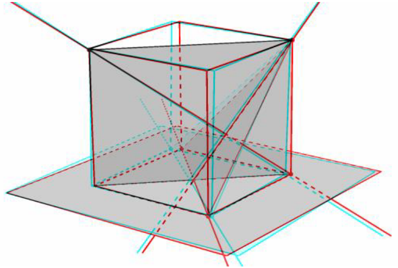


Obr. 17: Rovina $\alpha = \overleftrightarrow{ECG}$, pričom ju môžeme reprezentovať obdĺžnikom $EACG$. Rovinu $\beta = \overleftrightarrow{BDG}$ budeme reprezentovať príslušným trojuholníkom určujúcich bodov.

Krok č. 3

Určíme priamku $l = \alpha \cap \beta$.



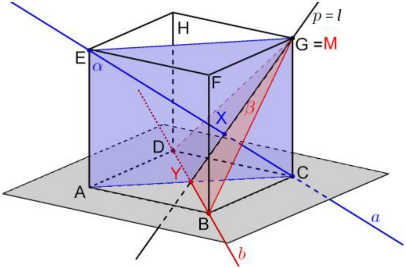


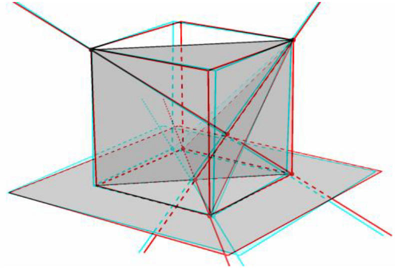
Obr. 18: Na určenie priamky l potrebujeme dva jej body. Určíte $G \in l$. Druhý bod získame ako priesečník priamky $b \subset \beta$ s priamkou $\overleftrightarrow{AC} \subset \alpha$, ktoré ležia v spoločnej rovine $\overleftrightarrow{ABCD}$.

Príklad použitia algoritmu na hľadanie priečky mimobežiek

Krok č. 4, č. 5 a č. 6

Nájdeme priesečníky $X = a \cap l$ a $Y = b \cap l$. Ak oba existujú, hľadaná priečka $p = \overleftrightarrow{XY}$.





Obr. 19: Na obrázku vidíme, že priamky a a l sa pretínajú. Voľné rovnobežné premietanie zachováva rovnobežnosť, takže buď $a \not\parallel l$ alebo $a \backslash l$. Keďže $a \cup l \subset \alpha$, priamky sú rôznobežné a bod $X = l \cap a$ naozaj existuje. Podobne je to s priamkami $b \cup p \subset \beta$ a bodom Y.

Priečka dvoch mimobežiek rovnobežná s danou priamkou

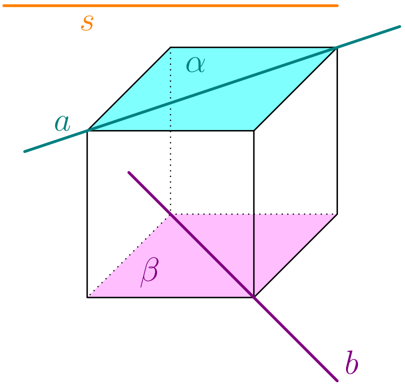
ÚLOHA

Zostrojte priečku mimobežných priamok a a b, ktorá je rovnobežná s priamkou s.
Platí, že $s \nparallel a$, $s \nparallel b$.

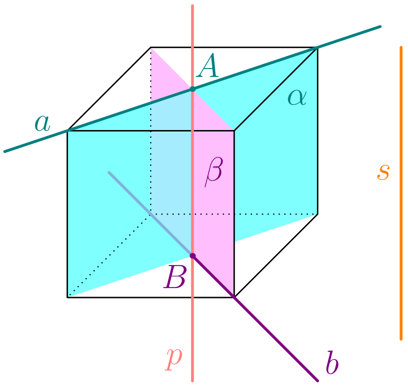
ROZBOR

- zostrojme rovinu $\alpha,\ a \subset \alpha,\ s \parallel \alpha$ (pomocná priamka $s',\ s' \parallel s,\ a \cup s' \subset \alpha$)
- zostrojme rovinu $\beta,\ b \subset \beta,\ s \parallel \beta$ (pomocná priamka $s'',\ s'' \parallel s,\ b \cup s'' \subset \beta$)
- určite $\alpha \neq \beta$, lebo $a \neq b$
- ak **existuje** priečka p s požadovanými vlastnosťami, tak
  - $p \subset \alpha$, lebo $p \nparallel a$ a $p \parallel s$
  - podobne aj $p \subset \beta$, lebo $p \nparallel b$ a $p \parallel s$
  - odtiaľ dostávame, že $p \subset \alpha \cap \beta$ a keďže $\alpha \neq \beta$, tak $p = \alpha \cap \beta$
- v prípade, že $\alpha \cap \beta = \emptyset$, priečka p **neexistuje**

Príklady (ne)existencie priečky dvoch mimobežiek



Obr. 20: Priečka mimobežiek a, b rovnobežná s priamkou s neexistuje, pretože $\alpha \parallel \beta$.



Obr. 21: Priečka mimobežiek a, b rovnobežná s priamkou s existuje, pretože $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$.

Priečka dvoch mimobežiek rovnobežná s danou priamkou

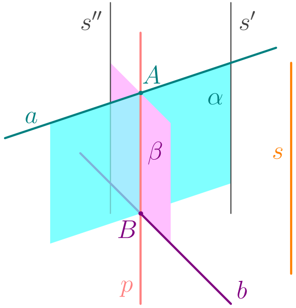
KONŠTRUKČNÝ ALGORITMUS

Zostrojte priečku mimobežných priamok a a b, ktorá je rovnobežná s priamkou s.

DANÉ
- $a, b \in \mathscr{P},\ s \in \mathscr{P},\ s \nparallel a, s \nparallel b$

POSTUP
- $\alpha \in \mathscr{R}:\ a \subset \alpha, s' \subset \alpha, s' \parallel s$
- $\beta \in \mathscr{R}:\ b \subset \beta, s'' \subset \beta, s'' \parallel s$
- $p \in \mathscr{P}:\ p = \alpha \cap \beta$
- $A, B \in \mathscr{B}:\ A = a \cap p,\ B = b \cap p$

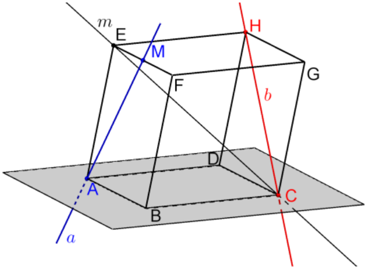
VÝSTUP
- p

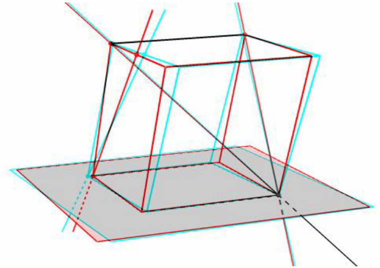


Obr. 22: Konštrukcia priečky p rovnobežnej s priamkou s.

ÚLOHA

Daný je rovnobežnosten $ABCDEFGH$. Majme priamku $a = \overleftrightarrow{AM}$, kde $M = S(E, F)$, a priamku $b = \overleftrightarrow{CH}$. Zostrojte priečku priamok a a b, ktorá je rovnobežná s priamkou $m = CE$.

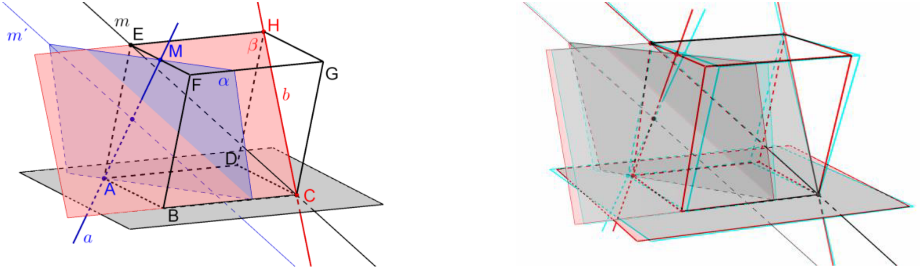




Obr. 23: Náčrt zadania.

Krok č. 1 a č. 2

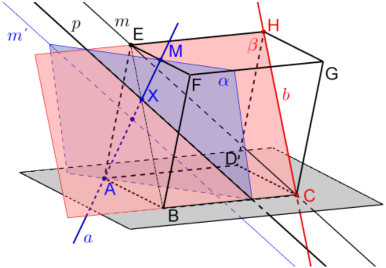
Zostrojíme rovinu $\alpha,\ a \subset \alpha,\ m \parallel \alpha$ a rovinu $\beta,\ b \subset \beta,\ m \parallel \beta$.

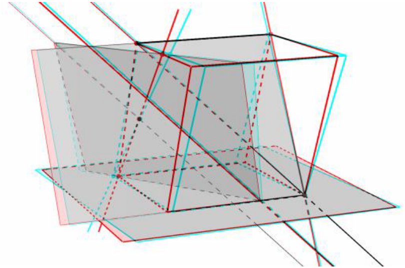


Obr. 24: Zostrojíme rovinu $\alpha = \overleftrightarrow{am'}$, kde pomocná priamka $m' \parallel m$. Rovina $\beta = \overleftrightarrow{bm}$, nakoľko priamky b, m majú spoločný bod C.

Krok č. 3

Zostrojíme priamku $p = \alpha \cap \beta$.

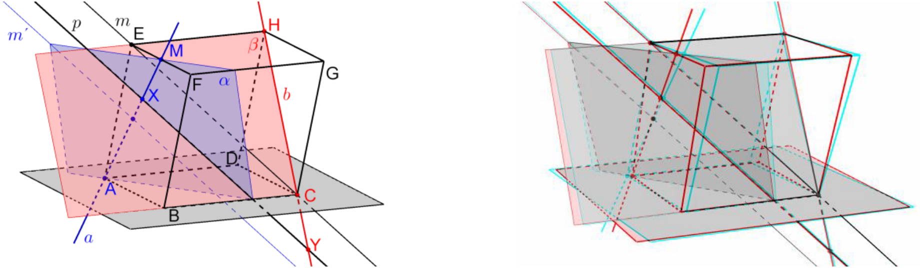




Obr. 25: Na zostrojenie priamky p budeme potrebovať jej bod a smer. Smer nám určí priamka m, pretože $p \parallel m$. Teraz určíme jej bod $X = a \cap p = a \cap (\alpha \cap \beta) = (a \cap \alpha) \cap \beta = a \cap \beta$. Priamka a leží v rovine $\overleftrightarrow{ABEF}$. Rovina β pretína túto rovinu v priamke $\overleftrightarrow{BE}$. Teda $a \cap \beta = a \cap \overleftrightarrow{BE} = X$.

Krok č. 4 a č. 5

Určíme priesečníky X, Y priečky p s priamkami a, b.



Obr. 26: Bod X sme už určili pri hľadaní priamky p. Bod $Y = p \cap b$.

Zoznam použitých obrázkov

- obr. 1, 3, 13 – 15, 20 – 22: Pokorná B.
- obr. 2a) – 2e): https://conceptdraw.com/a1942c3/preview/640
- obr. 4, 7 – 12, 16 – 19, 23 – 26: Hansmanová D., *Vizualizácia stereometrie pomocou anaglyfov*, 2019
- obr. 5, 6: Klenková P., *Stereometria*, 2006