Metrické vzťahy základných geometrických útvarov

Geometria (3)

Barbora Pokorná

KAG, FMFI UK

2020

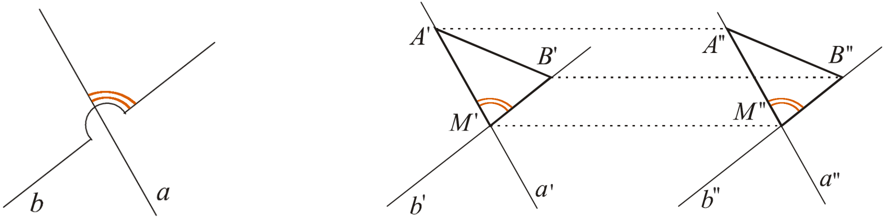
Metrické úlohy

- musíme rozšíriť definíciu uhla dvoch priamok pre mimobežné priamky
- definujeme kritériá kolmosti základných geometrických útvarov (kolmosť dvoch priamok, priamky a roviny a dvojice rovín)
- definujeme vzdialenosť dvoch geometrických útvarov

Nezávislosť veľkosti uhla

TVRDENIE

Nech sú a, b dve ľubovoľné mimobežky a M', M'' dva body ($M' \neq M''$). Ak zostrojíme dvojice priamok a', b' a a'', b'' tak, aby $M' \in a' \cap b'$, $M'' = a'' \cap b''$ a zároveň $a' \parallel a'' \parallel a$, $b' \parallel b'' \parallel b$. Potom platí, že $\measuredangle a'b' \cong \measuredangle a''b''$.



Obr. 1: Uhol priamok $a'b'$ je rovnaký ako uhol priamok $a''b''$.

Definícia uhla dvoch priamok

- Uhlom priamok a, b nazývame uhol ľubovoľných nedisjunktných priamok a', b', pre ktoré platí, že priamky $a' \parallel a$, $b' \parallel b$.

  $$\measuredangle ab \cong \measuredangle a'b',\ a' \cap b' = \{X\},\ a' \parallel a,\ b' \parallel b$$

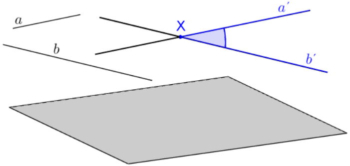
  Uhlom dvoch rovnobežiek je nulový uhol.

- Priamky a, b voláme kolmé, ak ich uhol je pravý.

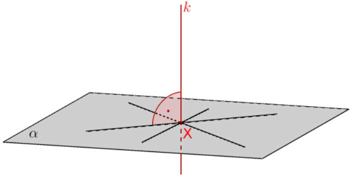
  $$\measuredangle ab = 90^\circ$$

- Priamka kolmá na rovinu (alebo aj kolmica na rovinu) je priamka kolmá na všetky priamky roviny.

  $$k \perp \alpha \ \Leftrightarrow\ \forall x \subset \alpha : k \perp x$$



Obr. 2: $\measuredangle ab \cong \measuredangle a'b'$

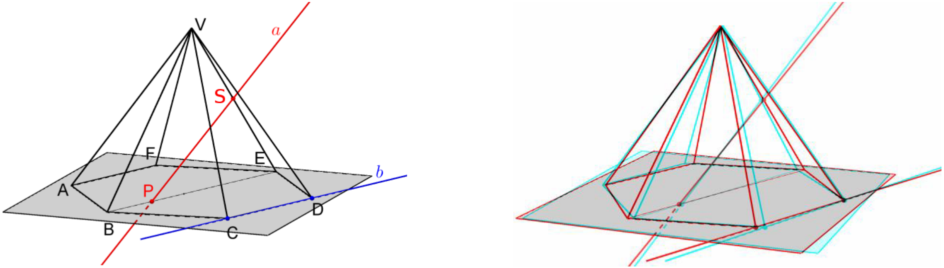


Obr. 3: $k \perp \alpha$

Príklad na určenie uhla dvoch priamok

ÚLOHA

Daný je pravidelný šesťboký ihlan $ABCDEFV$. Určte uhol priamok a a b, ak $b = \overleftrightarrow{CD}$ a $a = \overleftrightarrow{PS}$ pre $(BEP) = -\frac{1}{3}$ a $(VES) = -1$.

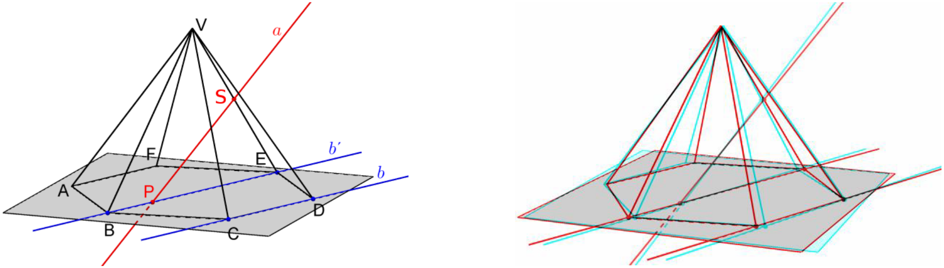


Obr. 4: Náčrt zadania.

Príklad na určenie uhla dvoch priamok

Krok č. 1

Nájdeme rôznobežky a', b' také, že $a \parallel a'$, $b \parallel b'$.

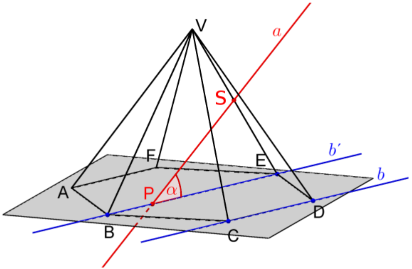


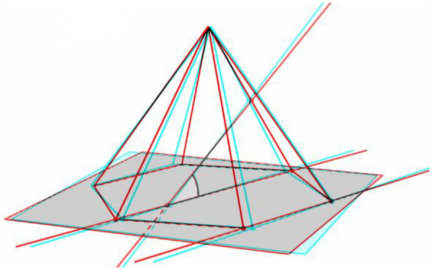
Obr. 5: Výhodné bude zostrojiť priamku b' tak, že navyše $P \in b'$, pretože potom môže byť $a = a'$.

Príklad na určenie uhla dvoch priamok

Krok č. 2

Určíme uhol priamok a, b.





Obr. 6: Platí, že $\measuredangle ab \cong \measuredangle ab'$.

Kritérium kolmosti priamky na rovinu

VETA

Priamka je kolmá na rovinu práve vtedy, keď je kolmá na dve rôznobežky tejto roviny.

$$k \perp \alpha \Leftrightarrow k \perp a,\ k \perp b,\ a \cup b \subset \alpha,\ a \cap b = \{P\}$$

DÔKAZ

Urobíme ho v dvoch krokoch:

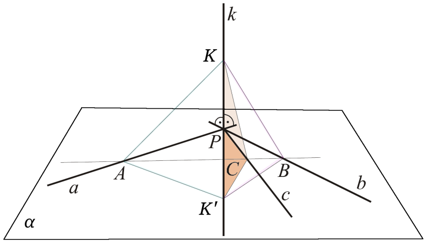
1. nutná podmienka

$$k \perp \alpha \ \Rightarrow\ k \perp b,\ a \cup b \subset \alpha,\ a \cap b = \{P\}$$

2. postačujúca podmienka

$$k \perp b,\ a \cup b \subset \alpha,\ a \cap b = \{P\} \ \Rightarrow\ k \perp \alpha$$

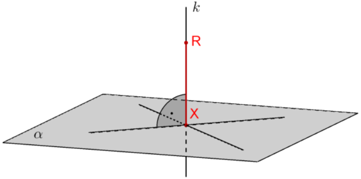
*dôkaz podrobne vypracovaný v odporúčanej literatúre *Klenková, P.: Stereometria, str. 47–48*



Obr. 7: Ukážeme, že ak k je kolmá na a, b, tak je kolmá na ľubovoľnú priamku $c \subset \alpha$.

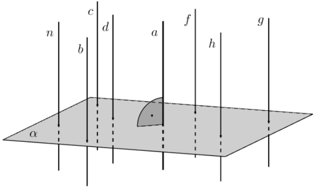
Dôsledky kritéria kolmosti priamky a roviny

- Existuje jediná priamka prechádzajúca daným bodom a kolmá na danú rovinu.



Obr. 8: $\exists!\; k \perp \alpha,\; R \in k$

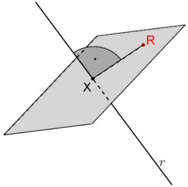
- Všetky priamky kolmé na tú istú rovinu sú rovnobežné.



Obr. 9: $a, b, c \perp \alpha \Rightarrow a \parallel b \parallel c$

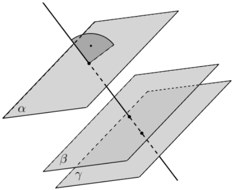
Dôsledky kritéria kolmosti priamky a roviny

- Existuje jediná rovina prechádzajúca daným bodom a kolmá na danú priamku.



Obr. 10: $\exists!\ \alpha \perp r,\ R \in r$

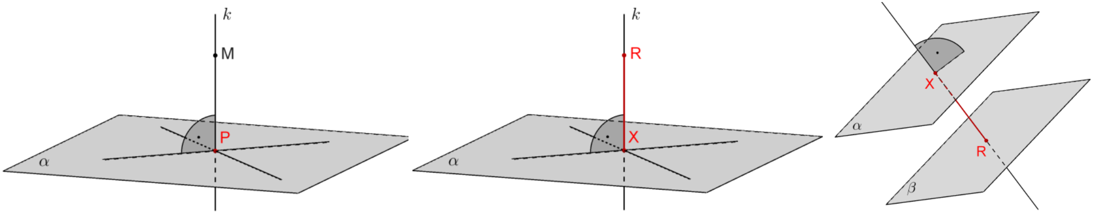
- Všetky roviny kolmé na tú istú priamku sú rovnobežné.



Obr. 11: $\alpha, \beta, \gamma \perp r \Rightarrow \alpha \parallel \beta \parallel \gamma$

Definície vzdialenosti dvoch geometrických útvarov

- Päta kolmice z bodu na rovinu je priesečník kolmice a roviny.
- Vzdialenosť bodu od roviny je dĺžka úsečky RX, kde bod X je päta kolmice z bodu R na rovinu.
- Vzdialenosť rovnobežných rovín je vzdialenosť ľubovoľného bodu jednej z rovín od druhej roviny.



(a) bod P je päta kolmice k (b) $|R\alpha| = |RX|$ (c) $|\alpha\beta| = |RX|$

Obr. 12: Vzdialenosti geometrických útvarov.

Kolmý priemet priamky do roviny

- TVRDENIE: Priamkou, ktorá nie je kolmá na danú rovinu, prechádza práve jedna rovina kolmá na danú rovinu.

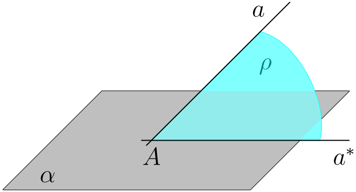
  $$a \not\perp \alpha \;\Rightarrow\; \exists!\, \rho \perp \alpha,\; a \subset \rho$$

- Kolmo premietacia rovina priamky je rovina incidujúca s priamkou a kolmá na danú rovinu.

  $$\rho\colon\; a \subset \alpha,\; \rho \perp \alpha$$

- Kolmý priemet priamky do roviny je priesečnica kolmo premietacej roviny priamky a danej roviny.

  $$a^* = \rho \cap \alpha$$



Obr. 13: Priamka a^* je kolmým priemetom priamky a do roviny α.

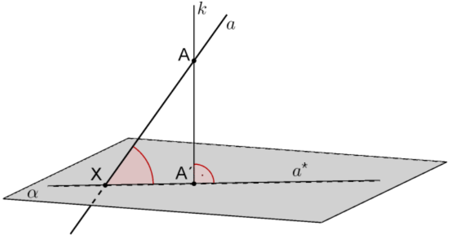
Uhol priamky a roviny

- Uhol priamky s rovinou je uhol priamky a jej kolmého priemetu do roviny.

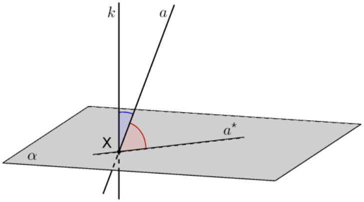
  $\measuredangle a\alpha = \measuredangle aa^*$

  Uhol priamky s rovinou je pravý, ak je priamka kolmá na rovinu.

  $a \perp \alpha \Rightarrow \measuredangle a\alpha = 90°$



Obr. 14: Definícia uhla priamky a roviny.



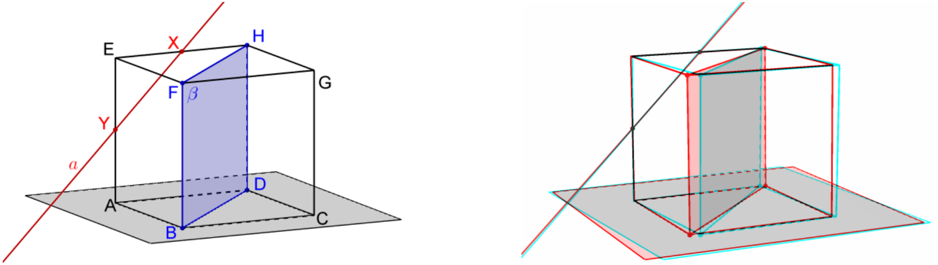
Obr. 15: DÔSLEDOK Uhol priamky s rovinou je zhodný s doplnkovým uhlom k uhlu priamky s kolmicou na rovinu.

$\measuredangle a\alpha = 90° - \measuredangle ak,\ k \perp \alpha$

Príklad na určenie uhla priamky a roviny

ÚLOHA

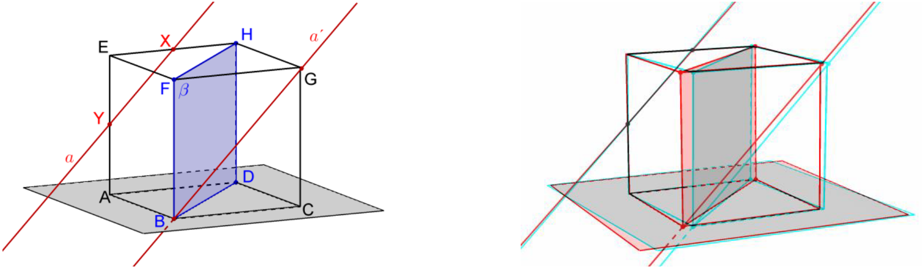
Daná je kocka $ABCDEFGH$. Určte uhol priamky a a roviny β, ak rovina je určená ako $\beta = \overleftrightarrow{BDHF}$ a priamka $a = \overleftrightarrow{XY}$ pre $(AEY) = -1$ a $(EHX) = -1$.



Obr. 16: Náčrt zadania.

Krok č. 1

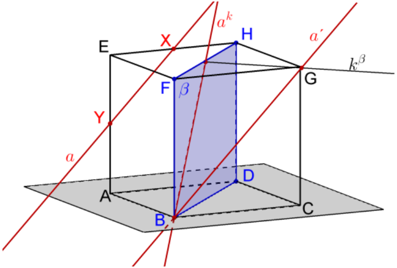
Na to, aby sme zistili uhol priamky a s rovinou β, môžeme skúmať aj ľubovoľnú priamku, ktorá je s a rovnobežná, ale má pre nás „výhodnejšiu“ polohu.

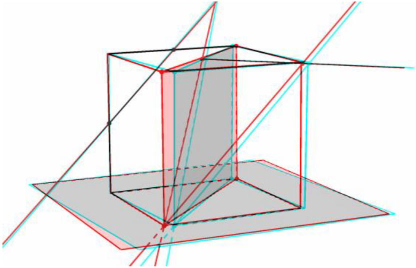


Obr. 17: Zostrojíme priamku a' takú, že $a \parallel a'$ a $a' \cap \beta = \{B\}$. Pre túto priamku sa nám totiž bude ľahšie hľadať jej priemet do roviny β. Platí, že $|a\beta| = |a'\beta|$.

Krok č. 2

Zostrojíme kolmý priemet priamky a' do roviny β.

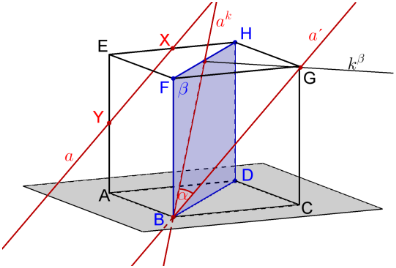


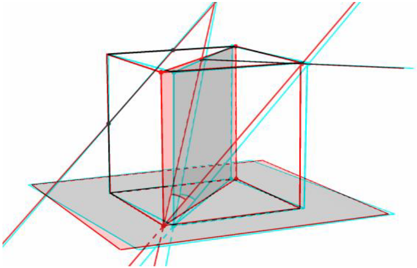


Obr. 18: Zostrojíme pomocnú rovinu ρ, určenú rôznobežkami a' a k^β, kde k^β je kolmica na rovinu β prechádzajúca bodom G. Kolmý priemet priamky a' do roviny β je potom priamka $a^k = \beta \cap \rho$.

Krok č. 3

Určíme uhol priamky a a roviny β.





Obr. 19: Platí, že $|a\beta| = |a'\beta| = |a'a^k| = \alpha$.

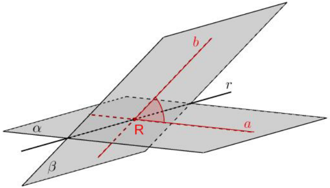
Uhol dvoch rovín

- Uhol rôznobežných rovín α, β je uhol priamok a, b, pre ktoré platí $a \subset \alpha, b \subset \beta, a \perp \alpha \cap \beta, b \perp \alpha \cap \beta$.

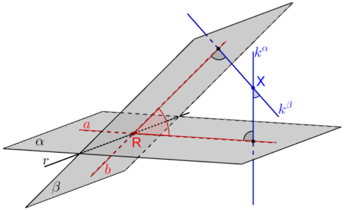
  Uhlom dvoch rovnobežných rovín je nulový uhol.

- Roviny α, β sú kolmé, ak je ich uhol pravý.

- DÔSLEDOK Uhol dvoch rovín je zhodný s uhlom kolmíc na tieto roviny.
  $\measuredangle \alpha\beta = \measuredangle k^\alpha k^\beta, k^\alpha \subset \alpha,\ k^\beta \subset \beta$



Obr. 20: $\measuredangle \alpha\beta = \measuredangle ab$



Obr. 21: $\measuredangle \alpha\beta = \measuredangle k^\alpha k^\beta$

Kritérium kolmosti dvoch rovín

VETA

Dve roviny sú kolmé práve vtedy, ak jedna z nich obsahuje priamku kolmú na druhú rovinu.

$$\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \exists\, a \subset \alpha, a \perp \beta$$

DÔKAZ

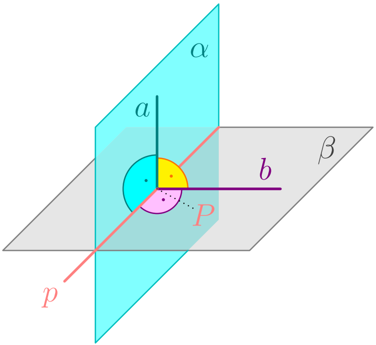
Urobíme ho v dvoch krokoch:

1. nutná podmienka

$$\alpha \perp \beta \Rightarrow \exists\, a \subset \alpha, a \perp \beta$$

2. postačujúca podmienka

$$a \subset \alpha, a \perp \beta \Rightarrow \alpha \perp \beta$$



Obr. 22: Vidíme, že $\exists\, a \subset \alpha, a \perp \beta$.

Priemet pravého uhla

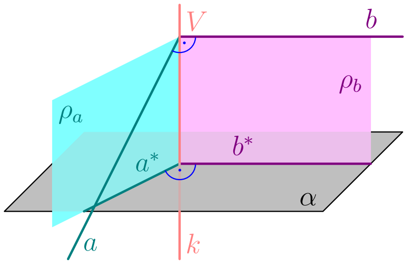
VETA o priemete pravého uhla

Kolmým priemetom dvoch kolmých priamok do roviny sú kolmé priamky, ak aspoň jedna z priamok je rovnobežná s rovinou a druhá nie je na rovinu kolmá.

$$a \perp b,\ \ b \parallel \alpha \ \Rightarrow \ a^* \perp b^*$$

DÔKAZ

- označme k kolmicu na rovinu α, t.j. $k \perp \alpha$
- nech ρ_b, ρ_a sú kolmo premietacie roviny $\rho_b = \overleftrightarrow{bk}$, $\rho_a = \overleftrightarrow{ak}$
- nech $b^* = \rho_b \cap \alpha$ a $a^* = \rho_a \cap \alpha$
- platí, že $b \parallel \alpha \Rightarrow b \parallel b^*$, keďže $b^* \subset \alpha$
- keďže $a \perp b \ \wedge \ b \parallel b^* \ \Rightarrow \ a \perp b^*$
- platí, že $k \perp \alpha \ \Rightarrow \ k \perp b^*,\ b^* \subset \alpha$
- $a \perp b^* \ \wedge \ k \perp b^* \ \Rightarrow \ b^* \perp \rho_a \ \Rightarrow \ b^* \perp a^*$

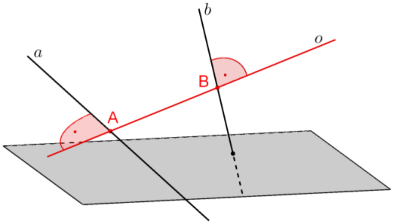


Obr. 23: Platí $a^* \perp b^*$.

Os mimobežiek

Os mimobežiek nazývame takú priečku priamok, ktorá je kolmá na obe mimobežky.

Vzdialenosť mimobežiek je dĺžka úsečky, ktorú na osi obe mimobežky vytínajú.



Obr. 24: Vzdialenosť mimobežiek a, b je $|ab| = |AB|$.

Kritérium rovnobežnosti priamky a roviny

KONŠTRUKČNÝ ALGORITMUS

Zostrojte os dvoch mimobežiek.

DANÉ
- $a, b \in \mathscr{P},\ a \backslash b$

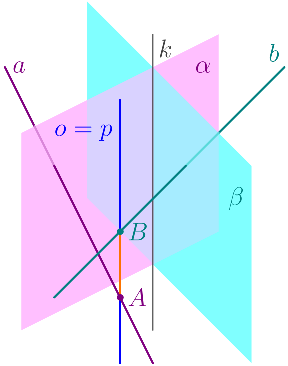
POSTUP
- $\alpha \in \mathscr{R},\ \alpha \perp a$
- $\beta \in \mathscr{R},\ \beta \perp b$
- $k \in \mathscr{P},\ k = \alpha \cap \beta$
- if $(k \times a\ \wedge\ k \times b)$ return k

  else $p \in \mathscr{P}$, p - ***priečka***, $p \parallel k$

  return p

VÝSTUP
- $o, (o = k\ \vee\ o = p)$

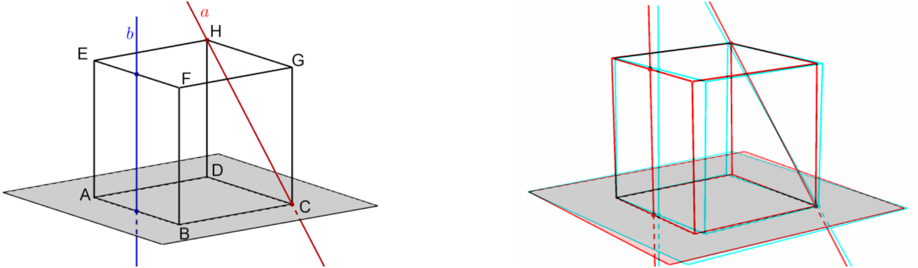
*symbol „×" znamená „rôznobežné"



Obr. 25: Osou mimobežiek a, b je priamka p, ich vzdialenosť je určená veľkosťou úsečky A, B.

ÚLOHA

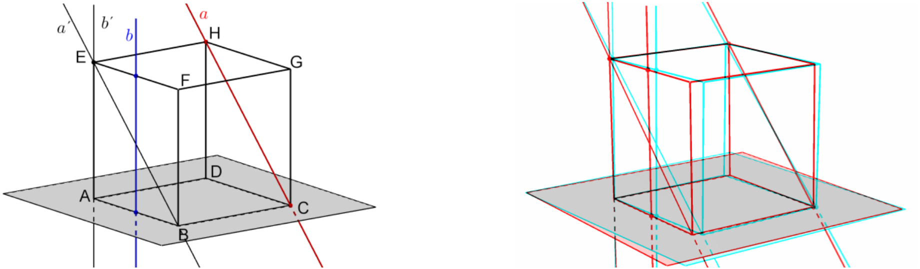
Daná je kocka $ABCDEFGH$. Určte vzdialenosť mimobežiek a, b, ak priamka $a = \overleftrightarrow{CH}$ a priamka b prechádza stredmi strán AB a EF.



Obr. 26: Náčrt zadania.

Krok č. 1

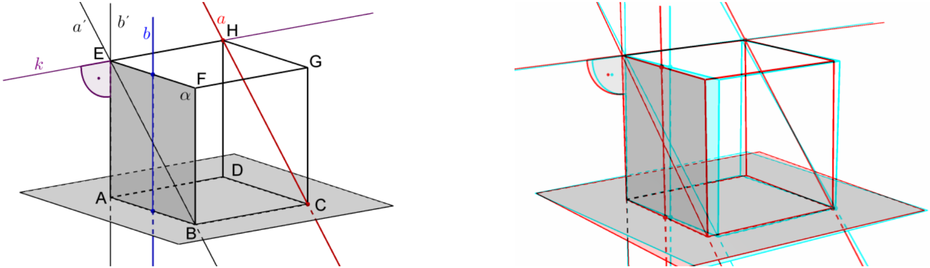
Z uvedeného Konštrukčného algoritmu vyplýva, že $k \perp a \ \wedge \ k \perp b$. Z toho vyplýva, že k je kolmá na rovinu určenú rôznobežkami a', b' takými, že $a' \parallel a, \ b' \parallel b$.



Obr. 27: Za spoločný bod rôznobežiek a', b' zvolíme bod E, potom je už konštrukcia jednoznačná.

Krok č. 2

Zostrojíme priamku k, ktorá bude buď hľadanou osou alebo nám aspoň určí smer hľadanej osi.

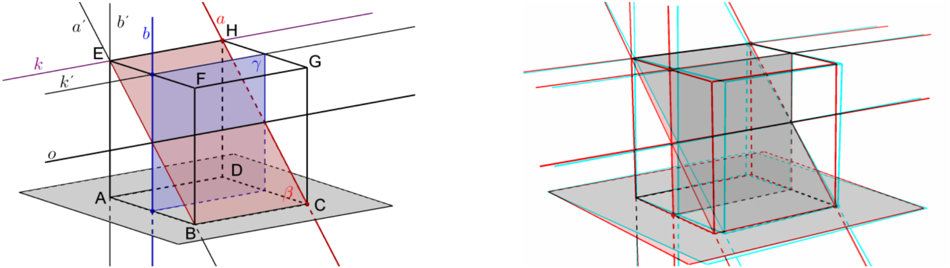


Obr. 28: Priamka k má byť kolmá na rovinu $\overleftrightarrow{a'b'} = \overleftrightarrow{ABE}$. Takých priamok je nekonečne veľa. My vyberieme tú, ktorá prechádza bodom E, čiže $\overleftrightarrow{EH}$. Rovnako ale môžeme vybrať aj $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AD}$, atď.

Príklad konštrukcie osi dvoch mimobežiek a určenie ich vzdialenosti

Krok č. 3

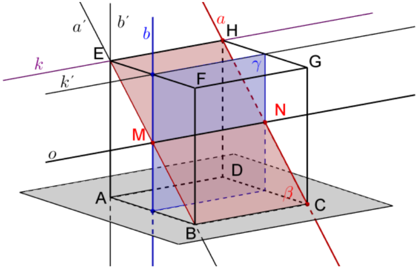
Vidíme, že $k \times a$, ale nie s b. Platí, že $k \backslash b$, a teda musíme hľadať priečku mimobežiek a, b rovnobežnú s k.

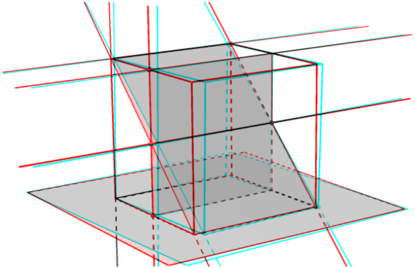


Obr. 29: Postupujeme podľa algoritmu uvedeného v časti „Polohové úlohy“. Zostrojíme roviny β, γ také, že β je určná priamkou a a „smerom“ priamky k, rovina γ priamkou b a „smerom“ priamky k. Os $o = \beta \cap \gamma$.

Krok č. 4

Na určenie vzdialenosti mimobežiek a, b potrebujeme nájsť ich priesečníky s osou o.





Obr. 30: Priesečník priamok o, b môžeme hľadať, lebo obe ležia v rovine γ. Bod $M = o \cap b$. Podobne pre priamky $o, a \subset \beta$, bod $N = o \cap a$. Vzdialenosť mimobežiek $|ab| = |MN|$.

Zoznam použitých obrázkov

- obr. 1, 7: Klenková P., *Stereometria*, 2006
- obr. 2 – 6, 8 – 12, 14 – 21, 24, 26 – 30: Hansmanová D., *Vizualizácia stereometrie pomocou anaglyfov*, 2019
- obr. 13, 22, 23, 25: Pokorná B.