

Mnohosteny

Geometria (3)

Barbora Pokorná

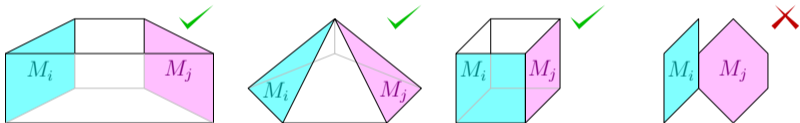
KAG, FMFI UK

2020

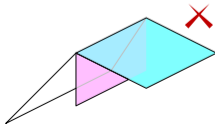
Definícia mnohostenovej plochy

Mnohostenová plocha M je zjednotenie konečného počtu mnohouholníkov $M_i \subset \mathbb{E}^3$, ktoré spĺňa podmienky:

- (a) prienik ľubovoľných dvoch mnohouholníkov je buď prázdna množina, spoločný vrchol alebo spoločná strana daných mnohouholníkov

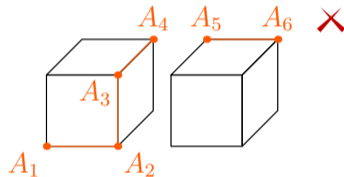
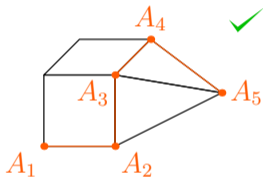


- (b) každá strana ľubovoľného mnohouholníka je stranou nanajvyš ešte jedného mnohouholníka z M

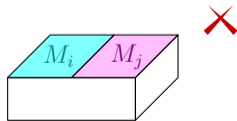
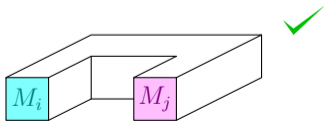


Definícia mnohostenovej plochy

- (c) (súvislosť) existuje lomená čiara A_1, \dots, A_n , ktorej začiatok A_1 a koniec A_n sú dva ľubovoľne zvolené vrcholy dvoch mnohouholníkov z M a každá jej strana $A_i A_j$ je stranou niektorého mnohouholníka z M

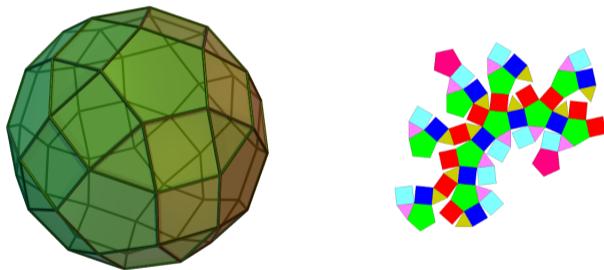


- (d) žiadne dva mnohouholníky s neprázdny prienikom neležia v jednej rovine



Prvky mnohostenovej plochy

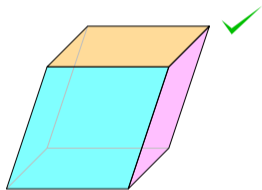
- **vrcholy** mnohostenovej plochy sú vrcholy mnohouholníkov M_i
- **hrany** mnohostenovej plochy sú strany mnohouholníkov M_i
- **steny** mnohostenovej plochy sú mnohouholníky M_i (aj ich vnútra)



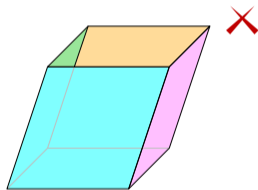
Obr. 1: Táto mnohostenová plocha $M = \bigcup_{i=62} M_i$. Tvorí ju 20 trojuholníkov, 30 štvorcov a 12 päťholníkov (vľavo je rozklad tvoriacich mnohouholníkov do roviny). Obsahuje 60 vrcholov a 120 hrán. Ako uvidíme neskôr, táto mnohostenová plocha je zároveň aj mnohostenom.

Uzavretá mnohostenová plocha

- Hovoríme, že mnohostenová plocha je **uzavretá**, ak každá jej **hrana je prienikom práve dvoch jej stien**.
- Uzavretá mnohostenová plocha delí priestor na dve oblasti, **vonkajšiu a vnútornú**.



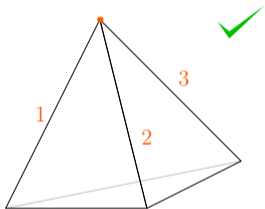
(a) Hranol je uzavretá mnohostenová plocha. Každá jeho hrana je prienikom práve dvoch stien. Vieme určiť vnútro hranola.



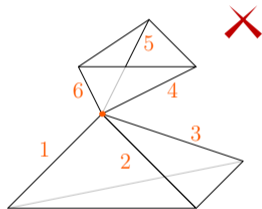
(b) Hranolová plocha nie je uzavretá mnohostenová plocha. Ako vidíme na obrázku, „vrchné“ hrany patria len jednej stene. Táto plocha nemá vnútro.

Jednoduchá mnohostenová plocha

- Hovoríme, že mnohostenová plocha je **jednoduchá**, ak hrany vychádzajúce z ľubovoľného vrcholu **možno usporiadať** do postupnosti tak, že **po sebe nasledujúce hrany sú stranami jednej steny**.



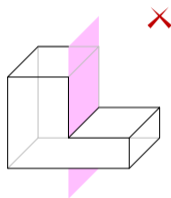
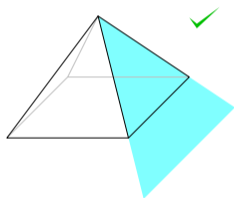
(a) Táto mnohostenová plocha je jednoduchá. V každom vrchole vieme usporiadať hrany tak, že hrany 1, 2 patria stene S_1 , hrany 2, 3 patria stene S_2 a hrany 3, 1 patria stene S_3 .



(b) Táto mnohostenová plocha nie je jednoduchá. V označenom vrchole nevieme usporiadať hrany 1, \dots , 6, tak, aby každé dve po sebe idúce boli súčasťou tej istej steny. „Spodná“ trojica hrán totiž s „vrchnou“ trojicou hrán nie je prepojená žiadnou stenou.

Definícia mnohostena

- **Mnohosten** je **jednoduchá uzavretá** mnohostenová plocha.
- **Konvexný mnohosten** – mnohosten, ktorý leží v jednom polpriestore určenom hraničnou rovinou incidujúcou so stenou mnohostena (toto spĺňa každá stena).

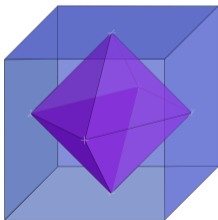


- **Pravidelný mnohosten** – konvexný mnohosten, ktorého všetky steny sú **zhodné pravidelné** mnohouholníky.
- **Polopravidelný mnohosten** – konvexný mnohosten, ktorého všetky steny sú **pravidelné** mnohouholníky.

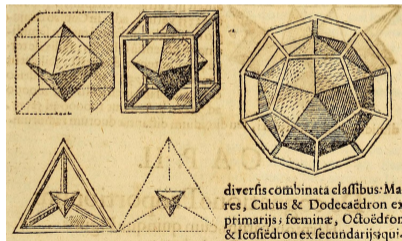
Duálny mnohosten

Majme mnohosten M . K nemu **duálny mnohosten** M_d je taký, že

- **vrcholy** mnohostena M **odpovedajú stenám** mnohostena M_d (a naopak),
- každá **hrana medzi dvojicou vrcholov** mnohostena M **odpovedá spoločnej hrane príslušnej dvojice stien** mnohostena M_d (a naopak).



Obr. 4: Ku kocke je duálnym mnohostenom osemsten a naopak.



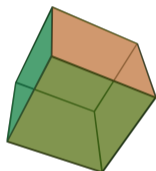
Obr. 5: Duálne mnohosteny k platónovským telesám. Ilustrácia z knihy *Johannes Kepler: Harmónia svetov*, 1619

Platónovské telesá

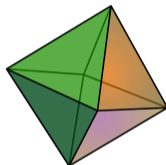
- **pravidelné** mnohosteny, u ktorých sa v každom vrchole stretáva **rovnaký počet stien**
- existuje **päť** platónovských telies



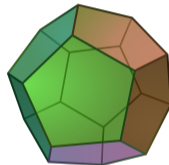
(a) štvorsten



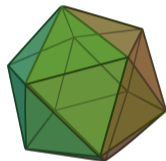
(b) kocka



(c) osemsten



(d) dvanásťsten



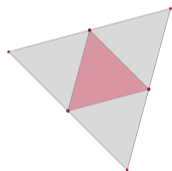
(e) dvadsaťsten

Obr. 6: Tieto mnohosteny nazývame **platónovské telesá**, príp. **veľká päťka**.

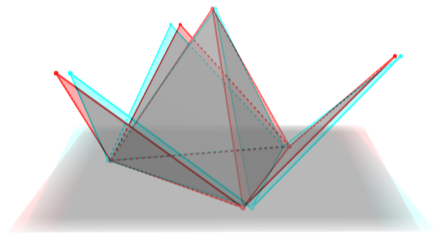
- boli známe už matematikom v antickom Grécku
- ako prvý tieto telesá **opísal Platón**
- **Euklides** vo svojom diele *Základy* dokázal, že iné pravidelné mnohosteny nemôžu existovať

Štvorsten

- základný mnohouholník: rovnostranný trojuholník
- steny: 4
vrcholy: 4
hrany: 6
- sieť:



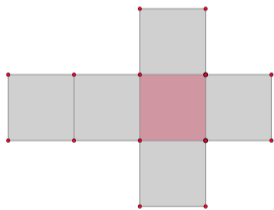
- vrcholové zoskupenie: 3,3,3
(okolo každého vrchola sú zoskupené 3 trojuholníky)
- duálny mnohosten: štvorsten



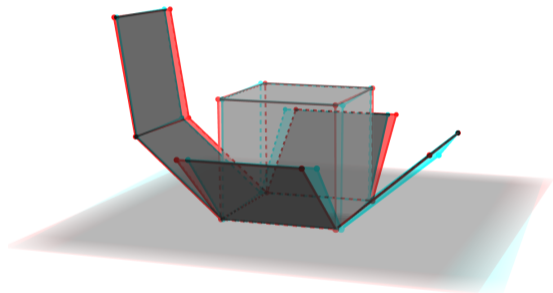
Obr. 7: Štvorsten nazývame aj **tetraeder**.

Kocka

- základný mnohouholník: štvorec
- steny: 6
vrcholy: 8
hrany: 12
- sieť:



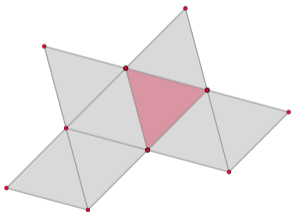
- vrcholové zoskupenie: 4,4,4
- duálny mnohosten: osemsten



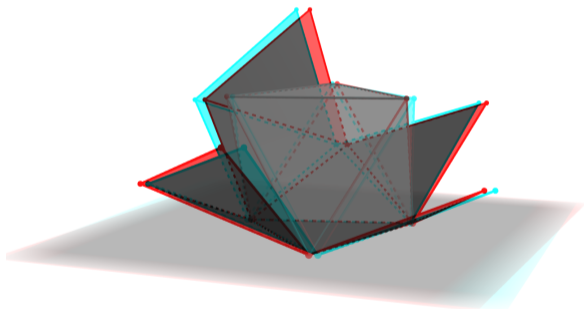
Obr. 8: Kocku nazývame aj **hexaeder**.

Osemsten

- základný m.: rovnostranný trojuholník
- steny: 8
vrcholy: 6
hrany: 12
- sieť:



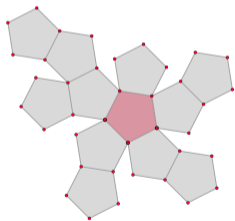
- vrcholové zoskupenie: 3,3,3,3
- duálny mnohosten: kocka



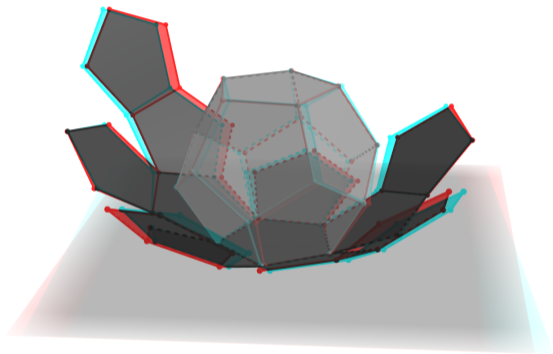
Obr. 9: Osemsten nazývame aj **octaeder**.

Dvanásťsten

- základný m.: pravidelný päťuholník
- steny: 12
vrcholy: 20
hrany: 30
- sieť:



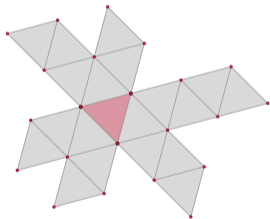
- vrcholové zoskupenie: 5,5,5
- duálny mnohosten: dvadsaťsten



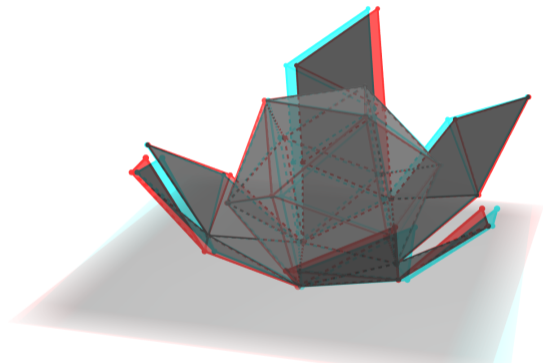
Obr. 10: Dvanásťsten nazývame aj **dodekaeder**.

Dvadsaťsten

- základný m.: rovnostranný trojuholník
- steny: 20
vrcholy: 12
hrany: 30
- sieť:



- vrcholové zoskupenie: 3,3,3,3,3
- duálny mnohosten: dvanásťsten



Obr. 11: Dvadsaťsten nazývame aj **ikosaeder**.

Euklidov dôkaz o počte platónovských telies

VETA

Existuje práve päť platónovských telies.

DÔKAZ podľa Euklida

- **vrchol** konvexného mnohostena získame ako **prienik minimálne troch stien**
- **súčet uhlov** okolo vrchola musí byť **menší ako 2π** (lebo pri súčte uhlov 2π už steny ležia v jednej rovine)

- uvažujme postupne pravidelné n -uholníky, kde $n \geq 3$

pre $n = 3$ $3 \cdot 60^\circ = 180^\circ$ **tetraeder**

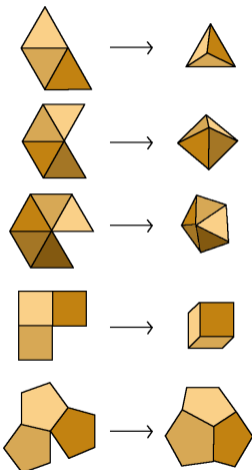
$4 \cdot 60^\circ = 240^\circ$ **oktaeder**

$5 \cdot 60^\circ = 300^\circ$ **ikosaeder**

pre $n = 4$ $3 \cdot 90^\circ = 270^\circ$ **hexaeder**

pre $n = 5$ $3 \cdot 108^\circ = 324^\circ$ **dodekaeder**

pre $n = 6$ $3 \cdot 120^\circ = 360^\circ$ **M neexistuje**



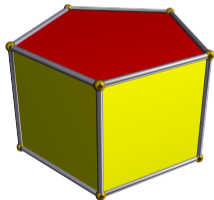
Obr. 12: Uhly okolo vrchola.

Vlastnosti platónovských telies

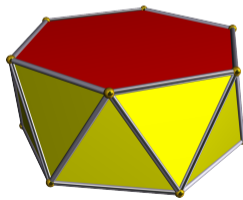
- Z každého vrcholu platónovského telesa vychádza rovnaký počet hrán aj stien.
- Uhlopriečky mnohostena sa pretínajú v strede mnohostena a majú zhodné dĺžky (okrem štvorstena).
- Platónovským mnohostenom možno opísať guľovú plochu so stredom v strede telesa a polomerom zhodným polovici dĺžky uhlopriečky.
Guľová plocha inciduje so všetkými vrcholmi mnohostena.
- Duálnym mnohostenom k platónovskému mnohostenu je opäť platónovský mnohosten.
- Guľová plocha vpísaná mnohostenu sa dotýka jeho stien práve v ich stredoch a teda je zároveň opísanou guľovou plochou duálneho mnohostena.

Prizmy a antiprizmy

- **Prizma** je pravidelný n -boký **hranol**, ktorého podstavami sú pravidelné n -boké mnohouholníky a stenami štvorce.
- **Antiprizma** je pravidelný $2n$ -boký **antihranol**, ktorého podstavami sú pravidelné n -boké mnohouholníky a stenami sú rovnostranné trojuholníky.
- Takýchto **polopravidelných** mnohostenov existuje nekonečne veľa a často v literatúre tvoria samostatné triedy.



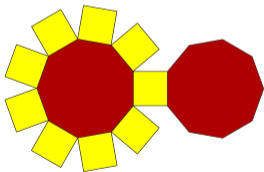
Obr. 13: Prizma pre $n = 5$.



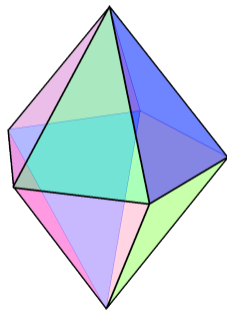
Obr. 14: Antiprizma pre $n = 6$.

Prizmy

- základné mnohouholníky:
pravidelný n -uholník, štvorec
- steny: $n + 2$
vrcholy: $2n$
hrany: $3n$
- sieť: (pre $n = 9$)



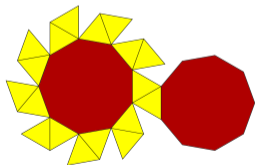
- vrcholové zoskupenie: $4, 4, n$
- duálny mnohosten: n -boký dvojihlan



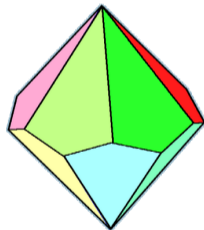
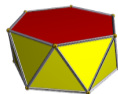
Obr. 15: Duálnym mnohostenom k 5-bokému hranolu je 5-boký dvojihlan.

Antiprizmy

- základné mnohouholníky:
pravidelný n -uholník, trojuholník
- steny: $2n + 2$
vrcholy: $2n$
hrany: $4n$
- sieť: (pre $n = 9$)



- vrcholové zoskupenie: $3,3,3,n$
- duálny mnohosten: $2n$ -boký trapezoeder







Obr. 16: Duálnym mnohostenom k 12-bokému antihranolu je 12-boký trapezoeder.

Archimedovské telesá




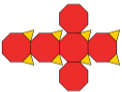
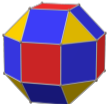
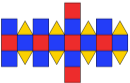
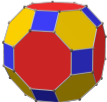
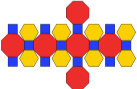
- **polopravidelné** mnohosteny, ktorých **vrcholy sú identické** (okrem Platónovských telies, priziem a antipriziem)
- mnohosten má **identické vrcholy**, ak ľubovoľné dva vrcholy sú navzájom symetrické a teda **existuje globálna izometria** celého mnohostenu, ktorá zobrazí jeden vrchol na druhý ponechajúc mnohosten v jeho začiatočnej polohe
- dôsledkom je, že tieto mnohosteny sú **vysoko symetrické**
- názov nesú po **Archimedovi zo Syrakúz**, ktorému sa pripisuje ich objav (písomná zmienka sa však nezachovala)
- zmienka o nich sa zachovala v diele **Pappa Alexandrijského**
- **existuje 13** archimedovských mnohostenov

Vlastnosti archimedovských telies $P_1 - P_2$

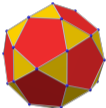
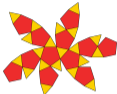
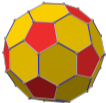
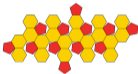
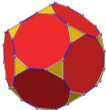
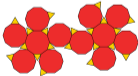
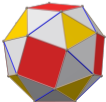
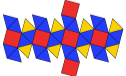
- v tabuľke je prehľad archimedovských mnohostenov a ich základné vlastnosti
- názvy vychádzajú z **latinských názvov Johanna Keplera**
- mnohosteny majú symbolické **označenie P_k** , kde hodnota k zodpovedá poradiu, v ktorom telesá uvádzal Pappos Alexandrijský
- označenie pre **počet vrcholov (V)**, **hrán (H)** a **stien (S)**, a **vrcholové zoskupenie (VZ)**

P_k	názov	model	sieť	V	H	S	VZ
P_1	otupený tetraeder			12	18	8	3, 6, 6
P_2	kubooktaeder			12	24	14	3, 4, 3, 4

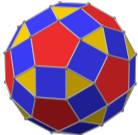
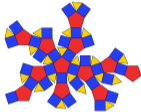
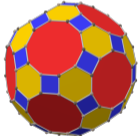
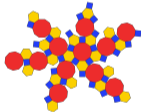
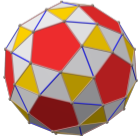
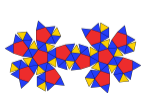
Vlastnosti archimedovských telies $P_3 - P_6$

P_k	názov	model	sieť	V	H	S	VZ
P_3	otupený oktaeder			24	36	14	4, 6, 6
P_4	otupený hexaeder			24	36	14	3, 8, 8
P_5	rombo kbooktaeder			24	48	26	3, 4, 4, 4
P_6	otupený kbooktaeder			48	72	26	4, 6, 8

Vlastnosti archimedovských telies $P_7 - P_{10}$

P_k	názov	model	sieť	V	H	S	VZ
P_7	ikosododekaeder			30	60	32	3, 5, 3, 5
P_8	otupený ikosaeder			60	90	32	5, 6, 6
P_9	otupený dodekaeder			60	90	32	3, 10, 10
P_{10}	obsekaný hexaeder			24	60	38	3, 3, 3, 3, 4

Vlastnosti archimedovských telies $P_{11} - P_{13}$

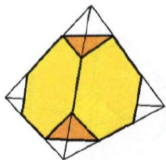
P_k	názov	model	sieť	V	H	S	VZ
P_{11}	rombo ikosododekaeder			60	120	62	3, 4, 5, 4
P_{12}	otupený ikosododekaeder			120	180	62	4, 6, 10
P_{13}	obsekaný dodekaeder			60	150	92	3, 3, 3, 3, 5

Odvodenie archimedovských telies z platónovských

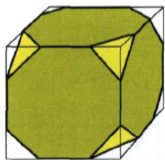
Všetky archimedovské telesá sa dajú **odvodiť z platónovských mnohostenov** jedným (alebo viacerými) z nasledujúcich piatich spôsobov.

- (a) **Odrezaním vrcholov** (v ktorých sa pretína m hrán) pravidelného mnohostenu **rovinami, ktoré skrátia každú hranu** tak, aby z pôvodných n -uholníkových stien zostali **pravidelné $2n$ -uholníkové steny** (pričom ich je rovnaký počet).

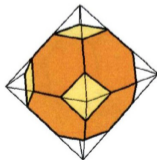
Namiesto každého vrcholu pravidelného mnohostenu vznikne **pravidelný m -uholník**.



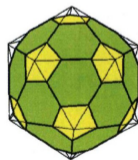
(a) P_1 z tetraederu



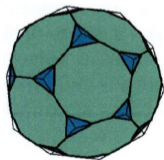
(b) P_4 z hexaederu



(c) P_3 z oktaederu



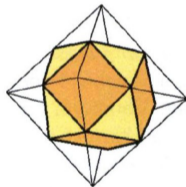
(d) P_8 z dodekaederu



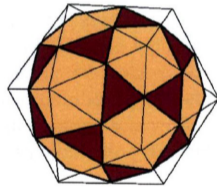
(e) P_9 z ikosaederu

Odvodenie archimedovských telies z platónovských

- (b) **Odrezaním vrcholov** (v ktorých sa pretína m hrán) pravidelného mnohostenu **rovinami, ktoré prechádzajú stredmi hrán** zbiehajúcich sa v jednom vrchole tohoto mnohostenu. Z pôvodných n -uholníkových stien vzniknú menšie **pravidelné n -uholníky**. Namiesto každého vrcholu pravidelného mnohostenu vznikne opäť **pravidelný m -uholník**.



(a) P_2 z oktaederu

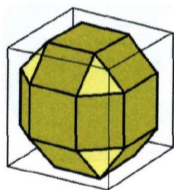


(b) P_7 z dodekaederu

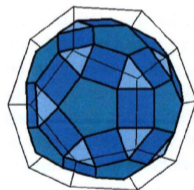
Obr. 18: Teleso P_2 by sme rovnakým postupom získali aj z hexaederu, podobne teleso P_7 z ikosaederu. Skutočnosť, že jedným spôsobom sa dá odvodiť to isté teleso z dvoch rôznych pravidelných mnohostenov vyplýva z duality týchto mnohostenov.

Odvodenie archimedovských telies z platónovských

- (c) **Odrezaním hrán** pravidelného mnohostenu **rovinami rovnobežnými s jeho hranami** tak, aby z pôvodných n -uholníkových stien vznikli menšie **pravidelné n -uholníky**, a následným **odrezaním vrcholov** tak, aby namiesto každej pôvodnej hrany vznikol štvorec a namiesto pôvodných vrcholov vznikli **pravidelné m -uholníky**.



(a) P_5 z hexaederu alebo oktaederu

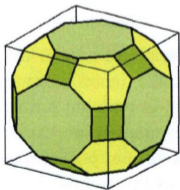


(b) P_{11} z dodecaederu alebo ikosaederu

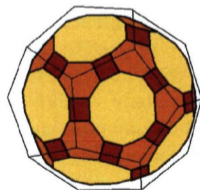
Obr. 19: Pri rovnakom postupe aplikovanom na tetraeder by sme získali teleso P_2 , ktoré sa dá ľahšie skonštruovať postupom (b).

Odvodenie archimedovských telies z platónovských

- (d) **Odrezaním hrán** pravidelného mnohostenu **rovinami rovnobežnými s týmito hranami** tak, aby z pôvodných n -uholníkových stien vznikli menšie **pravidelné n -uholníkové steny**, a následným **odrezaním vrcholov** tak, aby z menších n -uholníkových stien vznikli **pravidelné $2n$ -uholníky**. Namiesto pôvodných hrán vzniknú **štvorce** a namiesto pôvodných vrcholov vzniknú nové **$2m$ -uholníky**.



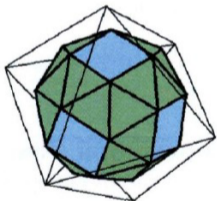
(a) P_6 z hexaederu alebo oktaederu



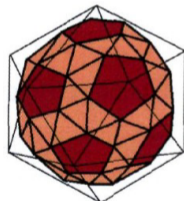
(b) P_{12} z dodecaederu alebo ikosaederu

Odvodenie archimedovských telies z platónovských

- (e) Zostávajúce dva mnohosteny P_{10} a P_{13} sa nedajú vytvoriť len pomocou orezávania. Ukážeme si podrobnejšie ich konštrukciu.



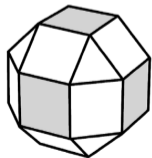
(a) P_{10} z oktaederu



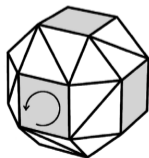
(b) P_{13} z ikosaederu

Odvozenie mnohostenu P_{10}

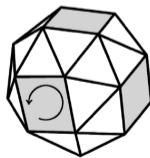
- Zostrojíme mnohosten P_5 z oktaederu alebo hexaederu, obr. (a).
- Štvorce, ktoré vznikli z pôvodných hrán oktaederu, rozdelíme uhlopriečkou vždy na dva rovnoramenné trojuholníky, obr. (b).
- Štvorce necháme otáčať v ich rovinách okolo ich stredov, pričom súčasne s nimi sa budú vo svojich rovinách okolo svojich stredov otáčať aj rovnostranné trojuholníky, ktoré už na povrchu telesa ležia, obr. (c).
- Otáčame do takej polohy, kedy sa z rovnoramenných trojuholníkov stanú rovnostranné, obr. (d).



(a) zostrojíme P_5



(b) štvorce rozdelíme uhlopriečkou



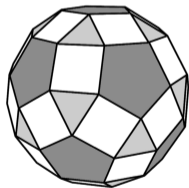
(c) otáčame štvorce



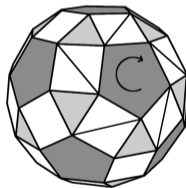
(d) získame P_{10}

Odvodenie mnohostenu P_{13}

- Zostrojíme mnohosten P_{11} z ikosaederu alebo dodekaederu, obr. (a).
- Štvorce na povrchu mnohostena P_{11} opäť rozdelíme uhlopriečkou na dva trojuholníky a necháme otáčať päťuholníkové steny spolu s rovnostrannými trojuholníkmi, obr. (b).
- Získame mnohosten P_{13} , obr. (c).



(a) zostrojíme P_{11}






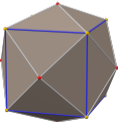
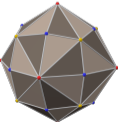
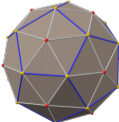
(b) štvorce rozdelíme uhlopriečkou, necháme otáčať päťuholníky



(c) mnohosten P_{13}

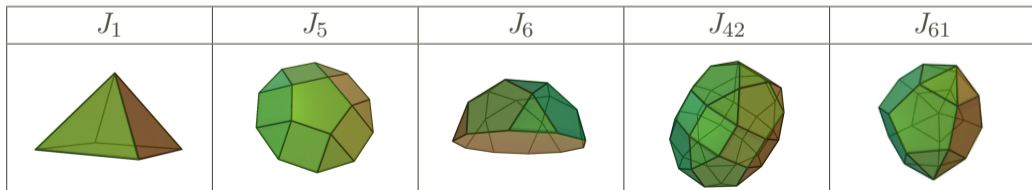
Catalanove mnohosteny

- sú **duálnymi** mnohostenmi k **archimedovským** mnohostenom
- opísal ich **Eugène Catalan** v roku 1865 a platí pre ne:
 - existuje ich **13**
 - všetky sú **konvexné**
 - skladajú sa zo **stien rovnakého typu** (dualita k vrcholom rovnakého typu)
 - ich steny **nie sú pravidelné** mnohouholníky
 - **okolo vrcholov** sú **uhly medzi susednými stenami rovnaké**

archimedovský mnohosten			
Catalanov mnohosten			

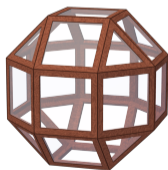
Johnsonove telesá

- **polopravidelné** mnohosteny, ktorých **vrcholy nie sú identické**
- opísal ich **Norman Johnson** v roku 1966, dal im názvy a čísla a rozdelil ich do skupín
- existuje ich **92** (dôkaz o úplnosti urobil až **Victor Zalgaller** v roku 1969)
- stenami sú vždy **pravidelné 3, 4, 5, 6, 8, 10-uholníky**
(hoci nie je žiaden zjavný dôvod, prečo by stenou nemohol byť ľubovoľný pravidelný n -uholník)

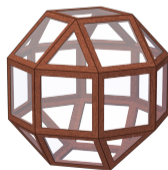


Pseudo-rombokubooktaeder

- Johnsonove teleso J_{37}
- prvá písomná zmienka je v práci Duncan Sommerville z roku 1905, nezávisle ho objavil J. C. P. Miller v roku 1930 (omylom pri skladaní modelu rombokuboactaedera)
- objavil ho aj **V. G. Ashkinuse** v roku 1957 a myslel si, že je to **14. archimedovské teleso**, pretože spĺňa tzv. **slabšiu podmienku identických vrcholov**, čiže okolo každého vrchola sú zoskupené steny rovnakého typu
- lenže takto formulovanou podmienkou je zachovaná **iba lokálna izometria**, nie globálna



Obr. 24: Archimedovské teleso rombokubooktaeder.

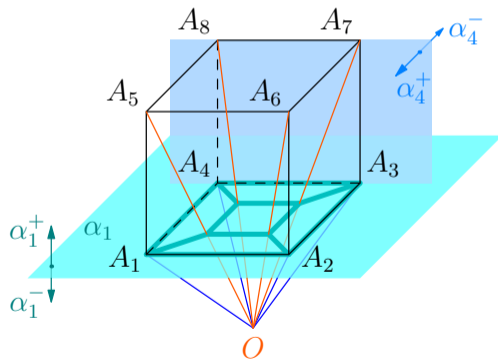


Obr. 25: Pseudo-rombokubooktaeder získame tak, že otočíme hornú časť rombokubooktaedera o 45° .

Schlegelov diagram

- **Victor Schlegel** v r. 1886 predstavil nástroj na študovanie topologických vlastností polytopov
- **Schlegelov diagram** môžeme chápať ako **rovinný graf** získaný **stredovým priemetom hrán** mnohostena z vhodného vonkajšieho bodu O do roviny incidujúcej so stenou mnohostena.

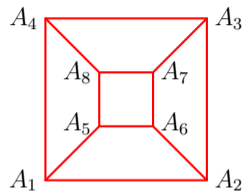
- majme $M = \bigcup M_i, i = 1, \dots, S$
- ozn. jeho vrcholy $A_i, i = 1, \dots, V$
- ozn. $\alpha_1, \dots, \alpha_S$ roviny stien
- nech α_i^+ polpriestor s hranicou α_i obsahujúci M
- potom α_i^- opačný polpriestor
- nech $O \in \alpha_1^- \cap (\alpha_2^+ \cap \dots \cap \alpha_S^+)$
- hľadáme priesečníky $A'_i = \overleftrightarrow{OA_i} \cap \alpha_1$, čiže stredové priemety bodov A_i z bodu O do roviny α_1



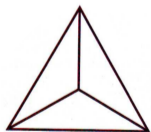
Obr. 26: Konštrukcia Schlegelovho diagramu.

Schlegelov diagram pre platónovské telesá

- získame **vonkajšie** vrcholy Schlegelovho diagramu
 $A'_i = A_i$ pre $A_i \in \alpha_1$
a **vnútorné** vrcholy Schlegelovho diagramu
 A'_i pre $A_i \notin \alpha_1$
- body A'_i tvoria **Schlegelov diagram**, do grafu ich už píšeme bez čiarky



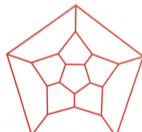
Obr. 27: Schlegelov diagram pre hexaeder.



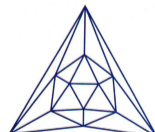
(a) štvorsten



(b) osemsten



(c) dvanásťsten




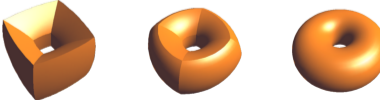


(d) dvadsaťsten

Obr. 28: Schlegelove diagramy pre ostatné pravidelné mnohosteny.

Eulerova charakteristika plochy

- v r. 1752 si **Leonhard Euler** všimol, že pre **konvexný mnohosten** M , ktorý má V vrcholov, H hrán a S stien platí, že $V + S = H + 2$
- neskôr sa pre mnohosteny zdefinovalo $\chi = V - H + S$, kde χ je **Eulerova charakteristika**
- χ určuje štruktúru **topologického priestoru** objektu, ktorá nezávisí od toho ako je objekt „ponaťahovaný“

mnohosten	$V - H + S$	„nafukovanie“	χ
	$8 - 12 + 6$		2
	$16 - 32 + 16$		0

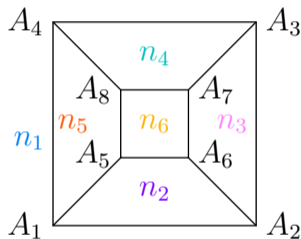
Eulerova veta

VETA

Pre konvexný mnohosten $M(V, H, S)$ platí, že $V + S = H + 2$.

DÔKAZ

- existuje viacero dôkazov tohoto tvrdenia, my urobíme **geometrický** (pozri Jucovič, E.: *Konvexné mnohosteny*)
- súčet veľkostí vnútorných uhlov v **konvexnom** n -uholníku je $\omega^n = (n - 2)\pi$
- pre mnohosten $M(V, H, S) = \bigcup M_i, i = 1, \dots, S$ zostrojíme Schlegelov diagram, kde M_i je n_i -uholník
- pre M platí, že každá hrana je prienikom práve dvoch stien a teda $H = \frac{1}{2}(n_1 + \dots + n_S)$
- počet vnútorných vrcholov v Schlegelovom diagrame je $V' = V - n_1$



Obr. 29: Schlegelov diagram získaný priemetom do roviny určenej stenou M_1 , ktorá je n_1 -uholníkom.

Pokračovanie dôkazu Eulerovej vety

- vypočítame **súčet veľkostí vnútorných uhlov** Schlegelovho diagramu Ω^D dvoma spôsobmi a výsledky porovnáme

- 1. spôsob, obr. 30

$$\begin{aligned}\Omega^D &= \omega^{n_2} + \omega^{n_3} + \dots + \omega^{n_S} \\ &= (n_2 - 2)\pi + (n_3 - 2)\pi + \dots + (n_S - 2)\pi \\ &= (n_2 + n_3 + \dots + n_S)\pi - 2(S - 1)\pi\end{aligned}$$

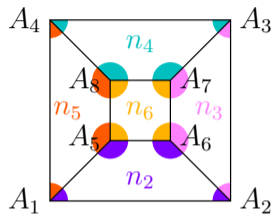
$${}^1\Omega^D = (2H - n_1)\pi - 2(S - 1)\pi$$

- 2. spôsob, obr. 31

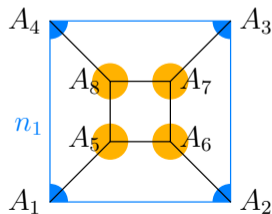
$$\Omega^D = \omega^{n_1} + 2\pi V' = (n_1 - 2)\pi + 2\pi(V - n_1)$$

$${}^2\Omega^D = (2V - n_1 - 2)\pi$$

- z rovnosti ${}^1\Omega^D = {}^2\Omega^D$ dostávame, že $2H - 2S + 2 = 2V - 2$,
a teda po úprave $H + 2 = V + S$



Obr. 30: Výpočet ${}^1\Omega^D$.



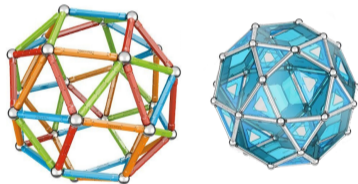
Obr. 31: Výpočet ${}^2\Omega^D$.

Didaktické pomôcky

- V súčasnosti existuje na trhu niekoľko relatívne cenovo dostupných **magnetických stavebníc**, na ktorých si žiaci môžu pútavou formou vyskúšať konštrukciu mnohostenov.
- Stavebnice sa dajú využiť aj pri výučbe výpočtu obsahu, dôkazoch niektorých tvrdení z geometrie a taktiež na hodinách fyziky a chémie.



Obr. 32: Magnetická stavebnica **MAGFORMERS**.
Dielikmi sú základné mnohouholníky, všetky majú na bočnej strane zabudované magnety, ktorými sa spájajú dokopy. Vhodná aj pre najmladších žiakov.



Obr. 33: Magnetická stavebnica **GEOMAG**.
Dielikmi sú magnetické guľôčky a paličky. Táto stavebnica je flexibilnejšia na konštrukciu objektov, ale vzhľadom na malé súčiastky je vhodnejšia pre starších žiakov.

Zoznam použitých obrázkov

- obr. 1: https://en.wikipedia.org/wiki/Parabigyrate_rhombicosidodecahedron
- obr. 4: https://en.wikipedia.org/wiki/Platonic_solid
- obr. 5: https://en.wikipedia.org/wiki/Dual_polyhedron
- obr. 6: https://en.wikipedia.org/wiki/Platonic_solid
- obr. 7 – 11: A. Mackovová
- obr. 13: https://en.wikipedia.org/wiki/Pentagonal_prism
- obr. 14: <https://en.wikipedia.org/wiki/Antiprism>
- obr. 15: <https://en.wikipedia.org/wiki/Bipyramid>
- obr. 16: <https://en.wikipedia.org/wiki/Trapezohedron>
- obrázky na slajdoch 21 – 24: https://en.wikipedia.org/wiki/Archimedean_solid
- obr. 24, 25: https://en.wikipedia.org/wiki/Archimedean_solid
- obrázky na slajdoch 25 – 29: <https://brkos.math.muni.cz/files/download/mnohosteny.pdf>

Zoznam použitých obrázkov

- obrázky na slajdoch 30, 31: Moravcová V.: Archimédés. Několik pohledů do jeho života a díla., Praha: MATFYZPRESS, 2012
- obrázky na slajde 32: https://en.wikipedia.org/wiki/Catalan_solid
- obrázky na slajde 33: https://en.wikipedia.org/wiki/Johnson_solid
- obr. 28: Jesus A. De Loera, Polyhedral computation and its applications, 2010
- obrázky na slajde 37:
<http://www.math.union.edu/~dpvc/talks/2005-02-25.4D/smoothing-torus.html>
- obr. 12, 26, 27, 29, 30, 31: B. Pokorná
- obrázky na slajdoch 2, 3, 5, 6, 7, 15: B. Pokorná
- obr. 32: <https://www.magformers.sk/>
- obr. 33: <https://www.geomagworld.com>