# Rovnobežné premietanie

## Geometria (3)

Barbora Pokorná

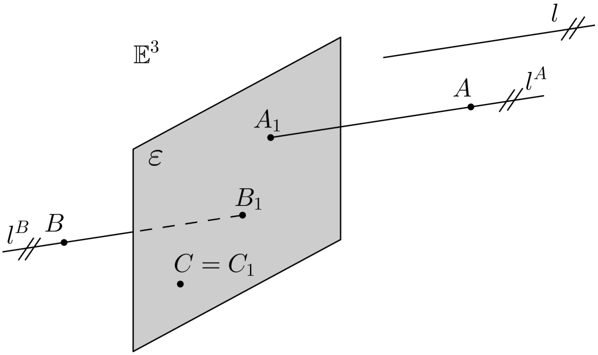
KAG, FMFI UK

2020

# Definícia rovnobežného premietania

- nech $\varepsilon \subset \mathbb{E}^3$ je rovina
- nech $l$ je priamka rôznobežná s $\varepsilon$
- rovnobežné premietanie je zobrazenie $R$, ktoré každému bodu $A \in \mathbb{E}^3$ priradí bod $A_1 \in \varepsilon$, ktorý je priesečníkom priamky $l^A$ $(A \in l^A, l^A \parallel l)$ a roviny $\varepsilon$
- označenie: $R\colon \mathbb{E}^3 \to \varepsilon$

  $R\colon A \mapsto A_1 = l^A \cap \varepsilon$



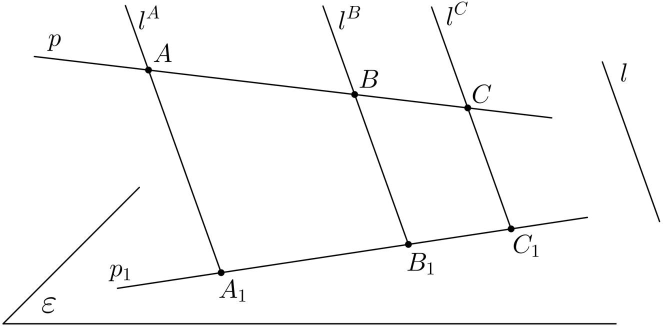

Obr. 1: Rovnobežné premietanie.

# Pojmy súvisiace s rovnobežným premietaním

- priemetňa – rovina $\varepsilon$, do ktorej premietame
- osnova premietania – osnova priamky $l$
- premietacia priamka bodu – priamka $l^A$, $l^A \parallel l$
- rovnobežný priemet bodu $A$ – bod $A_1 = l^A \cap \varepsilon$
- premietacia rovina – rovina rovnobežná s priamkou $l$
- rovnobežný priemet $U_1$ útvaru $U$ – množina rovnobežných priemetov všetkých bodov $U$
- premietací útvar objektu $U$ – množina bodov premietacích priamok všetkých bodov útvaru $U$

# Invariantné vlastnosti rovnobežného premietania

- incidencia útvarov (ak $A \in p \Rightarrow A_1 \in p_1$)
- rovnobežnosť priemetov rovnobežiek (ak $p \parallel q \Rightarrow p_1 \parallel q_1$)
- zachováva deliaci pomer (platí, že $(ABC) = (A_1B_1C_1)$ pre $A, B, C \in p$ takej, že $p \nparallel l$)



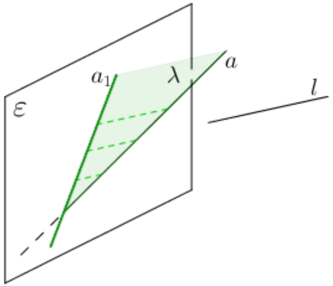

Obr. 2: Rovnobežné premietanie zachováva deliaci pomer.

# Rovnobežný priemet priamky

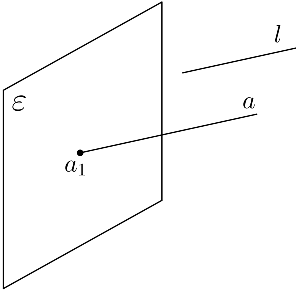
PRÍKLAD

Nech premietaným objektom je priamka $a$.

- ak $a$ nie je osnovová priamka
  premietací útvar: osnovová rovina $\lambda$
  $$\lambda\colon\ a \subset \lambda, \lambda \parallel l$$
  rovnobežný priemet: priamka $a_1 = \lambda \cap \varepsilon$




- ak $a$ je osnovová priamka
  premietací útvar: premietacia priamka
  rovnobežný priemet: bod

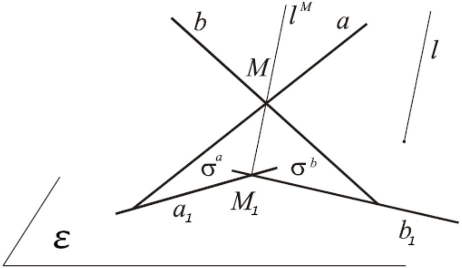


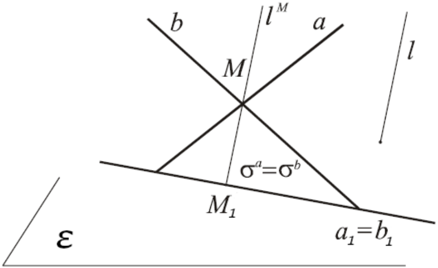
# Rovnobežné priemety dvojice priamok

PRÍKLAD

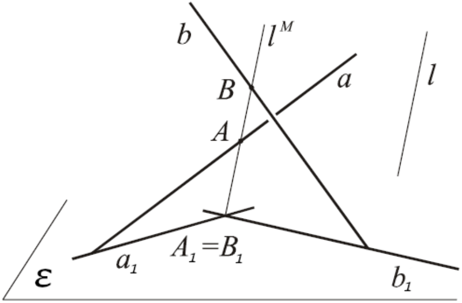
Uvažujme priemety priamok $a$, $b$, $a \neq b$, pričom žiadna nepatrí do osnovy premietania.

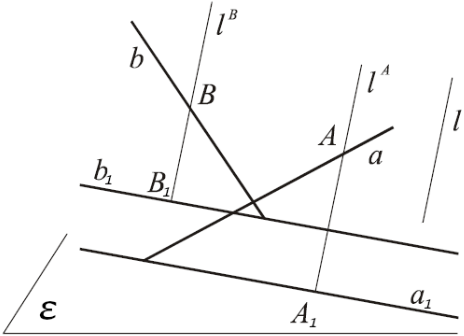
- a) Ak sú priamky $a$, $b$ rovnobežky, tak aj priamky $a_1, b_1$ sú rovnobežky (príp. totožné).
- b) Ak sú priamky $a$, $b$ rôznobežky, tak priamky $a_1, b_1$ sú alebo rôznobežky alebo sú totožné.



c) Ak sú priamky $a, b$ mimobežky, tak $a_1, b_1$ sú alebo rôznobežky alebo dve rôzne rovnobežky.



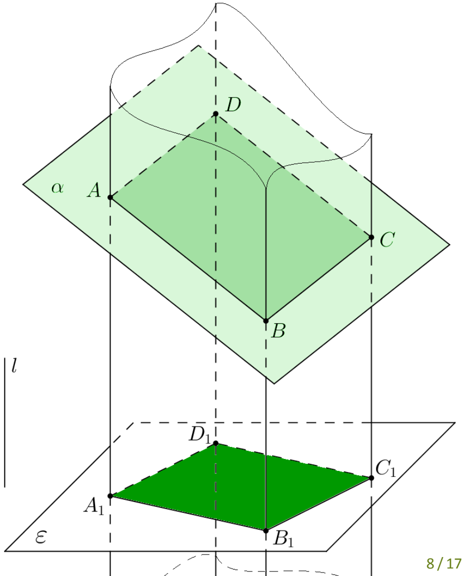



# Rovnobežný priemet $n$-uholníka

PRÍKLAD

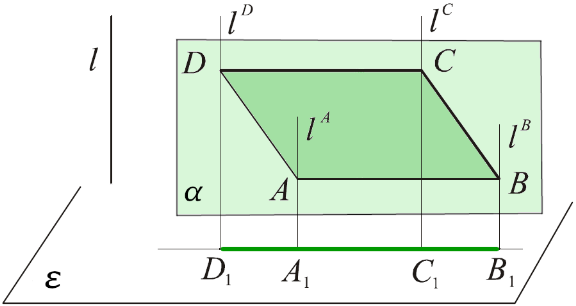
Nech premietaným objektom je úplný rovnobežník $ABCD$ (t. j. hranica aj vnútro) v rovine $\alpha$.

- ak $\alpha$ nie je osnovová rovina
  premietací útvar: štvorboký hranolový priestor
  rov. priemet: rovnobežník $A_1B_1C_1D_1$ aj jeho vnútro



# Rovnobežný priemet $n$-uholníka

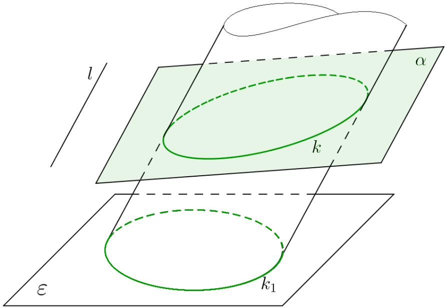
- ak $\alpha$ je osnovová rovina
  premietací útvar: rovinný pás $l^D l^B$
  rov. priemet: úsečka $D_1 B_1$



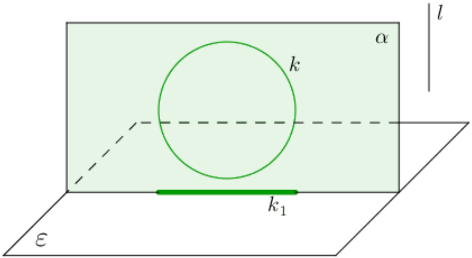
PRÍKLAD

Nech premietaným objektom je kružnica $k \subset \alpha$.

- ak $\alpha$ nie je osnovová rovina
  premietací útvar: kružnicová valcová plocha
  rovnobežný priemet: elipsa




- ak $\alpha$ je osnovová rovina
  premietací útvar: rovinný pás
  rovnobežný priemet: úsečka

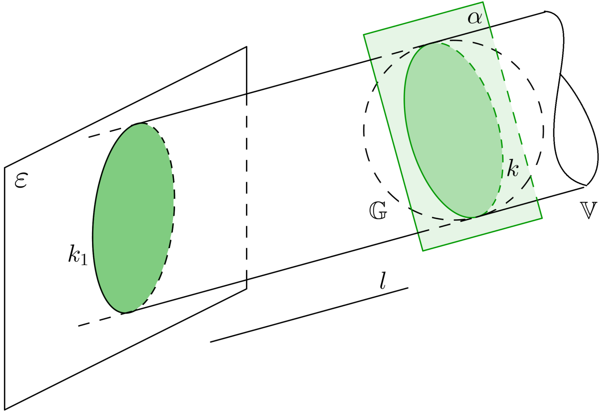


PRÍKLAD

Nech premietaným objektom je guľa $G$.

premietací útvar: kruhový valcový priestor $V$

rovnobežný priemet: elipsa a jej vnútro



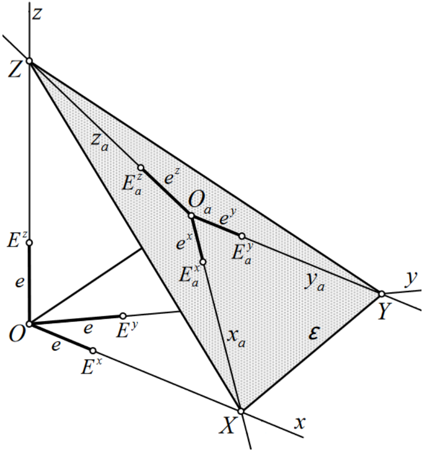

Obr. 3: Rovnobežný priemet gule.

# Pohlkeho – Schwarzova veta

- znenie základnej vety šikmej axonometrie uviedol Karl Pohlke r. 1860
- dôkaz urobil jeho žiak H. Schwarz a neskôr dokázal zovšeobecnené tvrdenie

VETA

Ľubovoľné tri komplanárne úsečky $O_aE_a^x$, $O_aE_a^y$, $O_aE_a^z$ s vlastnosťou, že najviac tri z bodov $O_a$, $E_a^x$, $E_a^y$, $E_a^z$ sú kolineárne, možno považovať za rovnobežný priemet troch úsečiek $OE^x$, $OE^y$, $OE^z$ (neležiacich v jednej rovine), pre ktoré sú známe pomery ich dĺžok a vzájomné uhly.



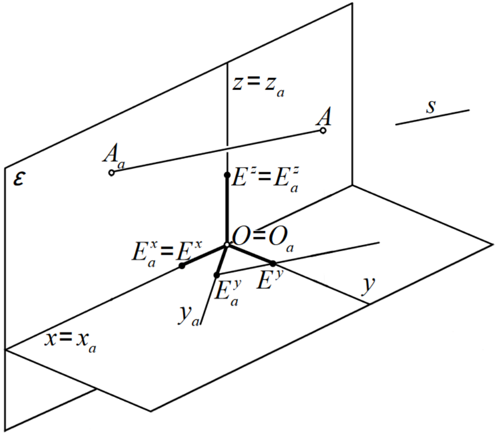
# Uhol premietania

- uhol premietania – odchýlka (veľkosť uhla) premietacej priamky s priemetňou
  $\varphi = \measuredangle l, l^*$, kde $l$ je premietacia priamka a $l^*$ je jej kolmý priemet do priemetne $\varepsilon$

- kolmé (pravouhlé) premietanie – uhol premietania je pravý, t. j. $\varphi = 90^\circ$ (čiže $l \perp \varepsilon$)
- šikmé (kosouhlé) premietanie – uhol premietania je ostrý, odporúča sa $\varphi \in (60^\circ, 90^\circ)$

- šikmé premietanie pre $\varphi = 63.4^\circ$
- nie je zobrazovacou metódou v ponímaní deskriptívnej geometrie, lebo zobrazenie nie je bijektívne
- pre naše potreby to nevadí, lebo využívame iba rovnobežné priemety význačných bodov

- priemetňa $\varepsilon$ je totožná s rovinou $xz$
- smer premietania určuje priamka $s$
- uhol $\varphi = 63.4^\circ$ zabezpečí, že
$$\frac{|O_a E_a^y|}{|OE^y|} = \operatorname{cotg} \varphi = \frac{1}{2}$$
- dĺžky na osiach $x$ a $z$ sa zachovávajú



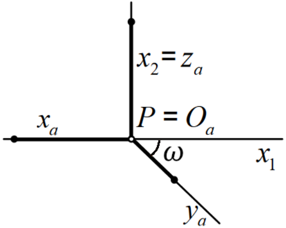

Obr. 4: Rovnobežný priemet štvorstena $OE^xE^yE^z$ do priemetne $\varepsilon$ je útvar $O_aE_a^xE_a^yE_a^z$.

# Voľné rovnobežné premietanie v nákresni

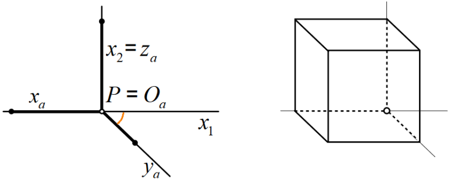
- pod pojmom nákresňa rozumieme tabuľu, zošit, monitor
- súradnicová sústava nákresne: $Px_1x_2$
- rovnobežný priemet štvorstena $OE^xE^yE^z$ do nákresne je rovinný útvar $O_aE_a^xE_a^yE_a^z$, ktorý nazývame axonometrický osový kríž
- priamky $x_a = O_aE_a^x$, $y_a = O_aE_a^y$, $z_a = O_aE_a^z$ sú axonometrické osi

- umiestnenie axonometrického osového kríža $O_aE_a^xE_a^yE_a^z$ do nákresne spĺňa podmienky:

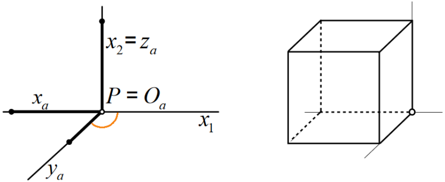
$$P = O_a$$
$$x_1 = x_a$$
$$x_2 = z_a$$
$$\omega = \sphericalangle\, x_1y_a$$




Obr. 5: Súradnicová sústava v nákresni.




Obr. 6: Ak uhol $\omega = 45°$, tak priemet útvaru nazývame nadhľad zľava.




Obr. 7: Ak uhol $\omega = 135°$, tak priemet útvaru nazývame nadhľad sprava.

# Zoznam použitých obrázkov

- obr. 1, 2, 3: A. Mackovová
- obr. na slajde 5, 7, 9: A. Mackovová
- obr. na slajde 6, 8: P. Klenková, *Stereometria*, 2006
- obr. 4, 5, 6, 7, obr. na slajde 12: S. Kudličková, *Zobrazovacie metódy rovnobežného premietania*