Perspektívna (osová) afinita

Geometria (3)

Barbora Pokorná

KAG, FMFI UK

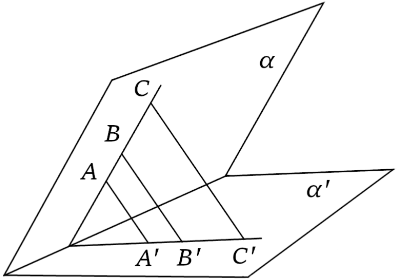
2020

Afinné zobrazenie

- v zobrazovacích metódach budeme hovoriť o príbuznosti medzi dvoma rovinami, ktorá sa aj po rovnobežnom premietaní do jednej priemetne zachová

- afinné zobrazenie roviny α na rovinu α' je zobrazenie $f\colon (\alpha) \to (\alpha'),\ A \mapsto A' = f(A)$, ktoré každé tri navzájom kolineárne A, B, C zobrazí
  - buď do jedného bodu $A' = B' = C'$
  - alebo do troch kolineárnych bodov A', B', C' tak, že platí $(ABC) = (A'B'C')$

- bijektívne afinné zobrazenie $f\colon (\alpha) \to (\alpha')$ sa nazýva afinita medzi rovinami α, α'

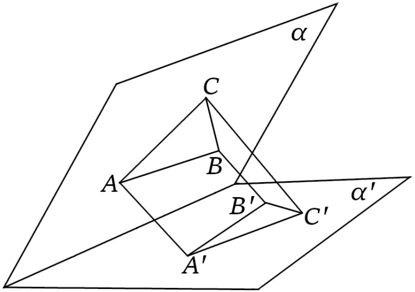


Obr. 1: $(ABC) = (A'B'C')$

Pojmy súvisiace s afinným zobrazením

Nech $f\colon (\alpha) \to (\alpha')$ je afinné zobrazenie.

- rovinné pole – množina bodov, priamok a útvarov v danej rovine
- rovinné pole vzorov – pole α, ozn. (α)
- rovinné pole obrazov – pole α', ozn. (α')
- obraz útvaru U v zobrazení f – množina obrazov všetkých jeho bodov
$$U' = f(U) = \{X', X \in U, X' = f(X)\}$$
- nesúmiestne rovinné polia – polia, ktoré neležia v jednej rovine



Obr. 2: $f(\triangle ABC) = \triangle A'B'C'$

Vlastnosti afinného zobrazenia

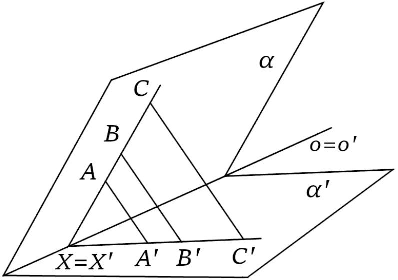
1. Kompozícia konečného počtu afinných zobrazení je afinné zobrazenie.
2. Obraz ľubovoľnej trojice nekolineárnych bodov v afinite je nekolineárna trojica bodov.
3. Inverzné zobrazenie k afinite je afinita.
4. Obrazom priamky v afinite je priamka.
5. Obrazom dvojice rovnobežných priamok v afinite je dvojica rovnobežných priamok.

Perspektívna afinita

Nech $f\colon (\alpha) \to (\alpha')$ je afinné zobrazenie.

- samodružný bod zobrazenia f – bod $X = f(X) = X'$
- samodružná priamka zobrazenia f – každý bod priamky je samodružný

Perspektívna afinita je afinita $f\colon (\alpha) \to (\alpha')$, v ktorej sú všetky body jednej priamky samodružné. Táto priamka sa nazýva os afinity.



Obr. 3: Priamka $o = \alpha \cap \alpha' = o'$ je os afinity f.

Vlastnosti perspektívnej afinity

1. Nech $f\colon (\alpha) \to (\alpha')$ je neidentická perspektívna afinita s osou o. Potom všetky priamky AA' ($A \in (\alpha)$, $A' = f(A) \neq A$) sú navzájom rovnobežné.

2. Perspektívna afinita dvoch nesúmiestnych rovinných polí je rovnobežným premietaním.

3. Perspektívna afinita medzi dvoma rovinami α, α' je jednoznačne určená osou $o = \alpha \cap \alpha'$ a dvojicou bodov vzor $A \in \alpha$ a jeho obraz $A' \in \alpha'$.

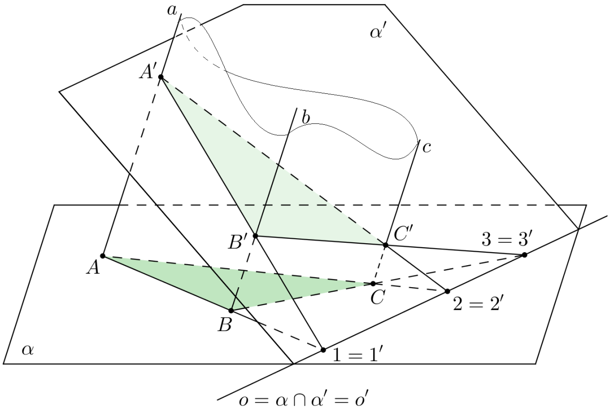
   Zapisujeme: $PA\colon (\alpha) \to (\alpha')$
   $PA\,(os\ o = \alpha \cap \alpha',\ A,\ A')$

ÚLOHA

Zostrojte rez hranolovej plochy H, rovinou α', ktorá je určená bodom A' a priamkou $o' = o$.

RIEŠENIE

- hľadáme body B', C'
- zostrojíme bod $1 = \overleftrightarrow{AB} \cap o = 1'$
- určíme $\overleftrightarrow{A'1'} \cap b = B'$
- zostrojíme bod $2 = \overleftrightarrow{AC} \cap o = 2'$
- určíme $\overleftrightarrow{A'2'} \cap c = C'$

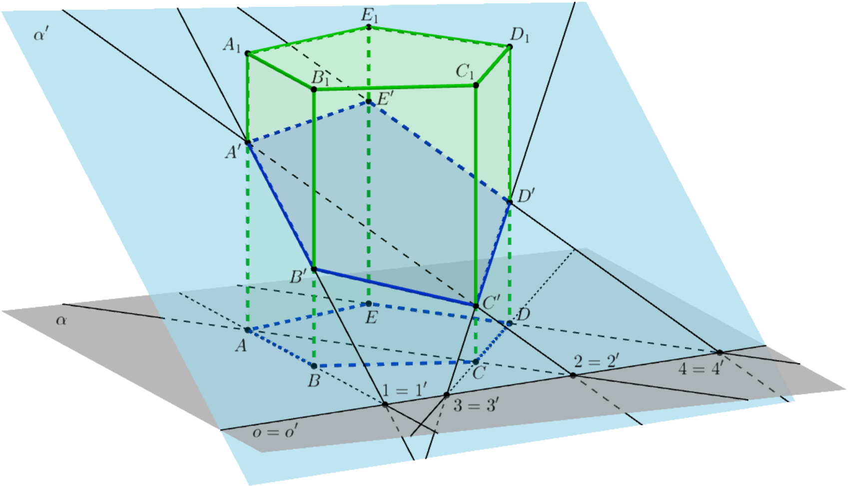


Obr. 4: $(\alpha \cap H) \xrightarrow{PA} (\alpha' \cap H)$

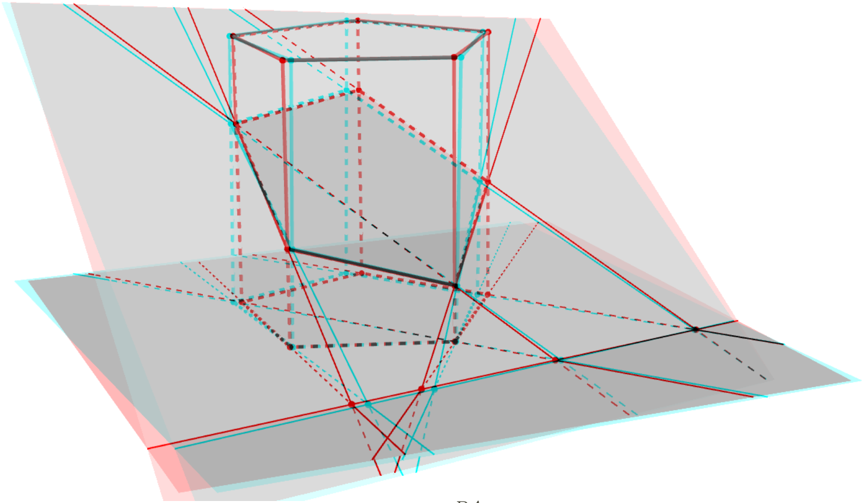
DÔSLEDOK

Medzi dvomi rovinnými rezmi na tej istej hranolovej ploche rovinami α, α', ktoré nie sú osnovové (t. j. rovnobežné s tvoriacou priamkou) je vzťah perspektívnej afinity s osou $o = \alpha \cap \alpha'$.

Príklad – rez hranolovej plochy



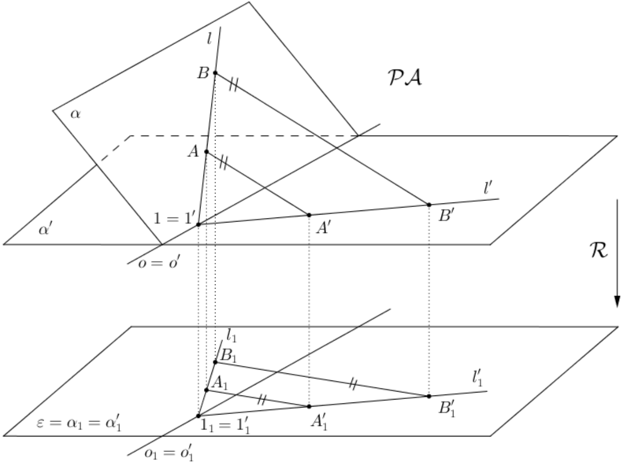
Obr. 5: $(\alpha \cap H) \xrightarrow{PA} (\alpha' \cap H)$



Obr. 6: $(\alpha \cap H) \xrightarrow{PA} (\alpha' \cap H)$

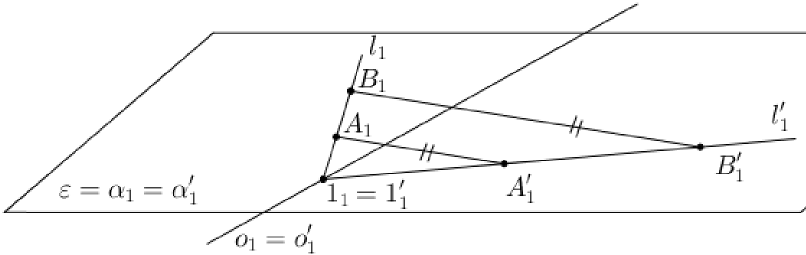
Rovnobežný priemet perspektívnej afinity

- v zobrazovacích metódach pracujeme s rovnobežnými priemetmi útvarov v nákresni
- perspektívnu afinitu medzi rovinami α, α' premietneme rovnobežne do priemetne ε
- priemety označíme indexom 1
- súmiestne rovinné polia – polia, ktoré ležia v jednej rovine (tu $(\alpha_1), (\alpha_1')$)
- v priemetni $\varepsilon = (\alpha_1) = (\alpha_1')$ sme získali zobrazenie $R^{-1} \circ PA \circ R : (\alpha_1) \to (\alpha_1')$, ktoré zachováva $(A_1 B_1 1_1) = (A_1' B_1' 1_1')$, teda je afinitou



Osová afinita v priemetni

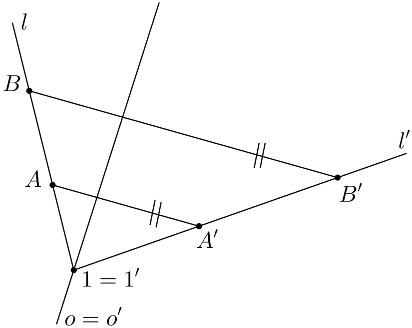
Zobrazenie $R^{-1} \circ PA \circ R$ v priemetni ε nazývame osová afinita v rovine ε, kde rovinné polia (α_1) a (α_1') sú súmiestne (obe ležia v rovine ε) a priamka $o_1 = o_1'$ je osou afinity.



Obr. 7: Dvojica odpovedajúcich si bodov je $A_1 \in (\alpha_1)$ a $A_1' \in (\alpha_1')$.

Osová afinita v nákresni

- priemetňu ε umiestnime do nákresne (zošit, tabuľa, ...)
- v nákresni pracujeme len s rovnobežnými priemetmi a preto môžeme index 1 vynechať



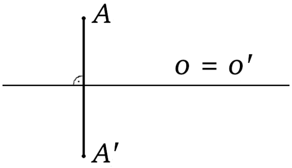
Obr. 8: Dvojica odpovedajúcich si bodov je A a A'.

Smer osovej afinity

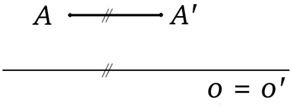
Priamka AA' daná dvojicou odpovedajúcich si bodov určuje smer osovej afinity.

(a) ak $AA' \perp o = o'$, hovoríme o pravouhlej osovej afinite
(b) ak $AA' \parallel o = o'$, hovoríme o elácii
(c) v ostatných prípadoch ide o šikmú osovú afinitu

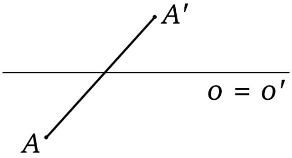
Zapisujeme: $OA : (\alpha) \to (\alpha')$
$OA\ (os\ o = o',\ A,\ A')$ (kde $A \in (\alpha)$, $A' \in (\alpha')$)



(a) pravouhlá



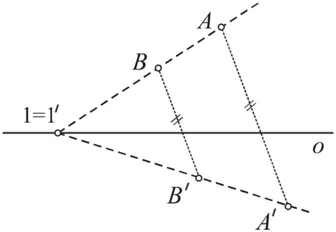
(b) elácia



(c) šikmá

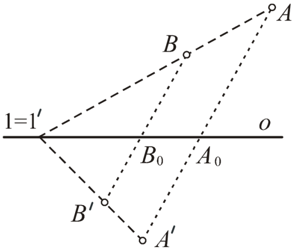
Vlastnosti osovej afinity

1. Nech $OA\colon (\alpha) \to (\alpha')$ je neidentická osová afinita s osou o. Potom všetky priamky AA', také, že $A \in (\alpha)$ a $A' = OA(A) \neq A$, sú navzájom rovnobežné.



2. Nech $OA\colon (\alpha) \to (\alpha')$ je neidentická osová afinita dvoch súmiestnych rovinných polí, rôzna od elácie. Potom deliaci pomer $(A'AA_0)$, kde $A_0 = AA' \cap o$ je konštantný pre všetky body rovinného poľa α.

   Číslo $(A'AA_0)$ sa nazýva charakteristika osovej afinity.



Vlastnosti osovej afinity

3. Každú afinitu možno vyjadriť v tvare kompozície osovej afinity a podobnosti, a to v ľubovoľnom poradí a nekonečne veľa spôsobmi.

4. Medzi rovnobežnými priemetmi dvoch rovinných rezov tej istej hranolovej plochy rôznobežnými rovinami, z ktorých žiadna nie je premietacou ani osnovovou rovinou vzhľadom na danú plochu, je vzťah osovej afinity.

   Osou afinity je priemet priesečnice rezových rovín.

   Dvojica bodov vzor – obraz je tvorená priemetmi dvoch rôznych priesečníkov ľubovoľnej tvoriacej priamky plochy s rovinami rezov.

   $(\alpha \cap H)_1 \xrightarrow{OA} (\alpha' \cap H)_1 \qquad OA(o = (\alpha \cap \alpha')_1, A_1 = (\alpha \cap a)_1, A_1' = (\alpha' \cap a)_1)$

Hlavné smery osovej afinity

Dve navzájom kolmé priamky, ktorých obrazy v danej afinite f sú navzájom kolmé priamky, nazývame hlavné smery osovej afinity f.

DANÉ

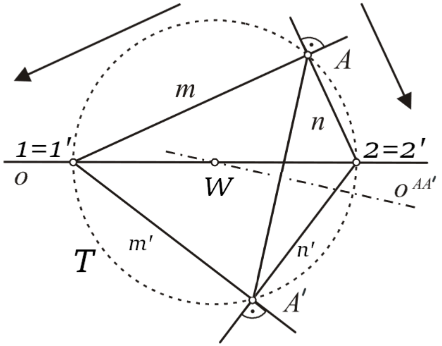
osová afinita $f(o, A, A')$

ÚLOHA

určiť priamky m, n také, že $m \perp n$ a $f(m) \perp f(n)$

KONŠTRUKCIA

- os úsečky $o^{AA'}$
- bod W, $W = o \cap o^{AA'}$
- Tálesova kružnica $T(W, r = |WA| = |WA'|)$
- body $1, 2$, ktoré $T \cap o = \{1 = 1', 2 = 2'\}$
- priamky m, n ako $m = \overleftrightarrow{1A}$, $n = \overleftrightarrow{2A}$
  ich obrazy $m' = \overleftrightarrow{1'A'}$, $n' = \overleftrightarrow{2'A'}$



Obr. 10: Priamky m, n určujú hlavné smery osovej afinity f.

Zoznam použitých obrázkov

- obr. 1, 2, 3: B. Pokorná
- obr. 4, 5, 6, 7, 8, na slajde 10: A. Mackovová
- obr. na slajde 13: B. Pokorná
- obr. 10, na slajde 14: Z. Sklenáriková, M. Pémová, *Perspektívna afinita medzi dvoma rovinami*