Elipsa ako obraz kružnice v osovej afinite

Geometria (3)

Barbora Pokorná

KAG, FMFI UK

2020

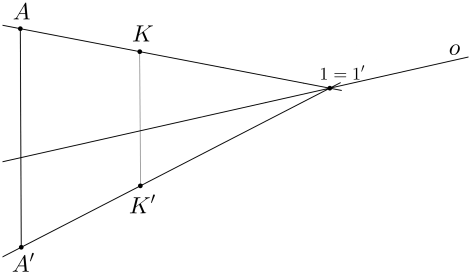
Obraz bodu v osovej afinite (opakovanie)

ÚLOHA

V osovej afinite $OA(os - o, A, A')$ zostrojte obraz bodu K, čiže bod $K' = OA(K)$.

POSTUP

- zostrojíme priamku $\overleftrightarrow{AK}$
- určíme samodružný bod $1 = 1' = \overleftrightarrow{AK} \cap o$
- zostrojíme priamku $\overleftrightarrow{A'1'}$
- určíme bod K' tak, že $K' \in \overleftrightarrow{A'1'}$ a priamka KK' je rovnobežná so smerom afinity AA'



Túto elementárnu konštrukciu budeme ďalej v texte označovať (EK1).

Obraz kružnice v osovej afinite

DANÉ

- majme osovú afinitu $OA(os - o, A, A')$
- nech je daná kružnica $k(S, r)$

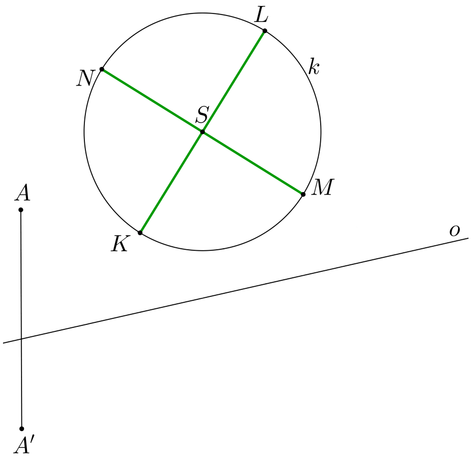
ÚLOHA

- zostrojiť obraz k' kružnice k v OA

POSTUP

Krok č. 1:

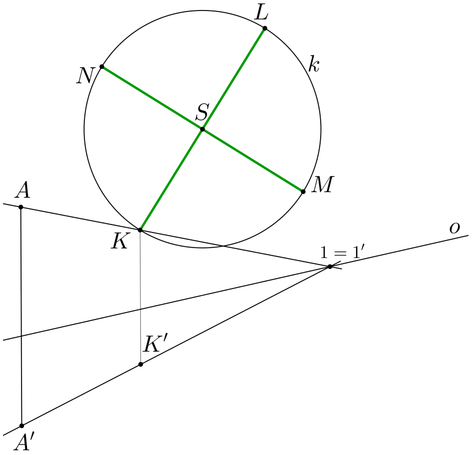
- zostrojíme na k dva priemery KL a MN, ktoré sú navzájom kolmé



Konštrukcia obrazu kružnice v osovej afinite

Krok č. 2:

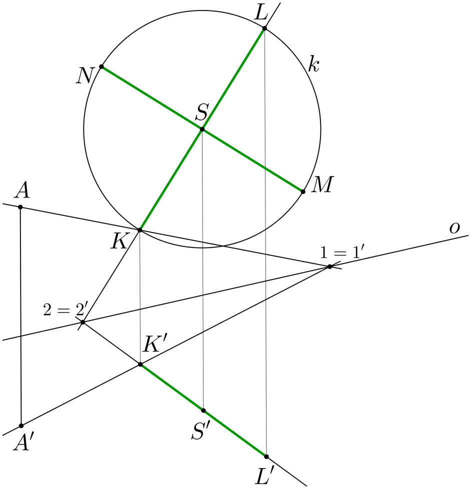
- zostrojíme bod K', tak, že $OA(AK) = A'K'$ (EK1)



Konštrukcia obrazu kružnice v osovej afinite

Krok č. 3:

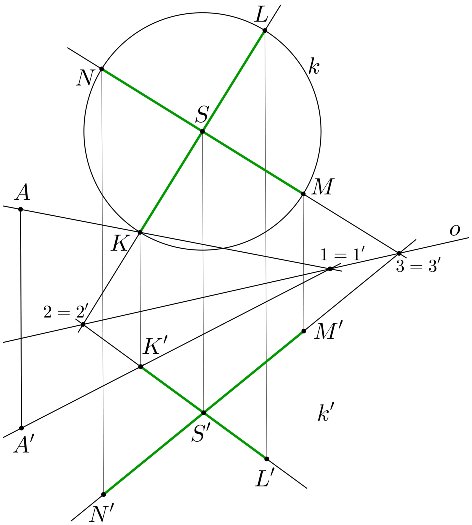
- zostrojíme body S', L', tak, že $OA(KL) = K'L'$ (EK1)



Konštrukcia obrazu kružnice v osovej afinite

Krok č. 4:

- zostrojíme body M', N', tak, že
  $OA(MN) = M'N'$ (EK1)

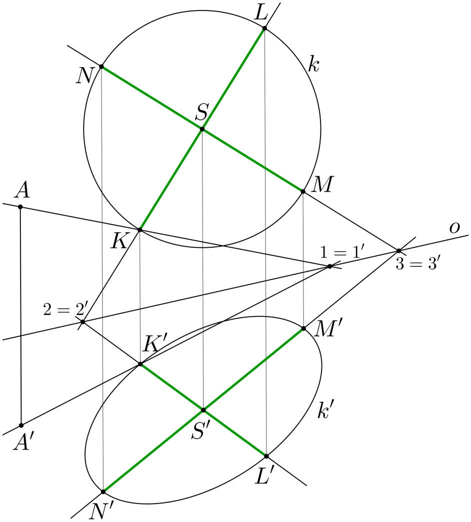


Elipsa ako obraz kružnice v osovej afinite

- Ak postupne pre každý bod $X \in k$ nájdeme jeho obraz $X' = OA(X)$, získame tak v rovine množinu bodov – krivku, ktorú nazývame elipsa.
- Obraz kružnice v osovej afinite sa nazýva elipsa.
- Obrazom stredu kružnice v osovej afinite je stred elipsy, t. j. $OA(S) = S'$.
- Obraz priemeru kružnice v osovej afinite je priemer elipsy.

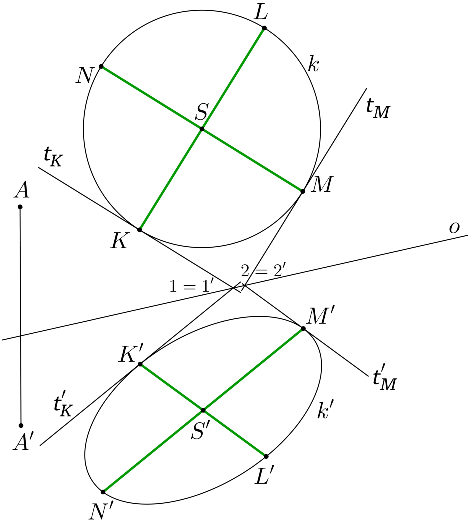
  $OA(KL) = K'L'$
  $OA(MN) = M'N'$
- Obrazy dvoch navzájom kolmých priemerov kružnice voláme združené priemery elipsy.

  $KL \perp MN \Rightarrow K'L', M'N'$ sú združené priemery



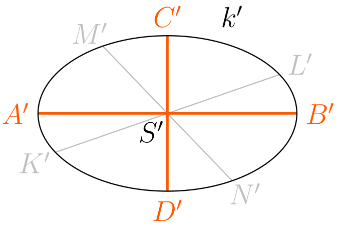
Dotyčnice elipsy

- obrazom dotyčnice t_K kružnice k v bode K je dotyčnica t'_K elipsy k' v bode K'
  $OA(t_K) = t'_K$
- navyše platí, že dotyčnica t'_K elipsy je rovnobežná s priemerom elipsy $M'N'$, ktorý je združený k priemeru $K'L'$



Navzájom kolmé združené priemery

- ukázali sme si, ako zostrojiť združené priemery elipsy, čím sme získali štyri body elipsy (body K', L', M', N')
- avšak na vykreslenie približného tvaru elipsy nám to nestačí, potrebovali by sme zostrojiť oveľa viac bodov, čo je ale priveľmi zdĺhavé
- sú známe konštrukcie na vykreslenie elipsy, avšak na to potrebujeme poznať združené priemery elipsy, ktoré sú navzájom kolmé
- kolmé priemery kružnice a im odpovedajúce kolmé priemery elipsy patria do hlavných smerov OA



Obr. 1: Združené priemery elipsy $K'L'$, $M'N'$ nie sú navzájom kolmé. Združené priemery $A'B'$, $C'D'$ navzájom kolmé sú.

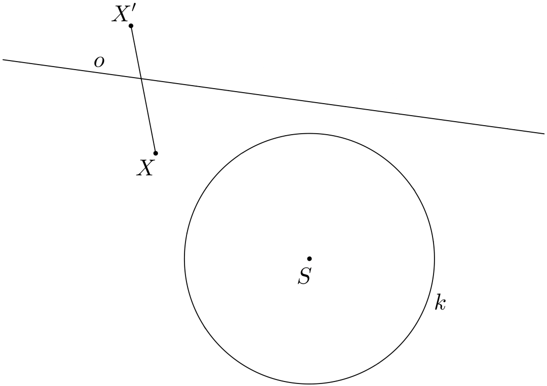
Konštrukcia navzájom kolmých združených priemerov elipsy

DANÉ

- majme osovú afinitu $OA(os - o, X, X')$
- nech je daná kružnica $k(S, r)$

ÚLOHA

- zostrojiť navzájom kolmé združené priemery elipsy k', ktoré sú obrazom dvoch kolomých priemerov kružnice k v danej OA

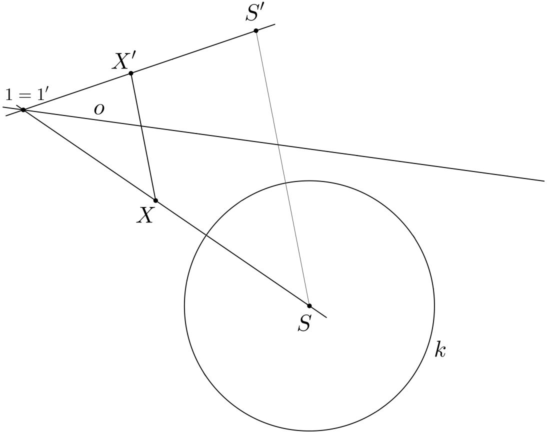


Konštrukcia navzájom kolmých združených priemerov elipsy

POSTUP

Krok č. 1:

- zostrojíme stred elipsy S', tak, že $OA(XS) = X'S'$ (EK1)

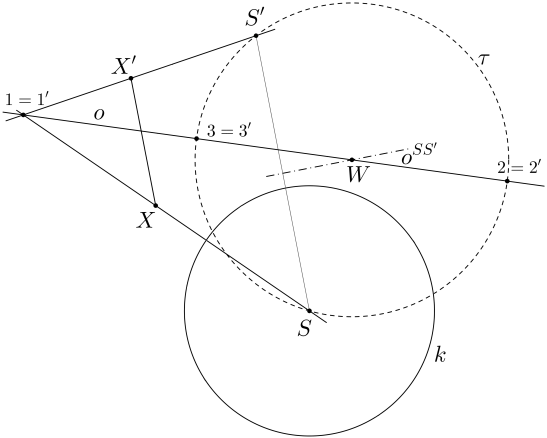


Konštrukcia navzájom kolmých združených priemerov elipsy

Krok č. 2:

Zostrojíme hlavné smery osovej afinity:

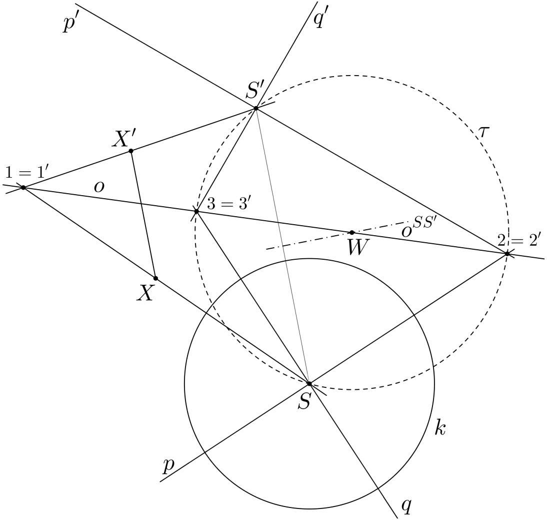
- zostrojíme os $o^{SS'}$ úsečky SS'
- bod $W = o^{SS'} \cap o$ bude stredom Tálesovej kružnice, ktorú potrebujeme
- zostrojíme Tálesovú kružnicu $\tau(W, r_\tau)$, ktorej polomer $r_\tau = |WS| = |WS'|$
- označíme samodružné body $2 = 2'$ a $3 = 3'$, ktoré patria prieniku Tálesovej kružnice a osi afinity, t. j. $\{2, 3\} = \tau \cap o$



Konštrukcia navzájom kolmých združených priemerov elipsy

Krok č. 3:

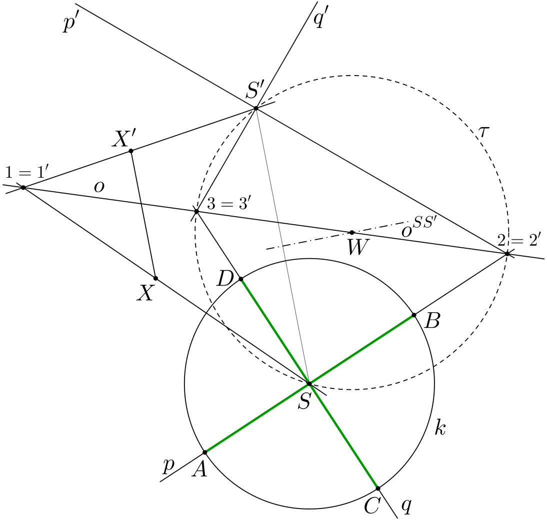
- zostrojíme priamky $p = \overleftrightarrow{S2}$ a $p' = \overleftrightarrow{S'2'}$
- zostrojíme priamky $q = \overleftrightarrow{S3}$ a $q' = \overleftrightarrow{S'3'}$
- tieto priamky patria do hlavných smerov osovej afinity



Konštrukcia navzájom kolmých združených priemerov elipsy

Krok č. 4:

- určíme body A, B, kde $\{A, B\} = p \cap k$
- určíme body C, D, kde $\{C, D\} = q \cap k$
- platí, že priemery kružnice AB a CD sú navzájom kolmé



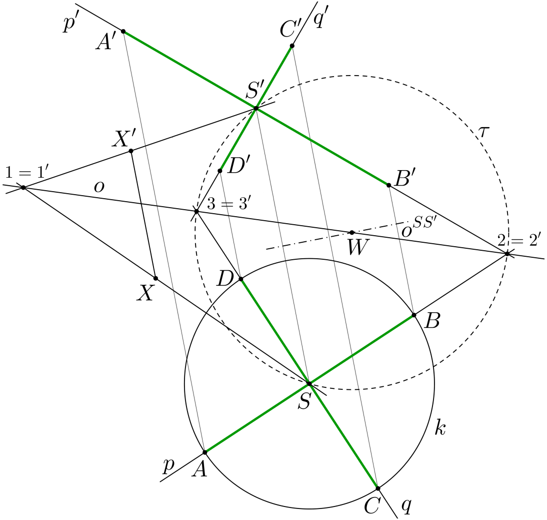
Konštrukcia navzájom kolmých združených priemerov elipsy

Krok č. 5:

- určíme body $A', B' \in p'$ tak, že
  $OA(A) = A'$ a $OA(B) = B'$ (EK1)
- určíme body $C', D' \in q'$ tak, že
  $OA(C) = C'$ a $OA(D) = D'$ (EK1)

VÝSTUP

- úsečky $A'B'$ a $C'D'$ ležiace na hlavných smeroch osovej afinity, teda navzájom kolmé združené priemery elipsy k'



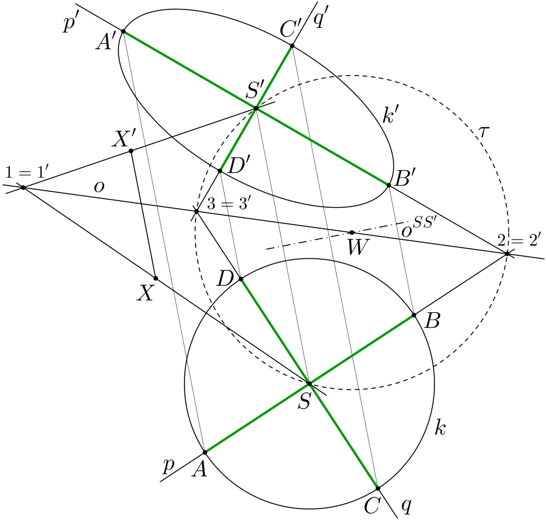
Osi a vrcholy elipsy

- obrazom kružnice k je elipsa k'

- priamka p' – hlavná os elipsy
- priamka q' – vedľajšia os elipsy

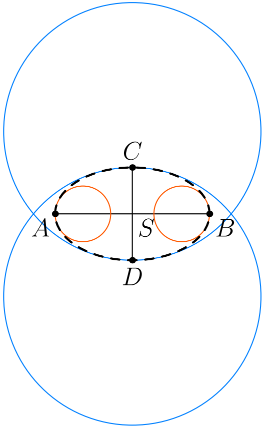
- body A', B' – hlavné vrcholy elipsy
- body C', D' – vedľajšie vrcholy elipsy

- $|A'S'| = |B'S'| = a$ je dĺžka hlavnej polosi
- $|C'S'| = |D'S'| = b$ je dĺžka vedľajšej polosi



Vykreslenie elipsy pomocou oskulačných kružníc

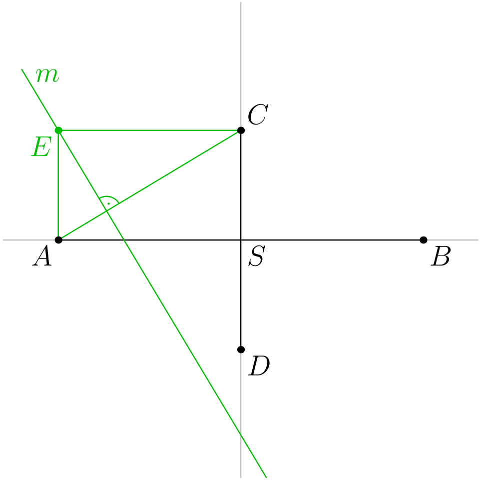
- k vykresľovaniu elipsy pomocou rysovacích pomôcok využívame segmenty oskulačných kružníc v hlavných a vedľajších vrcholoch elipsy
- oskulačná kružnica rovinnej krivky v danom bode je kružnica, ktorá týmto bodom prechádza a má v ňom s danou krivkou spoločnú prvnú aj druhú deriváciu (čiže v okolí toho bodu kružnica veľmi dobre aproximuje rovinnú krivku)
- v okolí hlavných vrcholov nahradíme elipsu segmentami oskulačných kružníc s polomerom $\rho_A = \rho_B = \frac{b^2}{a}$ a v okolí vedľajších vrcholov s polomerom $\rho_C = \rho_D = \frac{a^2}{b}$
- určenie dĺžky polomerov oskulačných kružníc metódami matematickej analýzy a rovinnej geometrie je uvedený v literatúre *Kudličková S., Mackovová A.: Elipsa, str. 10 – 13*



Obr. 2: Oskulačné kružnice vo vrcholoch elipsy.

Algoritmus konštrukcie oskulačných kružníc

Teraz uvedieme algoritmus konštrukcie stredov a polomerov oskulačných kružníc. Ďalej v texte budeme vrcholy elipsy označovať bez čiarky.



DANÉ

- hlavné vrcholy A, B
- vedľajšie vrcholy C, D

POSTUP

Krok č. 1:

- zostrojíme bod E tak, že doplníme trojuholník $\triangle ASC$ na obdĺžnik $ASCE$
- zostrojíme priamku m kolmú na priamku $\overleftrightarrow{AC}$ a prechádzajúcu bodom E

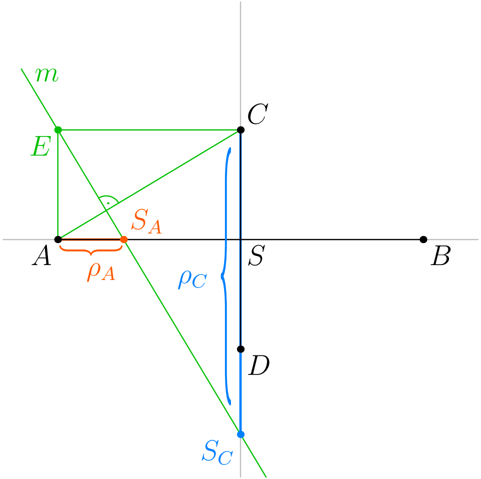
Krok č. 2:

- určíme **bod** $S_A = m \cap \overleftrightarrow{AB}$

  Bod S_A je stred oskulačnej kružnice k_A v hlavnom vrchole A s polomerom $\rho_A = \frac{b^2}{a}$.

- určíme **bod** $S_C = m \cap \overleftrightarrow{CD}$

  Bod S_C je stred oskulačnej kružnice k_C vo vedľajšom vrchole C s polomerom $\rho_C = \frac{a^2}{b}$.



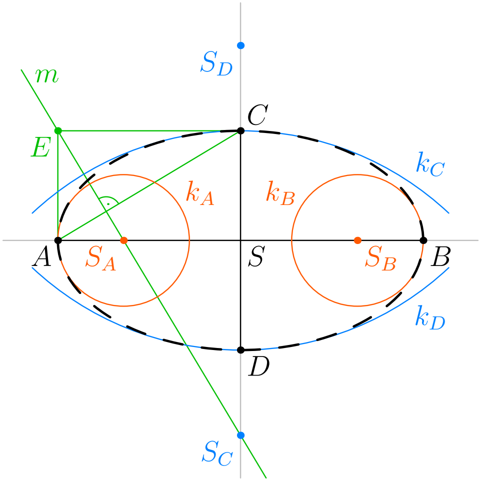
Algoritmus konštrukcie oskulačných kružníc

Krok č. 3:

- zostrojíme bod S_B, ktorý je súmerný s bodom S_A podľa stredu elipsy S

  Bod S_B je stred oskulačnej kružnice k_B v hlavnom vrchole B s polomerom $\rho_B = \rho_A = \frac{b^2}{a}$.
- zostrojíme bod S_D, ktorý je súmerný s bodom S_C podľa stredu elipsy S

  Bod S_D je stred oskulačnej kružnice k_D vo vedľajšom vrchole D s polomerom $\rho_D = \rho_C = \frac{a^2}{b}$.



VÝSTUP

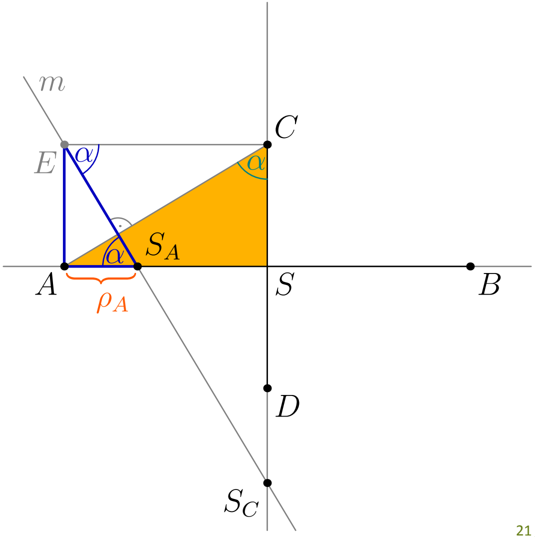
- oskulačné kružnice $k_A(S_A, \rho_A)$, $k_B(S_B, \rho_B)$, $k_C(S_C, \rho_C)$, $k_D(S_D, \rho_D)$ vo vrcholoch elipsy

Odôvodnenie konštrukcie oskulačných kružníc

Najprv ukážeme, že platí $\rho_A = |AS_A| = \frac{b^2}{a}$.

- pravouhlé trojuholníky $\triangle AS_AE$ a $\triangle SCA$ sú podobné podľa vety (uu)
- preto $\frac{|AS_A|}{|AE|} = \frac{|SC|}{|SA|}$
- platí $|AE| = b = |SC|$ a $|SA| = a$
- po dosadení máme $|AS_A| = \frac{b^2}{a}$

Platnosť rovnosti $\rho_C = |CS_C| = \frac{a^2}{b}$ by sme ukázali analogicky z podobnosti pravouhlých trojuholníkov $\triangle CES_C$ a $\triangle SCA$.



Zoznam použitých obrázkov

- obr. na slajdoch 2 – 8, 10 – 16: A. Mackovová
- obr. 1, 2, obr. na slajdoch 18 – 21: B. Pokorná