Mongeovo zobrazenie

Geometria (3)

Barbora Pokorná

KAG, FMFI UK

2020

Gaspard Monge (1746 – 1818)

Princíp metódy

DANÉ

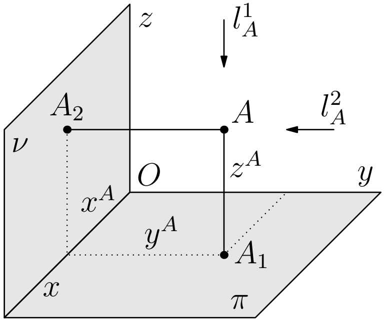
- dve navzájom kolmé roviny π, ν v pravouhlom trojhrane $Oxyz$, kde rovina $\pi = xy$ a rovina $\nu = xz$
- bod $A(x^A, y^A, z^A)$ z priestoru $\mathbb{E}^3$

PRE BOD A ZOSTROJÍME

- prvý priemet bodu – kolmý priemet do priemetne π, $A_1(x^A, y^A)$
- druhý priemet bodu – kolmý priemet do priemetne ν, $A_2(x^A, z^A)$

VÝSTUP

- bijektívne zobrazenie $f\colon \mathbb{E}^3 \to \pi \times \nu$, ktoré bodu $A \in \mathbb{E}^3$ priradí usporiadanú dvojicu bodov $(A_1, A_2) \in \pi \times \nu$, t. j. $f\colon A \mapsto (A_1, A_2)$



Obr. 2: Priesečnicu priemetní $x = \pi \cap \nu$ nazývame základnica.

Priamka A_1A_2 je kolmá na základnicu.

Združenie priemetní

- priemetňu π otočíme zobrazením o okolo základnice x do priemetne ν

PRE BOD A_1 ZÍSKAME

- otočenú polohu bodu – otočenie $o\colon A_1 \mapsto A_1^0$
  $A_1^0(x^A, y^A)$

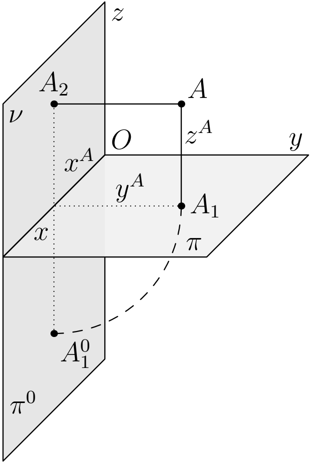
VÝSTUP

- v priemetni $\varepsilon = \pi^0 \times \nu$ získame bijektívne zobrazenie

$$g\colon \mathbb{E}^3 \to \pi^0 \times \nu \qquad g\colon A \mapsto (A_1^0, A_2)$$

Zobrazenie g je zobrazovacia metóda, ktorú nazývame Mongeovo zobrazenie, resp. pravouhlé premietanie do dvoch navzájom kolmých priemetní.

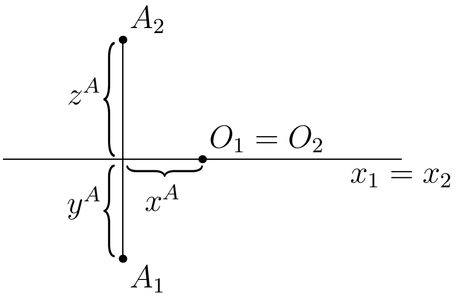
Priemetňu $\varepsilon = \pi^0 \times \nu$ stotožníme s nákresňou (tabuľa, zošit) a ďalej budeme otočenú polohu bodu A_1^0 označovať len A_1.



Obr. 3: Priamka $A_1^0A_2 \perp x$ alebo $A_1^0 = A_2$.

Obraz bodu v Mongeovom zobrazení

- základnica $x = x_1 = x_2$
- začiatok $O = O_1 = O_2$
- pôdorys bodu A – bod $A_1(x^A, y^A)$
- nárys bodu A – bod $A_2(x^A, z^A)$

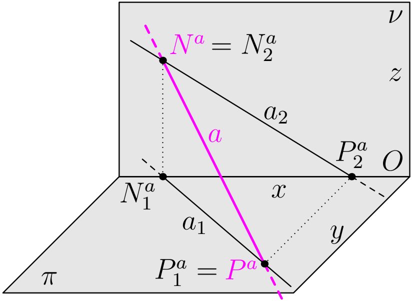


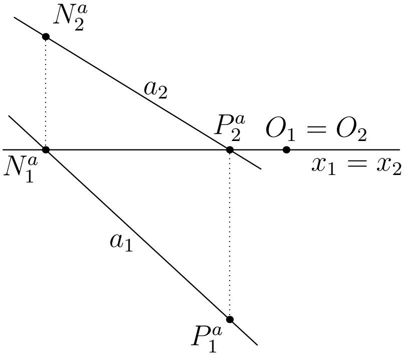
Obraz bodu A je usporiadaná dvojica bodov (A_1, A_2).

Body A_1, A_2 nazývame združené priemety bodu A.

Priamka A_1A_2 je kolmá na základnicu x a nazývame ju ordinála bodu.

Obraz priamky v Mongeovom zobrazení

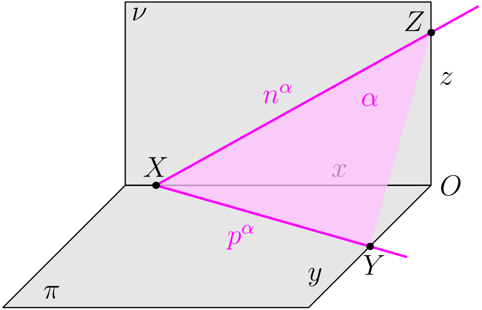


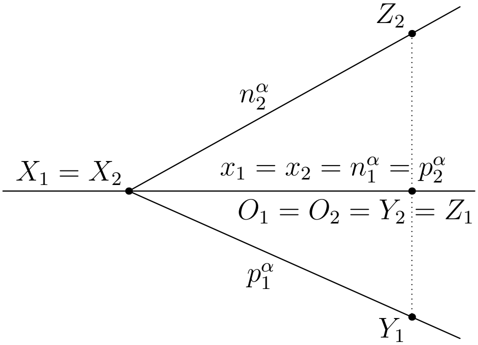


Obrazom priamky a je usporiadaná dvojica priamok (a_1, a_2), ktorú nazývame združené priemety priamky. Významné body priamky:

- prvý (pôdorysný) stopník priamky P^a $(P_1^a, P_2^a) = a \cap \pi$
- druhý (nárysný) stopník priamky N^a $(N_1^a, N_2^a) = a \cap \nu$

Obraz roviny v Mongeovom zobrazení

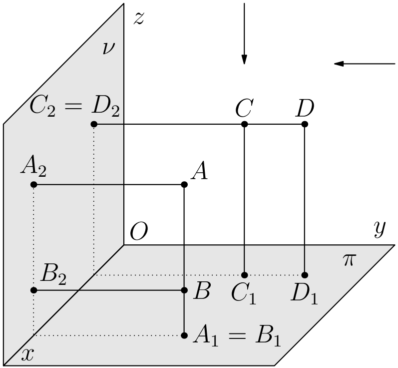


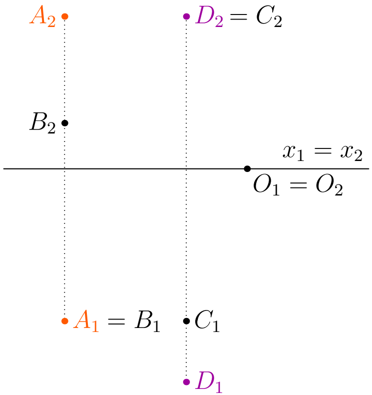


Obrazom roviny $\alpha = \overleftrightarrow{XYZ}$ je trojica usporiadaných dvojíc bodov $X(X_1, X_2)$, $Y(Y_1, Y_2)$, $Z(Z_1, Z_2)$, kde $X = \alpha \cap x$, $Y = \alpha \cap y$, $Z = \alpha \cap z$. Významné priamky roviny:

- prvá (pôdorysná) stopa roviny p^α $(p_1^\alpha, p_2^\alpha) = \alpha \cap \pi$ $(p^\alpha = XY, p_1^\alpha = X_1Y_1, p_2^\alpha = X_2Y_2)$
- druhá (nárysná) stopa roviny n^α $(n_1^\alpha, n_2^\alpha) = \alpha \cap \nu$ $(n^\alpha = XZ, n_1^\alpha = X_1Z_1, n_2^\alpha = X_2Z_2)$

Viditeľnosť bodov vzhľadom na priemetňu





- body A, B a priemetňa π
  $z^A > z^B$, t. j. bod A je „vyššie“ ako bod B a teda bod A vidíme a zakrýva bod B
- body C, D a priemetňa ν
  $y^C < y^D$, t. j. bod D je „ďalej“ od priemetne ν ako bod C a teda D vidíme a zakrýva bod C

Zoznam použitých obrázkov

- obr. 1: https://cs.wikipedia.org/wiki/Gaspard_Monge
- obr. na slajdoch 2 – 7: B. Pokorná