Perspektívna afinita medzi dvoma rovinami[1]

Zita Sklenáriková – Marta Pémová

1 Definícia. Základné pojmy a vlastnosti

Definícia 1.1

Zobrazenie $f:(\alpha)\to(\alpha')$, f: $A \mapsto A' = f(A)$, ktoré každé tri navzájom rôzne kolineárne body A, B, C zobrazí buď do jedného bodu alebo do troch kolineárnych bodov A', B', C' tak, že platí: $(A'B'C')=(ABC)$, sa nazýva *afinné zobrazenie* roviny α na rovinu – alebo do roviny – α'. Bijektívne afinné zobrazenie $f:(\alpha)\to(\alpha')$ sa nazýva afinita medzi rovinami α a α'; v prípade $\alpha = \alpha'$ hovoríme o afinite v rovine α.

Poznámka

1. Množinu bodov, priamok a útvarov nejakej roviny vo vzťahu k danému zobrazeniu f tejto roviny budeme nazývať *rovinné pole*. V zobrazení $f:(\alpha)\to(\alpha')$ je (α) rovinné pole *vzorov* a (α') rovinné pole *obrazov*. Ak pôjde o zobrazenie v tej istej rovine, hovoríme, že rovinné polia sú *súmiestne*, v opačnom prípade hovoríme o *nesúmiestnych* rovinných poliach.
2. Pod obrazom útvaru $\boldsymbol{U}$ v zobrazení f rozumieme množinu obrazov všetkých jeho bodov, t. j. $\boldsymbol{U'} = f(\boldsymbol{U}) = \{X' : X \in \boldsymbol{U} \wedge X' = f(X)\}$.

Priamo z definície vyplývajú nasledujúce vlastnosti afinného zobrazenia:

1. Kompozícia konečného počtu afinných zobrazení je afinné zobrazenie.
2. Obraz ľubovoľnej trojice nekolineárnych bodov v afinite je nekolineárna trojica bodov.
3. Inverzné zobrazenie k afinite je afinita.
4. Obrazom priamky v afinite je priamka.
5. Obrazom dvojice rovnobežných priamok v afinite je dvojica rovnobežných priamok.
6. Množina všetkých afinít roviny na seba je grupa.[2]

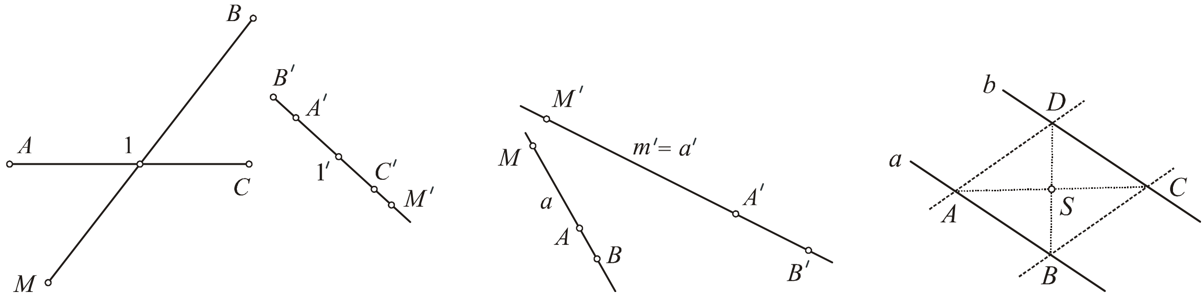
Dôkaz (niektorých z tvrdení 1 – 6):

2. (*sporom*) Nech afinita $f:(\alpha)\to(\alpha')$ zobrazí trojicu nekolineárnych bodov A, B, C na trojicu kolineárnych bodov A', B', C' a $M \in (\alpha)$ je ľubovoľný bod. Ľahko sa dokáže, že obraz $M' = f(M)$ by potom ležal na priamke $A'B'$ (prečo?); do tejto priamky by sa zobrazili všetky body rovinného poľa (α), čo je v rozpore s bijektívnosťou zobrazenia. (Obr. 1a)

4. Nech je $f:(\alpha)\to(\alpha')$ afinita a $a \subset (\alpha)$ ľubovoľná priamka. Zvoľme si na nej ľubovoľné dva navzájom rôzne body A, B; potom sú zrejme navzájom rôzne aj ich obrazy A', B' (priamku nimi určenú označme m'). Nech M je ľubovoľný bod priamky a ($A \neq M \neq B$). Pre jeho obraz $M' = f(M)$ platí: $(A'B'M')=(ABM)$ (prečo?), čo znamená, že bod M' leží na priamke m'. Dokázali sme teda, že obraz priamky a (ako množiny všetkých jej bodov) v danej

[1] Základným priestorom je trojrozmerný euklidovský priestor, ktorého štúdiu je venovaná Stereometria [3].
[2] S pojmom *grupy geometrických transformácií priestoru* ($\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{E}_3$) sa študenti učiteľskej aprobácie oboznamujú v predmete Geometria 2. Všeobecnejší prehľad o grupách transformácií geometrických priestorov možno získať v seminári vo vyšších ročníkoch štúdia.

afinite f je bodovou podmnožinou priamky m', t. j. $a' = f(a) \subset m'$. Pretože podľa 3 je inverzné zobrazenie f^{-1} afinitou, analogicky platí: $f^{-1}(m') \subset a$, t. j. $m' \subset f(a) = a'$. Odtiaľ vyplýva záver: $f(a) = m'$. (Obr. 1b)



Obr. 1a Obr. 1b Obr. 1c

5. Nech je $f:(\alpha)\rightarrow(\alpha')$ afinita a priamky a, b sú ľubovoľné rôzne rovnobežky rovinného poľa (α). Stačí zostrojiť ľubovoľný rovnobežník $ABCD$ ($AB \subset a$, $CD \subset b$). Ak označíme priesečník jeho uhlopriečok S, tak pre obrazy vrcholov rovnobežníka platí: $(A'C'S') = (B'D'S') = -1$, t. j. i útvar $A'B'C'D'$ je rovnobežník (odôvodnite), odkiaľ vyplýva záver: $a' \parallel b'$. (Obr. 1c) [3]

V prípade afinného zobrazenia dvoch súmiestnych rovinných polí nadobúda zmysel skúmanie tzv. samodružných prvkov zobrazenia, t. j. útvarov, ktoré sú v tomto zobrazení invariantné (ide o útvary $\boldsymbol{U}_i$, pre ktoré $f(\boldsymbol{U}_i) = \boldsymbol{U}_i$); pritom nemusí byť samodružný každý bod útvaru $\boldsymbol{U}_i$.[4]

Definícia 1.2

Bod A sa nazýva *samodružným* (invariantným) bodom zobrazenia $f:(\alpha)\rightarrow(\alpha')$, ak platí $A = f(A)$. Analogicky, ľubovoľný útvar $\boldsymbol{U}$, pre ktorý platí $\boldsymbol{U} = f(\boldsymbol{U})$ nazývame *samodružným útvarom* zobrazenia f. Ak je každý bod samodružnej priamky samodružný, hovoríme o *silno samodružnej priamke* zobrazenia f (v opačnom prípade ide o priamku *slabo samodružnú*). Analogicky, ak sú všetky priamky incidentné s daným samodružným bodom samodružné, nazývame tento *silno samodružným bodom* zobrazenia f (v opačnom prípade hovoríme o bode *slabo samodružnom*).

Definícia 1.3

Afinita $f:(\alpha)\rightarrow(\alpha')$, v ktorej sú všetky body jednej priamky samodružné, sa nazýva *osová* (*perspektívna*) *afinita*. Priamku samodružných bodov nazývame *osou afinity f*.

Vlastnosti osovej afinity vyjadruje nasledujúca veta:

Veta 1.1

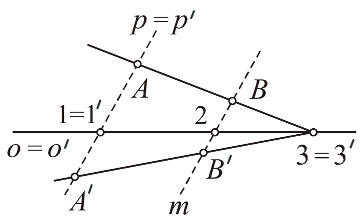
1 Nech $f:(\alpha)\rightarrow(\alpha')$ je neidentická osová afinita s osou o. Potom všetky priamky AA' ($A \in (\alpha)$, $A' = f(A) \neq A$) patria do tej istej osnovy priamok (sú navzájom rovnobežné).
2 Osová afinita dvoch nesúmiestnych rovinných polí je rovnobežným premietaním.

[3] S príkladmi afinných zobrazení sa možno oboznámiť v prednáškach (Geometria 2, učiteľstvo akademických predmetov). [6] predstavuje syntetickú teóriu zhodnostných a podobnostných zobrazení v rovine $\boldsymbol{E}^2$.
[4] Napríklad v osovej súmernosti s osou o je samodružná každá kružnica, pre ktorú je os súmernosti priemerovou priamkou; pritom sú samodružné práve dva body takejto kružnice.

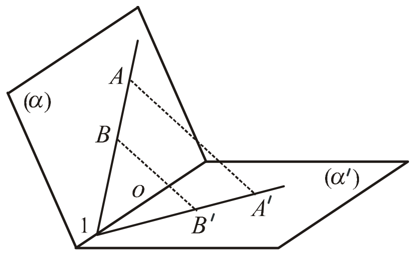
3 Nech $f:(\alpha)\rightarrow(\alpha')$ je neidentická osová afinita súmiestnych rovinných polí rôzna od elácie (definícia 1.4). Potom deliaci pomer $(A'AA_0)$, kde $A_0 = \overleftrightarrow{AA'} \cap o$, je konštantný pre všetky body A ($A \notin o$) rovinného poľa (α).

Dôkaz

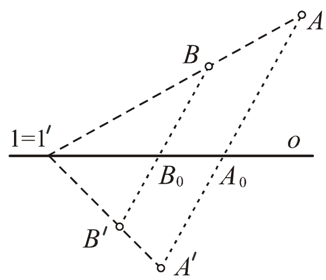
1. a) Predpokladajme, že ide o súmiestne rovinné polia. Pretože afinita f nie je identickým zobrazením ($f \neq I$), existuje bod A rovinného poľa (α), pre ktorý platí: $A' = f(A) \neq A$ (teda $A \notin o$, $A' \notin o$). Označme p priamku incidentnú s bodmi A, A' a 1 jej samodružný bod ($1 = 1'$) (ak nejde o eláciu). Pretože f: A, $1 \mapsto A'$, $1'$, je priamka $p = \overleftrightarrow{A1}$ samodružnou priamkou zobrazenia f. Dokázali sme, že všetky priamky incidentné s bodom a jeho obrazom sú v osovej afinite dvoch súmiestnych rovinných polí slabo samodružnými priamkami zobrazenia; v prípade elácie (definícia 1. 4) tento fakt vyplýva z vlastnosti: $p \parallel o \Rightarrow p' \parallel o$. (Obr. 2a)



Obr. 2a



Obr. 2b



Obr. 2c

Zvoľme si ďalší bod B ($B \neq A$, $B \notin o$) a skúmajme vlastnosti bodu $B' = f(B)$. Zostrojme priamku m prechádzajúcu bodom B a rovnobežnú s priamkou p. Jej obrazom je priamka rovnobežná s priamkou p prechádzajúca samodružným bodom $m \cap o = 2$, t. j. $m = m'$. Teda všetky priamky incidentné s bodom a jeho obrazom patria navyše do tej istej osnovy priamok. (Dôkaz pre eláciu sa ponecháva čitateľovi.) Zrejmá je konštrukcia obrazu B' bodu B, a to pomocou priamky AB. Ak táto priamka má samodružný bod $3 = 3'$, tak jej obraz v zobrazení f prechádza bodmi A', $3'$ (v prípade rovnobežnosti s osou o je i obraz priamky rovnobežný s osou afinity a prechádza bodom A'). V prípade incidencie bodu B s priamkou p zostrojíme obraz bodu B využitím pomocnej dvojice bodov C, $C' = f(C)$ ($C \notin p$) získanej analogickým postupom.

b) Predpokladajme, že rovinné polia (α), (α') sú nesúmiestne. Vtedy je osou afinity priamka $o = \alpha \cap \alpha'$ a rovnobežnosť priamok AA', BB' je dôsledkom invariantnosti deliaceho pomeru: $(AB1) = (A'B'1')$ ($1 = \overleftrightarrow{AB} \cap o \Rightarrow 1 = 1'$). (Obr. 2b)

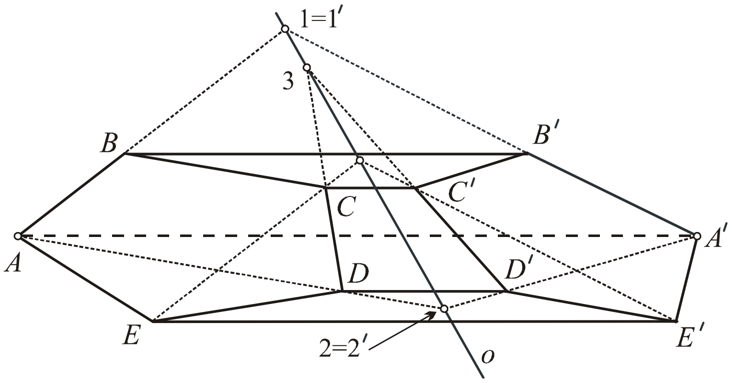
Tvrdenie **2** vety 1.1 je dôsledkom bodu 1b dôkazu.

3. Z konštrukcie bodu B' v bode 1 vyplýva: $(B'BB_0) = (A'AA_0)$; stačí použiť vhodné dvojice rovnoľahlých trojuholníkov na obrázku 2c.

Definícia 1.4

Osnovu slabo samodružných priamok incidentných s bodmi a ich obrazmi v danej osovej afinite nazývame *smer afinity*. Ak do tejto osnovy priamok patrí os afinity, hovoríme o *elácii*, ak je smer afinity kolmý na jej os, ide o *pravouhlú osovú afinitu*. Deliaci pomer $(A'AA_0)$ z bodu 3 vety 1.1 sa nazýva *charakteristika osovej afinity*.

Dôsledok
Medzi ľubovoľnými dvoma rovinnými rezmi na tej istej hranolovej ploche alebo kružnicovej valcovej ploche rovinami α, α', ktoré nie sú osnovové (pojem osnovovej roviny *H*/*V* plochy je známy z [3]) ani navzájom rovnobežné, je vzťah *perspektívnej afinity*, ktorej osou *o* je priesečnica rovín rezu. Dvojicu bodov vzor – obraz dostaneme na tej istej tvoriacej priamke plochy[5] ako jej priesečníky s rezovými rovinami. (Na obr. 3: $\alpha = \overleftrightarrow{ABC}, \alpha' = \overleftrightarrow{A'B'C'}$.)

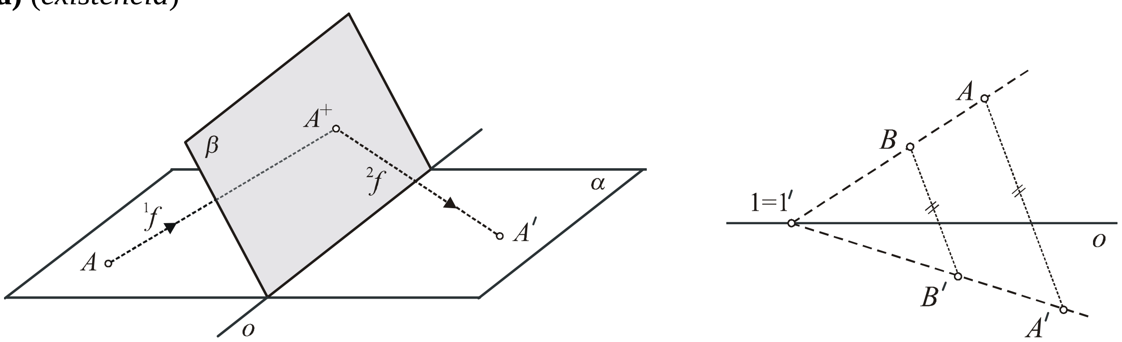


Obr. 3

Ďalej dokážeme *základnú vetu* o určení afinity dvoch rovinných polí. Z určitých dôvodov, ktoré sa ozrejmia v priebehu dôkazu vety, dokážeme najprv zjednodušené tvrdenie pre perspektívnu afinitu dvoch súmiestnych rovinných polí.

Veta 1.2
Perspektívna afinita roviny na seba je určená osou *o* a usporiadanou dvojicou navzájom rôznych bodov A, A', z ktorých žiaden neleží na priamke *o*.

Dôkaz
a) (*existencia*)



Obr. 4a, b

Nech *o*, *A*, A' sú priamka a body roviny α požadovanej vlastnosti. Najprv dokážeme, že existuje perspektívna afinita *f* v rovine α, ktorá má os *o* a zobrazuje bod *A* do bodu $A' = f(A)$. K tomu stačí urobiť nasledujúcu konštrukciu: 1. zvoľme si ľubovoľnú rovinu β tak, aby mala s rovinou α spoločnú práve jednu priamku, a to priamku *o*; 2. zvoľme si ľubovoľný bod A^+ roviny β, neležiaci na priamke *o*. Uvažujme o perspektívnych afinitách ${}^1f$, ${}^2f$, pre ktoré je

[5] Táto dvojica bodov môže ležať na ľubovoľnej osnovovej priamke vzhľadom na danú plochu, nemusí ísť o tvoriacu priamku. Napríklad pri kružnicovej valcovej ploche sa často používajú priesečníky osi plochy s rovinami rezov.

priamka o osou, ${}^1f(A) = A^+$, ${}^2f(A^+) = A'$ a ${}^1f\colon (\alpha) \to (\alpha^+)$, ${}^2f\colon (\alpha^+) \to (\alpha')$, pričom nositeľkou rovinného poľa (α^+) je rovina β a dvoch zvyšných rovinných polí rovina α (obr. 4a). Kompozícia $f = {}^2f \circ {}^1f$ je afinitou so silno samodružnou priamkou o (o je silno samodružnou priamkou oboch zobrazení ${}^if$ (i = 1, 2)), t. j. f je perspektívna afinita požadovaných vlastností. (Odôvodnite, prečo $f(A) = A'$.)

b) (*jednoznačnosť*, t. j. nezávislosť od konštrukcie)

Treba dokázať, že zobrazenie f nezávisí od voľby roviny β a výberu bodu $A^+ \in \beta$. To už vyplýva z konštrukcie v rovine α; obrazom ľubovoľného bodu $B \in (\alpha)$, $B \neq A$ vo všetkých afinitách s osou o, ktoré zobrazujú bod A do bodu A', je bod ten istý bod B' (zostrojený podľa predchádzajúceho (obr. 4b); konštrukcia pri iných polohách bodu B už bola vysvetlená v dôkaze vety 1.1). Perspektívna afinita požadovaných vlastností je preto jediná.

*Poznámka***.** Perspektívnu afinitu určenú osou o a usporiadanou dvojicou bodov vzor – obraz (A, A') budeme všade ďalej označovať $f(o; A, A')$.

*Dôsledok***.** Každú perspektívnu afinitu roviny na seba možno vyjadriť v tvare kompozície dvoch rovnobežných premietaní (nekonečne mnoho spôsobmi).

Veta 1.3 (*základná veta* o určení afinity)

Afinita $f: (\alpha) \to (\alpha')$ je určená trojicou nekolineárnych bodov A, B, C a trojicou ich obrazov A', B', C' (v danom poradí).

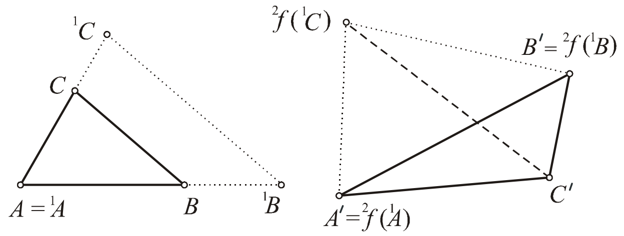
Dôkaz

a) (*existencia*)

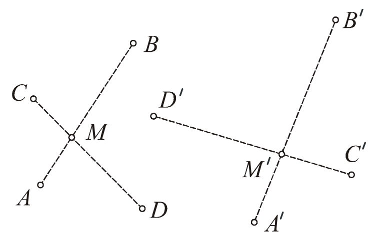
Nech sú dané: ľubovoľná nekolineárna trojica bodov A, B, C rovinného poľa (α) a ľubovoľná (tiež nekolineárna; prečo?) trojica bodov A', B', C' v rovinnom poli α'. Táto časť dôkazu je konštrukčná; „zostrojíme“ aspoň jedno afinné zobrazenie f tak, aby $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ a $f(C) = C'$.

Nech ${}^1f$ je rovnoľahlosť v rovine α (táto rovina je nositeľka rovnomenného rovinného poľa) so stredom napr. A a koeficientom ${}^1k = |A'B'| : |AB|$. Obrazy bodov v tejto rovnoľahlosti označme ľavým horným indexom „1“. Platí: ${}^1f\colon A, B, C \mapsto {}^1A, {}^1B, {}^1C$ (t. j. $|{}^1A{}^1B| = |A'B'|$) a ${}^1f\colon (\alpha) \to ({}^1\alpha)$.

Nech ${}^2f$ je „premiestnenie“ rovinného poľa $({}^1\alpha)$ (t. j. zhodnostné zobrazenie) do roviny α' (nositeľka rovinného poľa (α')), pre ktoré platí: ${}^2f({}^1A) = A'$, ${}^2f({}^1B) = B'$ (takéto zhodnosti sú dve; vyberme ktorúkoľvek z nich) (obr. 5a).



Obr. 5a



Obr. 5b

Na záver nech ${}^3f$ je perspektívna afinita v rovine α' s osou v priamke $\overleftrightarrow{A'B'}$, v ktorej je obrazom bodu ${}^2f({}^1C)$ bod C'. Je zrejmé, že všetky zobrazenia ${}^if$ (i = 1, 2, 3) sú afinity, odkiaľ vyplýva, že aj ich kompozícia ${}^3f \circ {}^2f \circ {}^1f = f$ je afinitou. Z konštrukcie je zrejmé, že afinita f má požadované vlastnosti.

b) (*jednoznačnosť*, t. j. nezávislosť zobrazenia f od výberu afinít ${}^{i}f$ (i = 1, 2, 3))
Jednoznačnosť vyplýva z invariantnosti deliaceho pomeru v ľubovoľnej afinite. Vyberme si ľubovoľný bod D rovinného poľa (α). Aspoň jedna spojnica bodu D s niektorým vrcholom trojuholníka ABC pretína spojnicu zvyšných vrcholov; na obr. 5b $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{DC} = M$. Pre obraz bodu D v afinite $f : (\alpha) \rightarrow (\alpha')$ platí: $(D'C'M') = (DCM)$, kde bod M' možno zostrojiť na základe rovnosti $(A'B'M') = (ABM)$. Takto zostrojený bod D' je obrazom bodu D vo všetkých afinitách, ktoré zobrazujú v danom poradí body A, B, C do bodov A', B', C', čo znamená, že afinita požadovaných vlastností je práve jedna. [6]

Dôsledok

1. Každú afinitu možno vyjadriť v tvare kompozície osovej afinity a podobnosti, a to v ľubovoľnom poradí a nekonečne mnoho spôsobmi.
2. Medzi rovnobežnými priemetmi dvoch rovinných rezov tej istej hranolovej (kružnicovej valcovej) plochy rôznobežnými rovinami, z ktorých žiadna nie je premietacou ani osnovovou rovinou vzhľadom na danú plochu, je vzťah perspektívnej afinity. Osou afinity je priemet priesečnice rezových rovín a dvojica bodov vzor – obraz je tvorená priemetmi dvoch rôznych priesečníkov ľubovoľnej osnovovej priamky (vzhľadom na danú plochu) s rovinami rezov.[7]

*Dôkaz***.** Podľa dôsledku za definíciou 1.4 k danej ploche $\boldsymbol{P}$ a rovinám α, α' požadovaných vlastností existuje perspektívna afinita $f : \alpha \cap \boldsymbol{P} \rightarrow \alpha' \cap \boldsymbol{P}$. Ak označíme g rovnobežné premietanie, vzťah priemetov rovinných rezov vyjadruje nasledujúci diagram:

$$\begin{array}{ccc} (\alpha \cap \boldsymbol{P}) & \xrightarrow{f} & (\alpha' \cap \boldsymbol{P}) \\ {}^{g}\downarrow & & {}^{g}\downarrow \\ (\alpha \cap \boldsymbol{P})_1 & & (\alpha' \cap \boldsymbol{P})_1 \end{array}$$

Pretože roviny α, α' nie sú premietacie, rovnobežné premietanie g zúžené na tieto roviny určuje perspektívnu afinitu medzi každou z nich a jej priemetom do priemetne. Je zrejmé, že kompozícia $g \circ f \circ (g/\alpha)^{-1}$ je afinitou medzi rovnobežnými priemetmi rovinných rezov plochy $\boldsymbol{P}$ rovinami α a α' (rovnobežné priemety majú dolný index „1“). Silno samodružnou priamkou tejto afinity je priemet priesečnice rovín $\alpha \cap \alpha'$, ide teda o perspektívnu afinitu, čo bolo treba dokázať.

2 Obraz kružnice v afinite

Definícia 2.1

Obraz kružnice v afinite f, ktorá nie je zhodnosťou ani podobnosťou[8], sa nazýva *elipsa*. Obraz priemeru kružnice nazývame *priemer elipsy* a obrazy dvoch navzájom kolmých priemerov kružnice *združené priemery elipsy*. *Dotyčnicou elipsy* nazývame priamku, ktorá má s elipsou práve jeden spoločný bod a *sečnicou elipsy* priamku, ktorá má s elipsou spoločné práve dva body. Obrazom tetivy kružnice je *tetiva elipsy*.

---

[6] Ak bod M leží na priamke incidentnej s niektorou stranou trojuholníka ABC, dôkaz je analogický, pozostáva len z jedného kroku.
[7] Touto priamkou môže byť i ľubovoľná tvoriaca priamka alebo os plochy.
[8] Syntetický výklad zhodnostných a podobnostných zobrazení a ich aplikácie v riešení úloh je stručne zhrnutý v učebnom texte [6].

Poznámka

Z vlastností afinity je zrejmé, že dotyčnica, resp. sečnica elipsy k' je obrazom dotyčnice, resp. sečnice kružnice k v afinite f: $k \mapsto k'$.

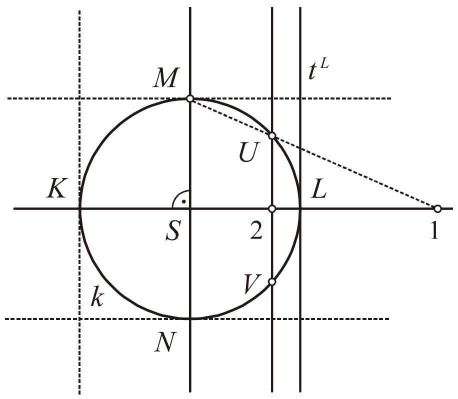
Dôsledok (priamy dôsledok definície)

1. Rovinným rezom kružnicovej valcovej plochy rovinou, ktorá nie je osnovovou rovinou vzhľadom na danú plochu, je elipsa alebo kružnica.
2. Rovnobežným priemetom kružnice, ktorej rovina nie je premietacia, je elipsa alebo kružnica.

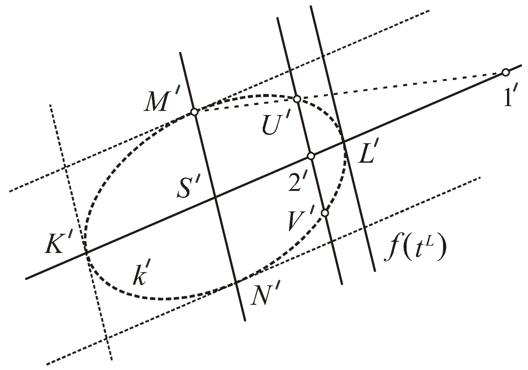
V ďalšom texte sa budeme venovať odvodeniu vlastností elipsy, jej priemeru, združených priemerov a dotyčníc. Dokážeme, že elipsa je stredová krivka a má dve osi súmernosti prechádzajúce jej stredom. Odvodíme aj niektoré, z rozličných hľadísk dôležité afinné bodové konštrukcie elipsy [9], ohniskovú „definíciu“ elipsy pomocou vety Queteletovej-Dandelinovej o rovinných rezoch rotačnej valcovej plochy a poznatok o rovnobežnom priemete guľovej plochy.

Nech $f:(\alpha) \to (\alpha')$ je ľubovoľná afinita a $k \subset (\alpha)$ ľubovoľná kružnica so stredom S. Ak označíme KL ľubovoľný z priemerov kružnice k, tak pre jeho obraz $K'L'$ v danej afinite f platí: $(K'L'S') = (KLS) = -1$. To znamená, že elipsa $k' = f(k)$ má *stred súmernosti*.

Označme ďalej MN priemer kružnice, ktorý je kolmý na priemer KL. (obr. 6). Skúmajme invariantné vlastnosti oboch priemerov vzhľadom na afinitu f. Nech t^L je dotyčnica kružnice k v bode L. Táto dotyčnica je rovnobežná s priamkou MN, čo podľa vlastností 4, 5 afinných zobrazení (vyplývajúcich priamo z definície) znamená, že $f(t^L)$ je dotyčnica elipsy k' rovnobežná s priamkou $f(MN) = \overleftrightarrow{M'N'}$. Úsečky $K'L'$ a $M'N'$ sú združenými priemermi elipsy k', odkiaľ vyplýva vlastnosť dotyčníc v krajných bodoch daného priemeru elipsy uvedená v nasledujúcej vete v bode 2.



Obr. 6a



Obr. 6b

Nech je UV sečnicou kružnice k, ktorá je rovnobežná s priemerom MN a nie je priemerovou priamkou. Potom sú navzájom rovnobežné i priamky $U'V'$ a $M'N'$ [10]. Konštrukcia tetivy $U'V'$ elipsy k' je zrejmá; stačí použiť rovnosť nasledujúcich dvojíc deliacich pomerov (podľa obrázka): $(M'U'1') = (MU1)$, $(U'V'2') = (UV2) = -1$, kde $1 = \overleftrightarrow{MU} \cap \overleftrightarrow{KL}$ a $2 = \overleftrightarrow{UV} \cap \overleftrightarrow{KL}$ (konštrukcia obrazov bodov 1, 2 je triviálna). Z toho vyplývajúci

[9] Prioritným cieľom je aplikácia v deskriptívnej geometrii, predovšetkým poznatky o priemete kružnice a elipsy v rovnobežnom i stredovom premietaní.

[10] ***U′*** znamená všade ďalej obraz útvaru ***U*** v danej afinite *f*.

poznatok o množine stredov všetkých tetív elipsy rovnobežných s jedným jej priemerom je sformulovaný v bode 3 nasledujúcej vety.

Veta 2.1

1. Elipsa má *stred súmernosti* (je stredová krivka).
2. Dotyčnice v krajných bodoch priemeru elipsy sú rovnobežné so združeným priemerom.
3. Sečnice elipsy, ktoré sú rovnobežné s jedným z jej priemerov, sú združeným priemerom rozpoľované.

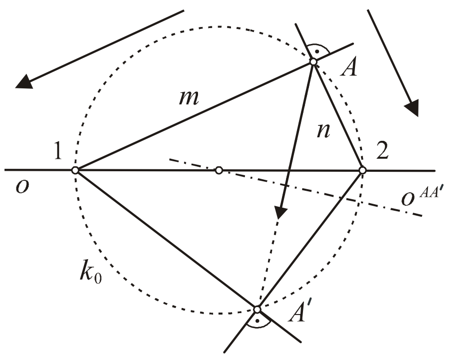
Dokážeme ďalej, že elipsa má dve navzájom kolmé osi súmernosti. K tomu je potrebné uviesť pojem tzv. *hlavných smerov* afinity.

Definícia 2.2

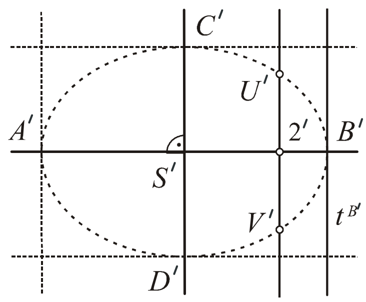
Dve navzájom kolmé osnovy priamok, ktorých obrazy v danej afinite *f* sú navzájom kolmé osnovy priamok, nazývame *hlavné smery* afinity *f*.

*Poznámka***.** Najprv dokážeme korektnosť definície, teda existenciu dvoch osnov priamok požadovaných vlastností. Podľa dôsledku 1 za vetou 1.3 stačí dokázať existenciu hlavných smerov v ľubovoľnej perspektívnej afinite dvoch súmiestnych rovinných polí. Vyplynie to z nasledujúcej konštrukcie.

Nech $f:(\alpha)\rightarrow(\alpha')$ je ľubovoľná perspektívna afinita, ktorá nie je pravouhlá ($f(o;\, A,\, A')$). Zostrojíme priamky patriace do hlavných smerov a prechádzajúce bodom *A*. Ak existuje dvojica priamok *m*, *n* požadovanej vlastnosti a označíme ich samodružné body 1, 2, tak platí: $\angle 1A2 \cong \angle 1A'2 \cong$ R (R je označenie pravého uhla). Body *A*, *A′* teda ležia na kružnici k_0 s priemerom v priamke *o*. Táto pomocná kružnica má stred na priamke *o* a na osi úsečky *AA′*, čím je určená. Jej priesečníky s osou *o* afinity *f* sú body 1, 2 a hľadané priamky patriace do hlavných smerov sú priamky $\overleftrightarrow{1A}$, $\overleftrightarrow{2A}$. (Obr. 7a)



Obr. 7a



Obr. 7b

V prípade pravouhlej afinity, ktorá nie je osovou súmernosťou, patria do hlavných smerov priamky *o* a $\overleftrightarrow{AA'}$; v prípade osovej súmernosti je takých dvojíc priamok nekonečne mnoho (prečo?).

Ak priemery *KL*, *MN* kružnice *k* (z predchádzajúcej konštrukcie, obr. 6) patria do hlavných smerov afinity *f*, tak vlastnosť 3 elipsy z vety 2.1 znamená, že priamky $\overleftrightarrow{K'L'}$ a $\overleftrightarrow{M'N'}$ sú osami súmernosti elipsy k' (ak *f* nie je osovou súmernosťou). Na obr. 7b sú priemery elipsy na jej hlavnej, resp. vedľajšej osi označené $A'B'$, resp. $C'D'$. Môžeme teda definovať:

Definícia 2.3

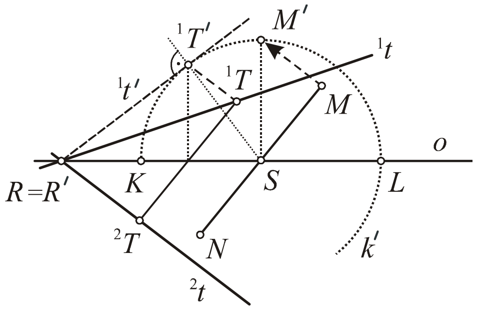
1. Stred súmernosti elipsy nazývame *stredom elipsy*.
2. Osi súmernosti elipsy budeme nazývať *osami elipsy*.
3. *Hlavná os* elipsy sa nazýva tá z oboch osí, pre ktorú priemer s ňou incidentný je väčší; druhá z osí je *vedľajšou osou* elipsy. Pod pojmom hlavná a vedľajšia os elipsy rozumieme niekedy i priemer elipsy na tejto osi ležiaci, hovoríme potom o dĺžke hlavnej a dĺžke vedľajšej osi elipsy.

V riešení nasledujúcich príkladov budeme demonštrovať použitie osovej afinity na riešenie konštrukčných úloh o elipse (konštrukcia dotyčníc elipsy požadovanej vlastnosti, konštrukcia osí elipsy, ak poznáme dvojicu jej združených priemerov, a pod.). Metódou riešenia všetkých úloh bude použitie vhodnej osovej afinity, ktorá zobrazí danú elipsu do kružnice. Toto možno urobiť nekonečne mnoho spôsobmi; za os afinity si možno zvoliť ľubovoľnú priamku rovinného poľa danej elipsy. Vhodný výber osi afinity môže riešenie úlohy značne zjednodušiť.

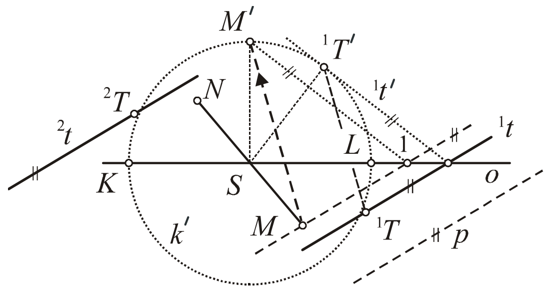
Príklad 1. Daná je elipsa k dvojicou združených priemerov KL, MN. Zostrojte dotyčnice elipsy k, ktoré: a) prechádzajú daným bodom R priemerovej[11] priamky KL; b) sú rovnobežné s ľubovoľnou danou priamkou p.

Riešenie

a) Zvoľme si osovú afinitu f s osou napr. v priamke $o = \overleftrightarrow{KL}$.[12] Afinitu dourčíme obrazom $f(M) = M'$ bodu M tak, aby obrazom elipsy k bola kružnica k'. Obrazom združených priemerov elipsy musia byť navzájom kolmé priemery kružnice; ak vezmeme do úvahy incidenciu $KL \subset o$, t. j. $K = K'$ a $L = L'$, kružnica k' je určená priemerom $K'L'$. Bod M' kružnice možno vybrať dvoma spôsobmi tak, aby priemer $M'N'$ bol kolmý na os afinity (obr. 8a). Ďalšia konštrukcia je zrejmá z definície a vlastností elipsy. Hľadané dotyčnice sú obrazom dotyčníc kružnice k' prechádzajúcich samodružným bodom $R' = R$ v inverznej afinite f^{-1}. (Zrejme stačí zostrojiť jednu z nich a použiť vlastnosť 3 z vety 2.1.)



Obr. 8a



Obr. 8b

b) Perspektívnu afinitu f si zvoľme analogicky ako v riešení predchádzajúcej úlohy tak, aby $f(k) = k'$ bola kružnica (f ($o = \overleftrightarrow{KL}$; M, M'). Dotyčnice elipsy požadovanej vlastnosti sa

---

[11] Priemerovou priamkou elipsy k nazývame každú priamku incidentnú s ľubovoľným jej priemerom.

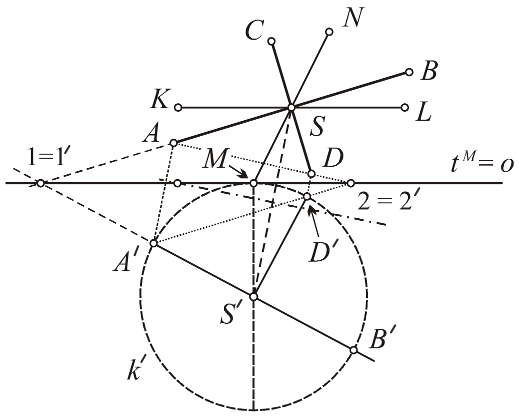
[12] Motivácia pre voľbu osi afinity je zrejmá; ležia na nej tri body K, L, R, ktoré sú samodružnými bodmi zobrazenia.

v zobrazení f zobrazia do dotyčníc kružnice k', ktoré sú rovnobežné s priamkou $f(p) = p'$. Je preto výhodné umiestniť priamku p do bodu M; jej obraz p' bude určený samodružným bodom $1 = 1'$ tejto priamky a bodom M' (to isté možno dosiahnuť konštrukciou priamky rovnobežnej s priamkou p a prechádzajúcej bodom M) (obr. 8b). Riešením úlohy sú obrazy dotyčníc kružnice k' rovnobežných s priamkou $\overleftrightarrow{M'1}$ v inverznej afinite f^{-1}. Navyše sú obe dotyčnice súmerné podľa stredu S elipsy, čo možno pri konštrukcii výhodne použiť.

Príklad 2. Daná je elipsa k dvojicou združených priemerov KL, MN. Zostrojte jej osi AB, CD.

Riešenie

Zvoľme si vhodnú perspektívnu afinitu $f:(\alpha)\to(\alpha')$, ktorá danú elipsu k zobrazí do kružnice k'. Aby sa konštrukcie vzorov a obrazov útvarov neprekrývali, zvoľme si za os afinity dotyčnicu v krajnom bode niektorého z priemerov, napr. v bode M a kružnicu k' zostrojíme v polrovine opačnej k polrovine s hranicou v tejto dotyčnici obsahujúcej danú elipsu. Priamka $t^M = o = o'$ je dotyčnicou hľadanej kružnice, odkiaľ vyplýva konštrukcia jej stredu S'. Priemer tejto kružnice je totiž zhodný s priemerom KL elipsy k ($KL \,||\, o \Rightarrow KL \cong K'L'$) (obr. 9). Priemery $A'B'$, $C'D'$ kružnice k', ktoré sa zobrazia do osí elipsy, ležia na priamkach patriacich do hlavných smerov afinity f, odkiaľ je zrejmá ich konštrukcia (konštrukcia hlavných smerov je vysvetlená v poznámke za definíciou 2.2). Na obrázku je zostrojený len kolmý polpriemer $S'D'$ k priemeru $A'B'$ kružnice k'.



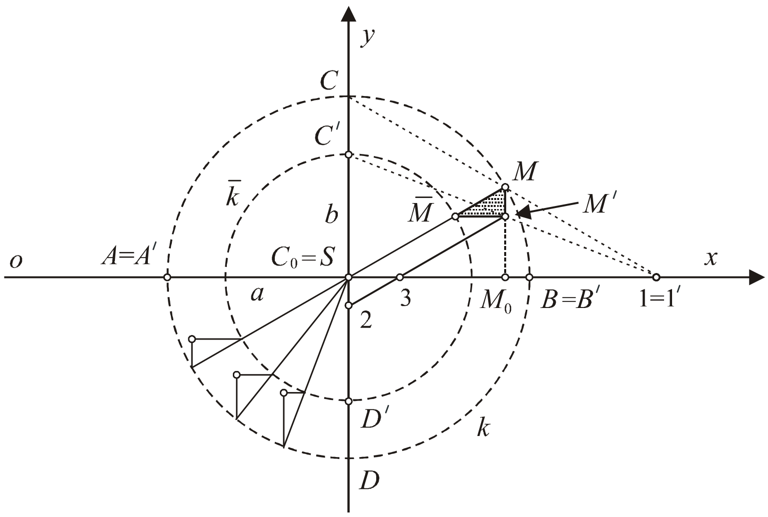
Obr. 9

2.1 Afinné konštrukcie elipsy a jej dotyčníc

V nasledujúcom texte odvodíme niektoré, pre deskriptívnu geometriu veľmi užitočné bodové konštrukcie elipsy a jej dotyčníc. Tieto konštrukcie sú odvodené z perspektívnej afinity medzi kružnicou a elipsou, preto ich nazývame afinnými konštrukciami elipsy. Bude to: *trojuholníková* a *prúžková* bodová konštrukcia, *Rytzova konštrukcia* osí elipsy z dvojice jej združených priemerov, *priečková* konštrukcia a konštrukcia dotyčníc elipsy rovnobežných s danou priamkou. Nejde len o bodové či dotyčnicové konštrukcie elipsy; ukážeme si aj niektoré ich aplikácie v riešení rozmanitých úloh o tejto krivke.

a) Trojuholníková a prúžková bodová konštrukcia elipsy

Nech $k \subset \alpha$ je ľubovoľná kružnica a AB, CD ($CD \perp AB$) dva jej priemery. Zvoľme si ľubovoľnú pravouhlú perspektívnu afinitu f v rovine α (s osou $o = \overleftrightarrow{AB}$), t. j. $f:(\alpha)\to(\alpha')$, $f(o;C,C')$, kde bod $C'(C' \neq S)$ je vnútorným bodom priemeru CD. Obrazom kružnice k v tejto afinite je elipsa $k' = f(k)$ s osami $A'B'$, $C'D'$ ($A' = A, B' = B$). Označme si: $|AB| = 2a, |C'D'| = 2b$. Pre obraz M' ľubovoľného bodu M kružnice k platí $(M'MM_0)$ = ($C'CC_0$) = b/a (charakteristika afinity f). Ale ($C'CC_0$) = ($\overline{M}MC_0$), kde $\overline{M} \in C_0M \cap \overline{k}$ ($\overline{k}$ je kružnica s priemerom $C'D'$), t. j. ($\overline{M}MC_0$) = $(M'MM_0)$; to platí práve vtedy, keď sú priamky $\overline{M}M'$ a C_0M_0 navzájom rovnobežné. Z toho vyplýva tzv. *trojuholníková bodová konštrukcia elipsy* (na obr. 10 sú vrcholy pravých uhlov niekoľkých vyznačených trojuholníkov bodmi elipsy k'). [13]



Obr. 10

V tej istej konštrukcii zostrojme bod $2 \in CD$ tak, aby útvar $SMM'2$ bol rovnobežníkom a označme: $3 = 2M' \cap o$. Pretože aj útvar $S\overline{M}M'3$ je rovnobežník, platí: $|M'2| = a, |M'3| = b.$ To znamená, že ak sa pohybuje úsečka dĺžky a (s krajnými bodmi 2, M') tak, že jej krajný bod 2 sa pohybuje po priamke CD a jej vnútorný bod 3, ktorého vzdialenosť od bodu M' sa rovná b, po priamke o, tak druhý krajný bod M' opisuje elipsu k'. Túto bodovú konštrukciu nazývame rozdielová „*prúžková*“ bodová konštrukcia elipsy (možno ju vykonať pomocou prúžka papiera, na ktorom sú vyznačené body 2, 3, M' požadovaných vlastností).

b) Rytzova konštrukcia osí elipsy danej dvojicou združených priemerov

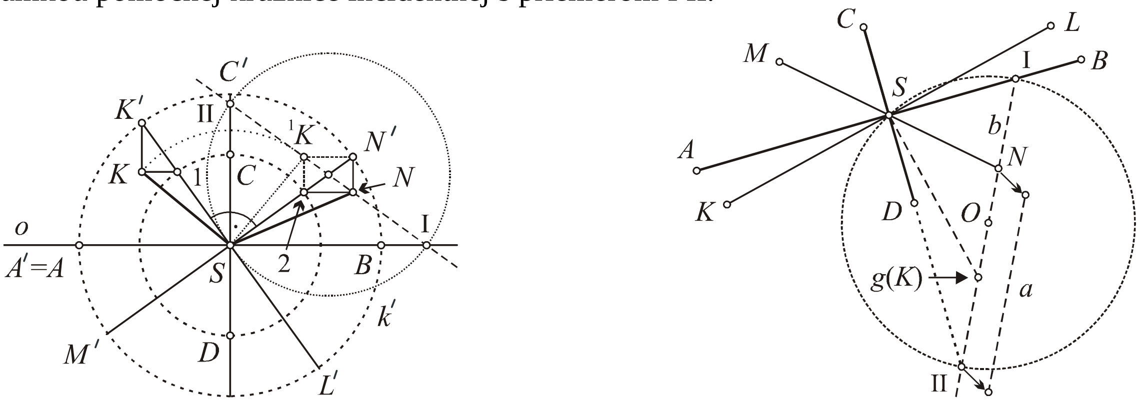
Východiskom konštrukcie je pravouhlá osová afinita $f:(\alpha')\to(\alpha)$ z trojuholníkovej bodovej konštrukcie elipsy: $f(o' = \overleftrightarrow{A'B'}; C', C)$. Zvoľme si ľubovoľné kolmé priemery $K'L'$, $M'N'$ kružnice k'; ich obrazy KL, MN v afinite f sú združenými priemermi elipsy k. Na obr. 11a) sú zostrojené pomocou trojuholníkovej konštrukcie len príslušné polpriemery.

---

[13] V ortonormálnej súradnicovej sústave s bázou <$O = S$; $x = o$, y> má daná kružnica k rovnicu: $x^2 + y^2 = a^2$ a pravouhlá osová afinita f analytické vyjadrenie: $x' = x$, $y' = (b/a)y$. Odtiaľ jednoducho vyplýva, že pre každý bod M' elipsy k' ($M' = (x_0, y_0)$ platí: $(x_0)^2/a^2 + (y_0)^2/b^2 = 1$ (*). Obrátene, každý bod, ktorého súradnice x_0, y_0 spĺňajú vzťah (*), je bodom elipsy k'. To znamená, že rovnica: $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ je v danej báze rovnicou elipsy k'.

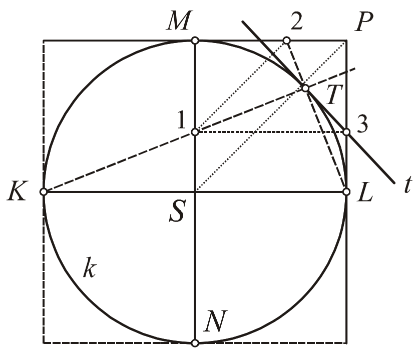
Budeme hľadať odpoveď na otázku, aký je vzťah združených priemerov *KL*, *MN* elipsy *k* a jej osí *AB*, *CD*.

Nech g je otočenie v rovine kružnice so stredom v bode *S*, pre ktoré $g(K') = N'$, t. j. ide o otočenie o pravý uhol. Platí: $\Delta K'K1 \cong \Delta 2NN'$ (usu) (ide o trojuholníky z trojuholníkovej bodovej konštrukcie bodov *K* a *N* elipsy *k*), t. j. bod $g(K) = {}^1K$ je štvrtým vrcholom obdĺžnika s tromi zvyšnými vrcholmi 2, N, N'. Ak označíme priesečníky priamky prechádzajúcej jeho uhlopriečkou $N\,{}^1K$ s hlavnou, resp. vedľajšou osou elipsy rímskymi číslicami I, resp. II, platí: $\mathrm{I}N \cong S2 \cong \mathrm{II}\,{}^1K$, $\mathrm{I}\,{}^1K \cong SN' \cong \mathrm{II}N$, (I II *O*) = – 1 (*O* je stred spomenutého obdĺžnika) a $\angle \mathrm{I}\, S\, \mathrm{II} \cong$ R.[14] Týmito vzťahmi – pri danej dvojici združených priemerov *KL*, *MN* – je daná konštrukcia bodov I, II ležiacich na hľadaných osiach elipsy. Na obrázku 11b je urobená konštrukcia bez kružnice $k' = f^{-1}(k)$. Bod *g*(*K*) je otočenou polohou bodu *K*, priamka $g(K)N$ je priemerovou priamkou pomocnej kružnice incidentnej s priemerom I II.

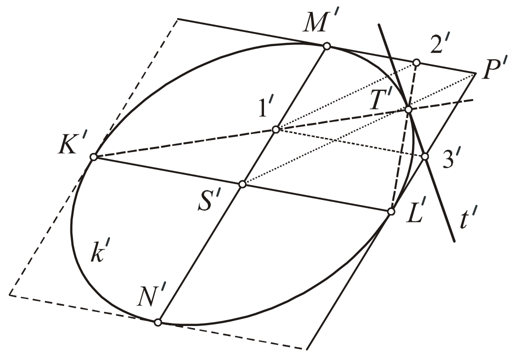


Obr. 11a, b

c) Priečková bodová konštrukcia elipsy danej dvojicou združených priemerov



Obr. 12a



Obr. 12b

Najprv dokážeme správnosť jednej bodovej konštrukcie kružnice *k*, ktorá je daná dvojicou kolmých priemerov *KL*, *MN*. Invariantnosť tejto konštrukcie vzhľadom na ľubovoľnú afinitu zaručuje jej platnosť i pre elipsu. Nech bod *P* je jedným vrcholom štvorca dotýkajúceho sa kružnice *k* v krajných bodoch jej daných kolmých priemerov (obr. 12a). Zvoľme si ľubovoľný vnútorný bod jedného z daných priemerov (okrem stredu *S* kružnice *k*), napr. bod $1 \in MN$ a zostrojme bod $2 \in PM$ tak, aby priamka 12 bola rovnobežná s priamkou *PS*. Potom priesečník *T* priamok *K*1 a *L*2 je bodom kružnice *k* a navyše, priamka *T*3 (kde bod 3 je

14 Bod *O* je stredom kružnice s priemerom I II, incidentnej so stredom *S* elipsy *k*.

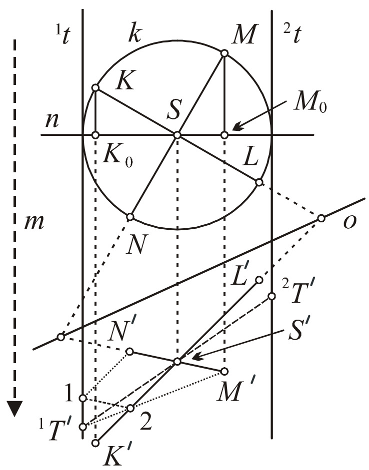
štvrtým vrcholom rovnobežníka so zvyšnými tromi vrcholmi 1, S, L) je dotyčnicou kružnice k v bode T. [15]

Pomocou perspektívnej afinity možno odvodiť aj nasledujúcu konštrukciu dotyčníc danej elipsy, patriacich do danej osnovy navzájom rovnobežných priamok. Pre jej jednoduchosť ju zaraďujeme medzi najdôležitejšie konštrukcie, s ktorými sa budeme stretať v deskriptívnej geometrii pri zobrazovaní kružnicových valcových plôch v zobrazovacích metódach založených na rovnobežnom premietaní.

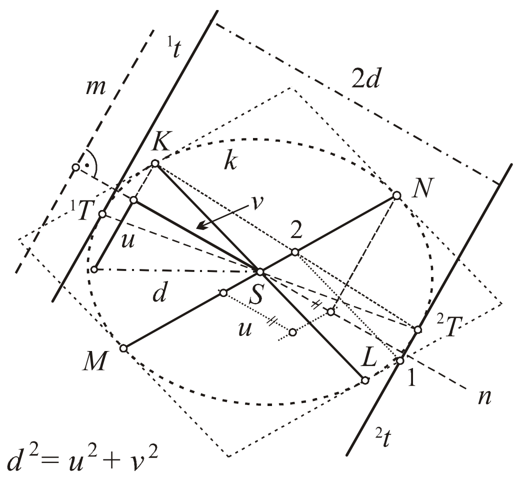
d) Nech $k \subset \alpha$ je ľubovoľná kružnica a KL, $MN \perp KL$ dvojica jej navzájom kolmých priemerov. Zvoľme si ľubovoľnú perspektívnu afinitu f (ktorá nie je zhodnostným zobrazením) v rovine α tak, aby jej os o bola rôznobežná s priamkami KL, MN a smer afinity aby patril do danej osnovy priamok $\{m\}$ (priamka m nie je pritom rovnobežná s osou o ani so žiadnym s priemerov KL, MN). Afinita f je určená: $f(o;\ S,\ S')$ ($S' \neq S$). Budeme hľadať súvislosť medzi dotyčnicami danej kružnice, ktoré sú rovnobežné s priamkou m a dvojicou daných kolmých priemerov kružnice. (Obr. 13a)

Zostrojme priemerovú priamku n kružnice k kolmú na priamku m a kolmé priemety dvoch krajných bodov navzájom rôznych priemerov tejto kružnice (napr. K, M) na priamku n; označme tieto body (v danom poradí) K_0, M_0. Platí: $\Delta KSK_0 \cong \Delta SMM_0$ (usu), t. j. $KK_0 \cong SM_0$ a môžeme vyjadriť vzdialenosť hľadaných dotyčníc kružnice k od jej stredu S takto:

$$d = \sqrt{|SK_0|^2 + |KK_0|^2} = \sqrt{|SK_0|^2 + |SM_0|^2} \qquad (1)$$



Obr. 13a



Obr. 13b

Potom dotyčnice ^it (i = 1, 2) kružnice k (požadovanej vlastnosti) sú slabo samodružnými priamkami perspektívnej afinity f a vzťah (1) vyjadruje i vzdialenosť dotyčníc elipsy $k' = f(k)$ (rovnobežných s priamkou m) od jej stredu S'. Je zrejmé, že konštrukciu dĺžky d môžeme urobiť bez toho, aby sme poznali originálnu kružnicu k; stačí poznať dvojicu združených priemerov $K'L'$, $M'N'$ elipsy k' (kolmé priemety dvoch krajných bodov rôznych priemerov

[15] V prvom prípade stačí dokázať, že uhol KTL je zhodný s pravým uhlom. To vyplýva z kolmosti dvoch dvojíc strán zhodných pravouhlých trojuholníkov $1SK$ a $2PL$ (veta sus) (prečo?). V druhom prípade rovnobežnosť priamok $K1$, $S3$ implikuje kolmosť priamok $S3$, TL; ak vezmeme do úvahy zhodnosť úsečiek SL, ST, ako aj príslušnosť bodov L, T k navzájom opačným polrovinám s hranicou $\overleftrightarrow{S3}$, znamená to, že body L, T sú súmerne združené podľa priamky $S3$. Dôsledkom je zhodnosť uhlov $SL3$ a $ST3$, čo znamená, že priamka $T3$ je dotyčnicou kružnice k.

elipsy na priamku n sú totiž tie isté body K_0, L_0, ako v prípade kružnice). Navyše priamku n si môžeme zvoliť tak, aby bola priemerovou priamkou danej elipsy. Dotykové body ${}^{i}T$ elipsy s priamkami ${}^{i}t$ (i = 1, 2) zostrojíme pomocou priečkovej bodovej konštrukcie elipsy uvedenej vyššie. (Konštrukcia bez pomocnej kružnice je bez komentára uvedená na obr. 13b. Pre zjednodušenie zápisu sú – v porovnaní s výkladom v a) – označené všetky útvary bez čiarky.)

Veta 2.2

1. (*Veta Queteletova-Dandelinova alebo* Q-D veta) Rovinným rezom rotačnej valcovej plochy rovinou, ktorá nie je osnovovou rovinou vzhľadom na plochu, ani kolmá na os plochy, je elipsa, ktorej ohniská ${}^{i}F$ (i = 1, 2) sú dotykové body guľových plôch vpísaných do danej valcovej plochy s rezovou rovinou. Vedľajšia os elipsy je zhodná s priemerom 2r valcovej plochy a hlavná os má dĺžku $2r/\sin\varphi$, kde φ je veľkosť uhla tvoriacich priamok plochy s rovinou elipsy. [16]
2. Elipsa je množina všetkých bodov roviny, ktoré majú od daných dvoch pevných bodov ${}^{i}F$ (i = 1, 2) tejto roviny konštantný súčet vzdialeností (väčší než vzdialenosť pevných bodov).
3. Elipsa je množina všetkých bodov roviny, ktoré majú od pevného bodu ${}^{i}F$ a pevnej priamky ${}^{i}f$ tejto roviny (${}^{i}F \notin {}^{i}f$) (i =1, 2) konštantný podiel vzdialeností, menší než 1.

Pred dôkazom vety definujme niektoré nové pojmy vyskytujúce sa vo vete.

Definícia 2.4

Pevné body ${}^{i}F$ (i = 1, 2) z predchádzajúcej vety sa nazývajú *ohniská elipsy* a pevné priamky ${}^{i}f$ *určujúce* (riadiace) *priamky elipsy*. Hovoríme, že *určujúca priamka* ${}^{i}f$ *prislúcha ohnisku* ${}^{i}F$ elipsy. Dĺžku úsečky ${}^{i}FS$ nazývame *lineárnou excentricitou* elipsy (s obvyklým označením e).[17]

Dôkaz (vety 2.2)

Všetky útvary budeme zobrazovať v pravouhlom premietaní do roviny π; kolmý priemet každého útvaru $\boldsymbol{U}$ do roviny π sa bude označovať indexom „1“, t. j. $\boldsymbol{U}_1$. Priemetňu π si zvoľme tak, aby prechádzala osou o plochy a bola kolmá na rovinu α rovinného rezu. Potom obrysom priemetu valcovej plochy $\boldsymbol{V}(o;\, r)$ sú tvoriace priamky a, b plochy $\boldsymbol{V}$ v priemetni, priemetom roviny α je priamka a priemetom elipsy $k = \boldsymbol{V} \cap \alpha$ je úsečka A_1B_1 ($A = a \cap \alpha$, $B = b \cap \alpha$). Vpíšme ďalej do valcovej plochy $\boldsymbol{V}$ dve guľové plochy ${}^{i}\boldsymbol{G}$ (${}^{i}S$, r) tak, aby sa dotýkali roviny α a označme: $\boldsymbol{V} \cap {}^{i}\boldsymbol{G} = \{{}^{i}l\}$, ${}^{i}l \subset {}^{i}\lambda$, ${}^{i}\boldsymbol{G} \cap \alpha = {}^{i}F$, ${}^{i}\lambda \cap \alpha = {}^{i}f$ (i = 1, 2). (Obr. 14)

1) Nech $M \in k$ je ľubovoľný bod a m tvoriaca priamka plochy ním prechádzajúca. Ak označíme $m \cap {}^{i}l = \{{}^{i}L\}$ (i = 1, 2), tak platí: $\left|M\,{}^{1}F\right| + \left|M\,{}^{2}F\right| = \left|M\,{}^{1}L\right| + \left|M\,{}^{2}L\right| = \left|{}^{1}L\,{}^{2}L\right| = \left|{}^{1}L_1\,{}^{2}L_1\right| =$ konštanta, čo je dôsledok rovnobežnosti priamky m s priemetňou. Body A, B taktiež patria elipse k, odkiaľ máme $\left|A\,{}^{1}F\right| + \left|A\,{}^{2}F\right| = \left|B\,{}^{1}F\right| + \left|B\,{}^{2}F\right| \Rightarrow A\,{}^{1}F \cong B\,{}^{2}F \wedge A\,{}^{2}F \cong B\,{}^{1}F$, t. j.

$$\left|A\,{}^{1}F\right| + \left|A\,{}^{2}F\right| = \left|A\,{}^{1}F\right| + \left|B\,{}^{1}F\right| = \left|AB\right|$$ [18]

Je zrejmé, že priamka AB je jednou osou elipsy k; druhá os $\overleftrightarrow{CD}$ je preto kolmá na priemetňu, t. j. úsečka CD je zhodná s priemerom 2r valcovej plochy $\boldsymbol{V}$. Odtiaľ vyplýva, že

---

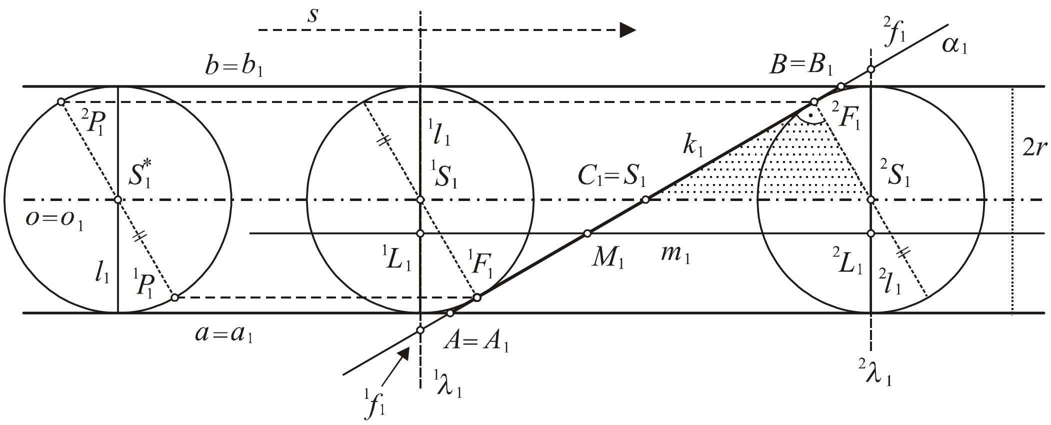
[16] Ohniská ${}^{i}F$ elipsy sú pevné body z odsekov 2, 3 tejto vety a budú sa definovať ešte pred jej dôkazom.

[17] Ak označíme 2a, resp. 2b dĺžku hlavnej, resp. vedľajšej osi elipsy, tak pre lineárnu excentricitu e danej elipsy zrejme platí vzťah: $e^2 + b^2 = a^2$. Dokážte.

[18] Skompletizovanie dôkazu (dôkaz zhodnosti dvojíc úsečiek $M\,{}^{i}F$, $M\,{}^{i}L$, ako i dvojíc úsečiek $A\,{}^{i}F$, $B\,{}^{j}F$ pre i ≠ j; i, j ∈ {1, 2}) sa ponecháva čitateľovi. Potrebné poznatky sú súčasťou cvičení.

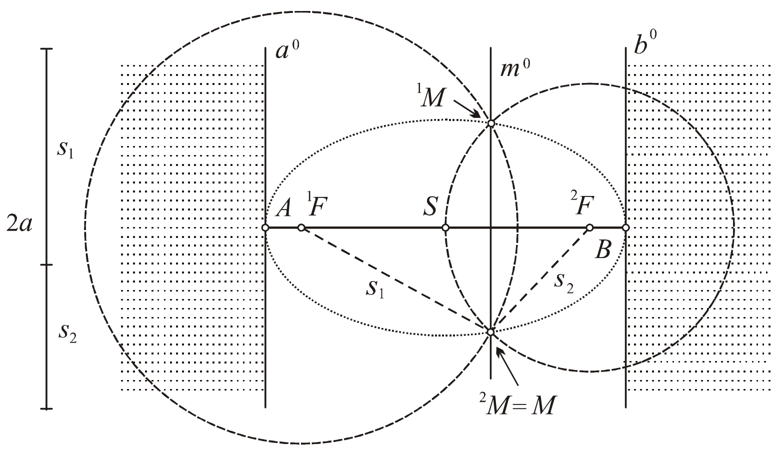
priamka AB je hlavnou osou a príslušnú konštantu môžeme označiť $2a$. Platnosť vzťahu $2a = 2r/\sin\varphi$ je zrejmá z pravouhlých trojuholníkov ${}^{i}S\,S\,{}^{i}F$ (i = 1, 2) s preponou dĺžky a a uhlom s veľkosťou φ pri vrchole S.

Ak označíme $\mathbf{M} = \{X;\ X \in \alpha \wedge |X\,{}^{1}F| + |X\,{}^{2}F| = 2a\}$, tak sme zatiaľ dokázali inklúziu $k \subset \mathbf{M}$. V ďalšej časti dokážeme, že i každý bod množiny **M** je bodom danej elipsy k.



Obr. 14

2) Najprv si odvodíme bodovú konštrukciu množiny **M,** ak sú dané pevné body ${}^{1}F$, ${}^{2}F$ a konštanta $2a > |{}^{1}F\,{}^{2}F|$. Konštrukcia bodov A, B množiny **M** na priamke ${}^{1}F\,{}^{2}F$ je zrejmá. Každý bod X množiny **M** patrí prieniku dvoch kružníc so stredmi ${}^{1}F$, ${}^{2}F$, pričom súčet dĺžok polomerov kružníc sa rovná $2a$. [19] Z tejto konštrukcie vyplýva, že všetky body množiny **M** ležia v rovinnom páse určenom priamkami a^0, b^0 (každá z priamok prechádza rovnomenným vrcholom A alebo B, leží v rovine α a je kolmá na priamku AB) a na každej priamke vo vnútri tohto rovinného pásu kolmej na priamku AB ležia najviac dva body tejto množiny. (Obr. 15)



Obr. 15

[19] Podrobne opísanú „ohniskovú" konštrukciu elipsy možno nájsť napr. v [7]; táto konštrukcia, ako aj tzv. ohniskové konštrukcie dotyčníc elipsy incidentných s daným bodom, či patriacich do danej osnovy priamok a ďalšie vlastnosti elipsy sú témou prvej samostatnej semestrálnej práce v predmete zobrazovacie metódy. Čitateľovi sa odporúča zamyslieť nad otázkou, pre aký „ľubovoľne" zvolený polomer $s_1 < 2a$ (v ohniskovej bodovej konštrukcii elipsy) jednej z kružníc sa žiaden bod elipsy nedostane a prečo.

Nech $M \in$ **M** je ľubovoľný bod rôzny od bodov A, B a $m^0 \subset \alpha$ priamka ním prechádzajúca, kolmá na priamku AB. Táto priamka má s elipsou k spoločné práve dva body ${}^1M$, ${}^2M$. Podľa bodu 1) dôkazu platí: ${}^iM \in$ **M**; ale pretože na priamke m^0 ležia najviac dva body množiny **M**, je ${}^1M = M$ alebo ${}^2M = M$. To znamená, že bod M je bodom elipsy k. Dokázali sme, že $\mathbf{M} \subset k$. *Záver*: $k = \mathbf{M}$, čo bolo treba dokázať.

3) Vráťme sa k pôvodnej priestorovej konštrukcii (obr. 14). Z podobnosti pravouhlých trojuholníkov $\Delta M_1\,{}^iL_1\,{}^if_1$ a $\Delta S_1\,{}^iF_1\,{}^iS_1$ (veta uu) vyplýva pre ľubovoľný z indexov $i \in \{1, 2\}$:

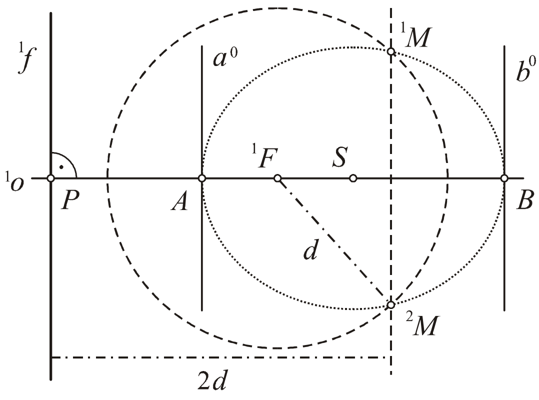
$$\frac{|M\,{}^iF|}{|M\,{}^if|} = \frac{|M\,{}^iL|}{|M\,{}^if|} = \frac{|M_1\,{}^iL_1|}{|M_1\,{}^if_1|} = \frac{|S_1\,{}^iF_1|}{|S_1\,{}^iS_1|} = \frac{e}{a} < 1.$$

Ak označíme:

$$\mathbf{N} = \{X\colon X \in \alpha \wedge \frac{|X\,{}^iF|}{|X\,{}^if|} = \frac{e}{a}\},$$

tak sme dokázali, že $k \subset \mathbf{N}$. Analogickým uvažovaním ako v časti 2 dôkazu vyplýva z bodovej konštrukcie množiny **N** platnosť $\mathbf{N} \subset k$. *Záver*: $k = \mathbf{N}$, čo bolo treba dokázať.

Urobíme ešte bodovú konštrukciu množiny **N** pre daný bod ${}^1F$, priamku ${}^1f$ roviny α a pre pomer $e : a = 1 : 2$ (obr. 16). Zostrojme najprv body množiny **N** na priamke ${}^1o$ (priamka ${}^1o$ leží v rovine α, prechádza ohniskom ${}^1F$ a je kolmá na určujúcu priamku ${}^1f$ tomuto ohnisku prislúchajúcu). Takéto body sú práve dva; sú to body A, B pre ktoré: $({}^1FPB) = -({}^1FPA) = 1/2$ ($P = {}^1o \cap {}^1f$). Pretože $X\,{}^iF < X\,{}^if$, všetky ďalšie body množiny **N** ležia vo vnútri rovinného pásu určeného priamkami a^0, b^0, ktoré prechádzajú v danom poradí bodmi A, B a sú kolmé na priamku ${}^1o$. Zostrojme ľubovoľný bod M tak, aby sa jeho vzdialenosť od určujúcej priamky ${}^1f$ rovnala predpísanému kladnému reálnemu číslu $2d$ a vzdialenosť od ohniska ${}^1F$ sa rovnala d. (Diskusia o vhodnom výbere čísla $2d$ sa ponecháva čitateľovi.) Konštrukcia pre vyhovujúce číslo $2d$ je triviálna.



Obr. 16

Dôsledok Queteletovej-Dandelinovej vety

Rovnobežným priemetom guľovej plochy $\boldsymbol{G}(S, r)$ do roviny je elipsa a jej vnútro alebo kruh. Ohniská elipsy sú priemety krajných bodov priemeru guľovej plochy kolmého na priemetňu a jej vedľajšia os je zhodná s priemerom guľovej plochy.[20]

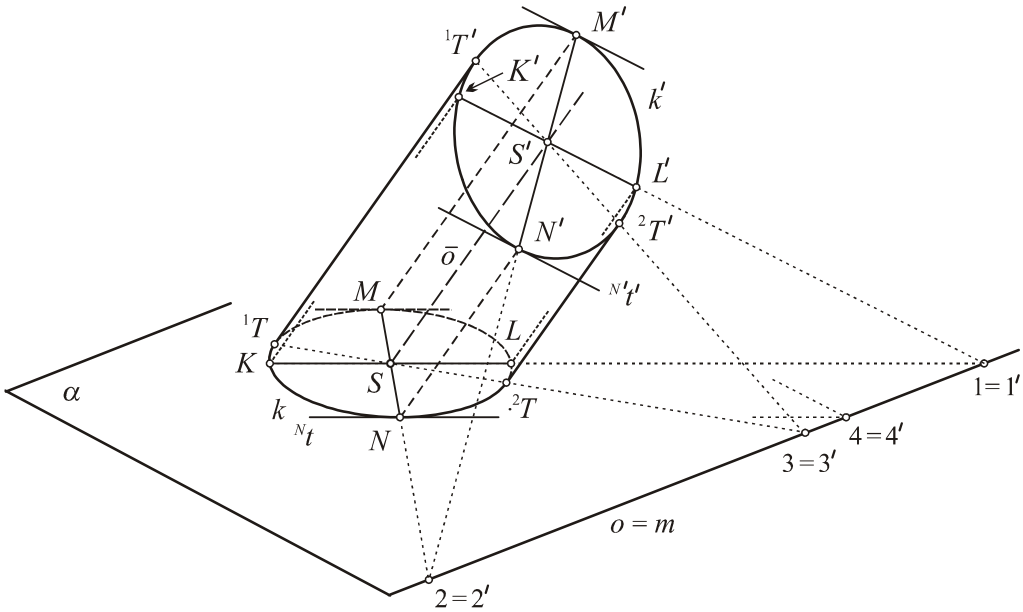
[20] Tento poznatok (priamy dôsledok Q-D vety) rozšíril na rotačné kvadratické plochy významný český geometer svetového mena *Karel Pelz* (1845 – 1908). Pelz považoval túto vetu za jednu z najdôležitejších viet deskriptívnej

V dôkaze tvrdenia si stačí zvoliť ľubovoľnú guľovú plochu, pre ktorú je valcová plocha ***V*** z dôkazu Q-D vety hranicou jej premietacieho útvaru a priemetňu v rovine α (dôsledok samozrejme platí aj pre ľubovoľnú z plôch $^{i}\boldsymbol{G}$). Treba si uvedomiť, že plocha ***G*** je s každou z plôch $^{i}\boldsymbol{G}$ zhodná (príslušné zhodnostné zobrazenie je posunutím, ktorého smer je rovnobežný s osnovou premietania).[21]

Príklad 3. Vo voľnom rovnobežnom premietaní je daná kružnicová valcová plocha ***V*** určujúcou kružnicou *k* v rovine α a osou $\bar{o}$. Ďalej je daná rovina β, ktorá prechádza priamkou *m* roviny α a bodom S' ležiacim na osi valcovej plochy ***V*** (obr. 17). Zobrazte rovinný rez danej valcovej plochy rovinou β.

Riešenie

1. Najprv zostrojme obrys priemetu valcovej plochy ***V***. Sú ním dotyčnice elipsy *k* (priemet rovnomennej kružnice) rovnobežné s priemetom osi $\bar{o}$; tieto zostrojíme – vrátane dotykových bodov ^{1}T, ^{2}T – podľa afinnej konštrukcie dotyčníc elipsy (bod **d)**, obr. 13b). (Rovnobežný priemet kružnice *k* si zvoľme ľubovoľne dvojicou združených priemerov *KL*, *MN*.)



Obr. 17

2. Podľa dôsledku za definíciou 1.4 a dôsledku 1 definície 2.1 platí: a) Rovinným rezom kružnicovej valcovej plochy *V* rovinou β je elipsa alebo kružnica ($\beta \cap V = k'$); b) Medzi rovnobežnými priemetmi kriviek *k* a k' je vzťah perspektívnej afinity *f*, ktorej osou je priemet

geometrie. Na stereografickom premietaní demonštroval, ako z nej temer spontánne vychádzajú všetky vlastnosti tohoto zobrazenia. O živote a diele Karla Pelza sa možno dozvedieť v článku [7].

[21] Nech je $\boldsymbol{G} = (S^*, r)$ ľubovoľná guľová plocha vpísaná do danej rotačnej valcovej plochy ***V*** (z vety 2.1, obr. 14). Uvažujme o rovnobežnom premietaní do roviny α, do osnovy ktorého patrí os *o* valcovej plochy. Hranicou premietacieho útvaru guľovej plochy ***G*** je daná rotačná valcová plocha ***V***; obrysom priemetu tejto guľovej plochy je preto elipsa $k = \alpha \cap \boldsymbol{V}$. Guľová plocha $^{i}\boldsymbol{G}$ ($i \in \{1, 2\}$) je obrazom plochy ***G*** v rovnobežnom posunutí ^{i}g, ktoré zobrazí bod S^* do bodu ^{i}S. Obrazom priamky v posunutí je priamka s ňou rovnobežná, čo pre priemer $^{1}P\ ^{2}P$ guľovej plochy ***G*** kolmý na rovinu α znamená, že sa zobrazí do priemeru plochy $^{i}\boldsymbol{G}$ s tou istou vlastnosťou. Z dotyku guľových plôch $^{i}\boldsymbol{G}$ s rovinou α je potom zrejmé, že $^{i}g(^{i}P) = {}^{i}F$ (^{1}F, ^{2}F sú ohniská elipsy *k*) ($i = 1, 2$).

priesečnice rovín $\alpha \cap \beta = \{m\}$ a dvojicu bodov *vzor – obraz* tvoria priemety priesečníkov osi plochy s oboma rovinami, t. j. v danom poradí bodov S, S' [22] (bod S je stredom určujúcej kružnice k plochy).

$f : (\alpha) \to (\alpha')$, $f(o = m; S, S')$

3. Priemet rovinného rezu k' je určený združenými priemermi $K'L'$, $M'N'$, ktoré sú obrazom priemetov daných združených priemerov KL, MN priemetu kružnice k v perspektívnej afinite f. (Na obrázku sú samodružné body priemerových priamok s nimi incidentných označené $1 = 1'$ a $2 = 2'$). Body ${}^1T'$, ${}^2T'$ (obrazy dotykových bodov ${}^1T$, ${}^2T$ v afinite f), sú dotykovými bodmi priemetu rezovej krivky s obrysom priemetu plochy. Tieto body oddeľujú viditeľnú časť krivky k' od jej neviditeľnej časti [23]. Táto viditeľnosť je určená ľubovoľne zvolenou viditeľnosťou určujúcej kružnice k plochy v danom rovnobežnom premietaní.

3 Cvičenia

1. a) Vyjadrite nevyhnutnú a dostačujúcu podmienku na to, aby bolo možné utvoriť kompozíciu dvoch afinných zobrazení $f = {}^2f \circ {}^1f$, ak ${}^1f : (\alpha) \to (\alpha_1)$, ${}^2f : (\beta) \to (\beta_2)$.
   b) Nech každé z rovinných polí (α_1), (β_2) z a) obsahuje nekonečne mnoho bodov. Môže byť ${}^2f \circ {}^1f\ (\alpha)$ jednobodová množina? (Uveďte príklad.)
2. Nech je f rovnobežné premietanie v rovine α na priamku p tejto roviny dané osnovou priamky m ($m \subset \alpha \wedge m \not\parallel p$) (*osnova premietania f*). Dokážte, že f je afinné zobrazenie. V ktorom prípade sa trojica kolineárnych bodov zobrazí do toho istého bodu?
3. Dokážte, že všetky neidentické zhodnostné a podobnostné zobrazenia medzi dvoma rovinami (i v tej istej rovine) sú afinitami.
4. Vymenujte známe neidentické zhodnostné zobrazenia roviny na seba a určite samodružné body a priamky nasledujúcich z nich: posunutie, otočenie so stredom S o uhol α ($/\alpha/ \neq \pi$), stredová súmernosť, osová súmernosť s osou o, rovnoľahlosť so stredom v bode S a charakteristikou k ($/k/ \neq 1$). Ktoré zo samodružných prvkov sú silno samodružné, a ktoré sú slabo samodružnými prvkami zobrazenia? Uveďte príklady rovinných útvarov, ktoré sú samodružnými útvarmi v danom zobrazení.
5. Dané sú body A, B ($B \neq A$) a kladné reálne číslo λ ($\lambda \neq 1$). Zostrojte bod M tak, aby $(ABM) = \lambda$. (Zvoľte si najprv $\lambda = p/q$, kde p, q sú celé kladné čísla.)
6. Vykonajte dôkaz bodu 3 z vety 1.1 učebného textu.
7. Pomer obsahov rovinných útvarov tej istej roviny α je invariantom ľubovoľnej afinity $f : (\alpha) \to (\alpha_1)$. Dokážte.
8. Daný je rovnobežník, ktorého dve strany tvoria ľubovoľné združené polpriemery danej elipsy. Určite jeho obsah, ak $2a$, $2b$ sú dĺžky osí elipsy.
9. „Medzi rovnobežnými priemetmi útvarov roviny α, ktorá nie je premietacia ani rovnobežná s priemetňou, a medzi otočenými polohami týchto bodov v otáčaní roviny α

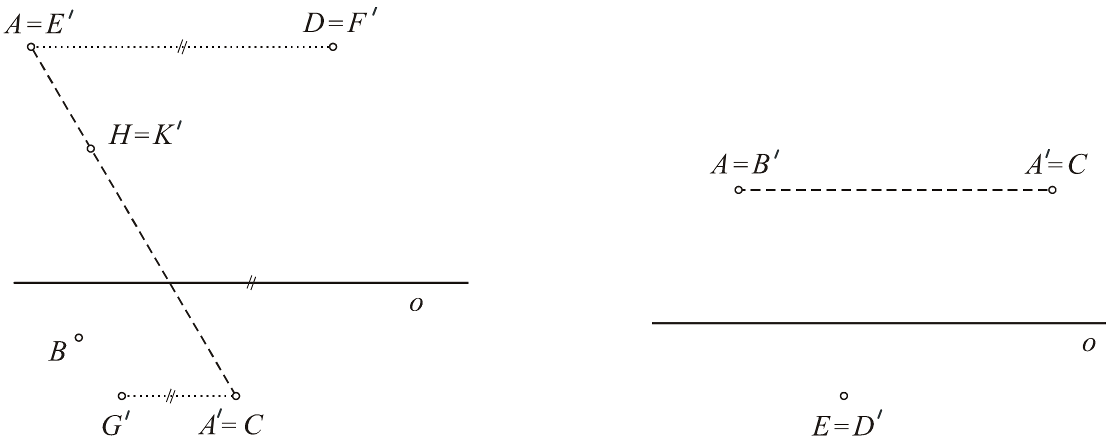
---

[22] Podľa dohody sa objekty a ich rovnobežné priemety vo voľnom rovnobežnom premietaní zobrazujú tým istým znakom.

[23] Na obr. 17 je zobrazená len časť kružnicovej valcovej plochy (medzi rovinami α, β); preto je v skúmanom prípade krivka k' viditeľná celá, z kružnice k polkružnica prechádzajúca bodom N a obrysu zvolenej časti plochy patria ešte úsečky ${}^iT\,{}^iT'$ (i = 1, 2).

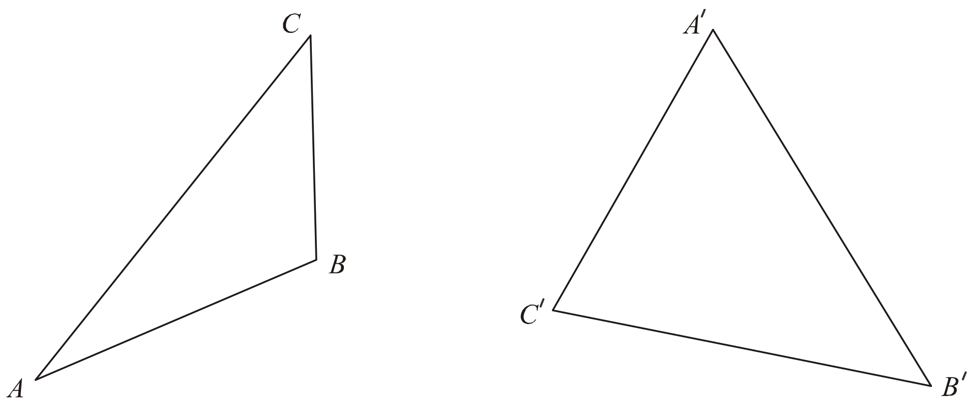
do priemetne je vzťah perspektívnej afinity, ktorej osou je priesečnica roviny α s priemetňou“. Dokážte! O akú afinitu ide v prípade kolmého premietania?

10. Nech $f: (\alpha) \rightarrow (\alpha_1)$ je perspektívna afinita súmiestnych rovinných polí s osou o, osnovou $\{m\}$ slabo samodružných priamok a charakteristikou k ($k \notin \{0, 1\}$). Zostrojte obraz, resp. vzor ľubovoľného bodu M, resp. K_1 neležiacich na osi afinity. Zvoľte si k ľubovoľné racionálne číslo kladné i záporné.
11. V danej perspektívnej afinite f (o; A, A') dvoch súmiestnych rovinných polí zostrojte obraz (vzor) ľubovoľného bodu a priamky. V prípade b) ide o eláciu; v prípade a) si zvoľte usporiadanú dvojicu bodov A, A' aj tak, aby úsečka AA' nemala s osou o žiaden spoločný bod. Priamky si v oboch prípadoch zvoľte ľubovoľne. (Obr. 1a, b)
12. Daná je ľubovoľná nekolineárna trojica bodov A, B, C alebo A, B, S. Doplňte túto trojicu bodov na n-ticu $A, B, C, D, E, F, \ldots$ tak, aby útvar $ABCDEF\ldots$ bol rovnobežným priemetom pravidelného n-uholníka (bod S je priemetom jeho stredu). Úlohu vyriešte pre euklidovsky zostrojiteľné n-uholníky v intervale $3 < n < 10$.



Obr. 1a, b

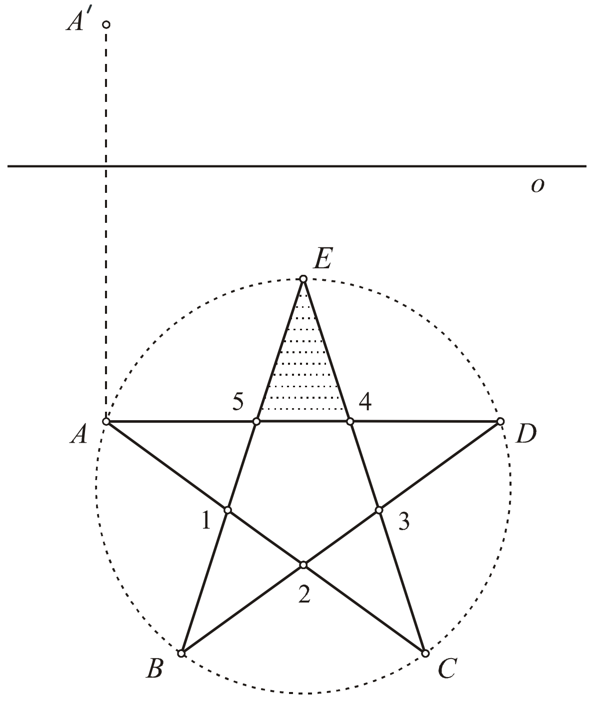
13. V ľubovoľnej perspektívnej afinite dvoch súmiestnych rovinných polí zobrazte ľubovoľný pravidelný n-uholník (n = 4, 5, 6) a kružnicu doň vpísanú. (Pravouhlú afinitu si zvoľte najviac v jednom prípade.)



Obr. 3 (úloha 15)

14. V pravouhlej perspektívnej afinite *f* (*o*; *A*, *A'*) dvoch súmiestnych rovinných polí zobrazte pravidelný hviezdicový nejednoduchý päťuholník *ACEBD* a kružnicu jemu opísanú. Vyfarbite trojuholníky, ktoré zostanú z pravidelného jednoduchého hviezdicového desaťuholníka *A1B2C3D4E5* po vybraní päťuholníka *12345* (Obr. 2).

15. Daná je afinita $f: (\alpha) \to (\alpha')$ dvoch súmiestnych rovinných polí trojuholníkom *ABC* a jeho obrazom *A'B'C'*. Zobrazte v danej afinite kružnicu *k* opísanú (vpísanú) trojuholníku *ABC*. Zostrojte hlavné smery afinity *f*. (Obr. 3, za úlohou 13)

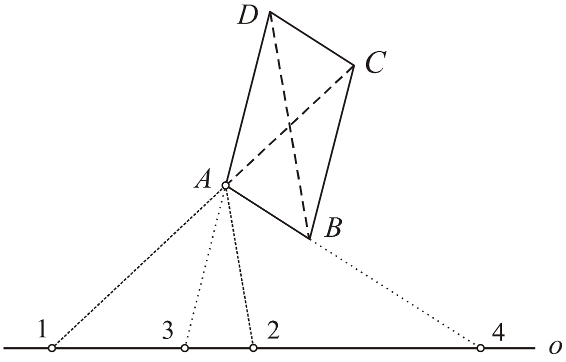


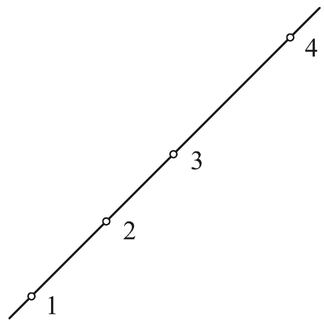
Obr. 2

16. Daný je rovnobežník *ABCD* a priamka *o* roviny $\alpha = \overleftrightarrow{ABC}$. Dourčite perspektívnu afinitu *f* (*o*; *A*, ?) v rovine α tak, aby zobrazila daný rovnobežník do štvorca. Koľko má úloha riešení? (Obr. 4) [24]

17. Dané sú kolineárne body 1, 2, 3, 4 v danom poradí. Zostrojte štvorec *ABCD* tak, aby priamky incidentné s dvojicami rovnobežných strán štvorca prechádzali dvojicami bodov 1, 2; 3, 4. (Obr. 5) [25]

[24] Návod: Stačí zostrojiť ramená dvoch uhlov so spoločným vrcholom v jednom z vrcholov daného rovnobežníka, ktoré sa majú zobraziť do pravých uhlov.
[25] Návod: Stačí zostrojiť ľubovoľný rovnobežník, ktorého dvojice rovnobežných strán majú požadovanú vlastnosť a ďalej pokračovať podľa predchádzajúceho cvičenia.





Obr. 4

Obr. 5

18. Daná je elipsa k osami AB, CD ($AB > CD$) a jej sečnica m (l) rovnobežná s hlavnou (vedľajšou) osou elipsy. Zostrojte priesečníky: $m \cap k$, $l \cap k$ a dotyčnice elipsy v týchto bodoch bez rysovania elipsy. [26]
19. Pre elipsu z cvičenia 18 zostrojte dotyčnice prechádzajúce ľubovoľným bodom P (Q), pre ktorý platí: $(ABP) = k > 0$ ($(CDQ) = l > 0$).
20. Zostrojte dotyčnice elipsy k určenej osami AB, CD ($AB > CD$), ktoré: a) sú rovnobežné s ľubovoľnou danou priamkou m, ktorá je rôznobežná s osami elipsy; b) prechádzajú ľubovoľným bodom M neležiacim na priamkach incidentných s osami elipsy k.[27]
21. Analogické úlohy ako v cvičeniach 18, 19 riešte pre elipsu k určenú dvojicou združených priemerov KL, MN ($MN \perp KL$), pričom platí: $m \| KL$, $l \| MN$, $(ABP) > 0$ ($(CDQ) > 0$).
22. Zostrojte dotyčnice elipsy k určenej združenými priemermi KL, MN, ktoré: a) sú rovnobežné s ľubovoľnou danou priamkou m; b) prechádzajú ľubovoľným bodom P. (Priamka m a bod P nemajú žiadnu z polôh z cvičenia 21.)
23. Elipsa k je daná osami AB, CD. Zostrojte dvojicu jej zhodných združených priemerov.
24. Daná je elipsa k združenými priemermi KL, MN ($MN \perp KL$). Zostrojte jej dotyčnice kolmé na jeden z priemerov. [28]
25. Na danú rotačnú valcovú plochu s polomerom r umiestnite elipsu, ktorej hlavná, resp. vedľajšia os majú dĺžky $2a$, resp. $2b$ ($a > b$). Kedy úloha nemá riešenie? [29]
26. Daná je elipsa k osami AB, CD. Zostrojte rotačnú valcovú plochu $\boldsymbol{V}$ tak, aby $\boldsymbol{V} \cap \alpha = \{k\}$. Zapísať algoritmus riešenia úlohy.

---

[26] Použite trojuholníkovú konštrukciu elipsy (par. 2.1 kapitoly 2).

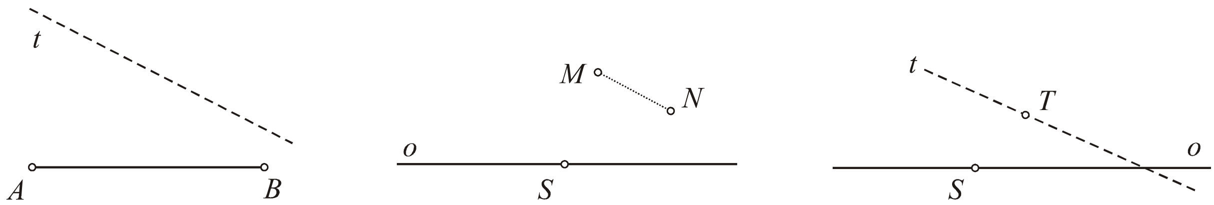
[27] Úlohu riešte použitím perspektívnej afinity, ktorá danú elipsu k zobrazí do kružnice. Analogicky pre cvičenia 21, 22.

[28] Použite afinnú konštrukciu dotyčníc elipsy (par. 2.1, bod **d**, obr. 13b)

[29] Návod: Ak existuje elipsa požadovaných vlastností a označíme jej rovinu α, tak pre veľkosť φ jej uhla s osou o valcovej plochy platí: $\sin\varphi = r/a$, kde $2a$, resp. $2r = 2b$ je dĺžka hlavnej, resp. vedľajšej osi danej elipsy. Odtiaľ je zrejmá konštrukcia pravouhlého trojuholníka $S\,{}^{i}F\,{}^{i}S$ ($i \in \{1, 2\}$) v ľubovoľnej rovine π incidentnej s osou o plochy. Rovina požadovaných vlastností obsahuje priamku $\overleftrightarrow{S\,{}^{i}F}$ a je kolmá na rovinu π. Rozhodnutie o riešiteľnosti a počte riešení sa necháva čitateľovi. (Veta Queteletova – Dandelinova (Veta 2.2))

27. Daná je kružnicová valcová plocha $\boldsymbol{V}$ ($k \subset \alpha$ – určujúca kružnica, o – os plochy ($o \perp \alpha$)). Zostrojte druhý systém kružnicových rezov plochy $\boldsymbol{V}$.[30] Zapísať algoritmus riešenia úlohy. (Grafické vyhotovenie riešenia v Mongeovom zobrazení možno nájsť v prednáškach venovaných tejto metóde, kap. 5, úloha 5.3.)

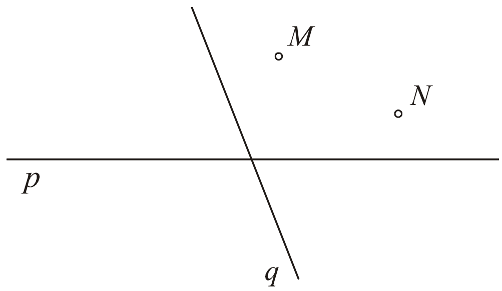
28. Zostrojte elipsu k, ak sú dané: a) jej hlavná os AB a dotyčnica t, ($t \not\perp AB$, $t \nparallel AB$); b) jej stred S, priamka o incidentná s jej hlavnou osou a body M, $N \neq M$ elipsy; c) jej stred S, priamka o incidentná s jej hlavnou osou a dotyčnica t s dotykovým bodom T (T nie je vrcholom). V prípade a) zostrojte i dotykový bod elipsy s danou dotyčnicou.[31] (Obr. 6)



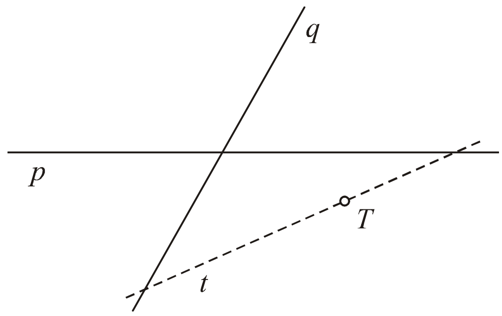
Obr. 6a – 6c

29. Daná je elipsa k priemerom KL, priamkou m incidentnou so združeným priemerom ku KL a bodom P ($P \notin \overleftrightarrow{KL}$, $P \notin m$). Zostrojte krajné body priemeru elipsy k na priamke m.

30. Daná je elipsa priamkami p, q incidentnými s jej združenými priemermi a bodmi M, $N \neq M$ ($M \notin p \cup q$, $N \notin p \cup q$). Zostrojte krajné body priemerov elipsy na priamkach p, q. (Obr. 7)



Obr. 7



Obr. 8

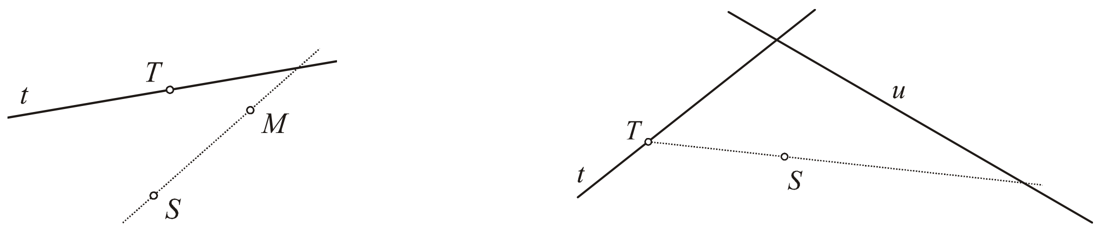
31. Daná je elipsa k priamkami p, q incidentnými s jej združenými priemermi a dotyčnicou t s dotykovým bodom T. Zostrojte krajné body priemerov elipsy na priamkach p, q (obr. 8).

32. Daná je elipsa k stredom S, dotyčnicou t s dotykovým bodom T a: a) ďalším bodom M; b) ďalšou dotyčnicou u ($u \neq t$, $u \nparallel t$). Zostrojte i osi elipsy k. V oboch prípadoch zostrojte priemer elipsy k združený s priemerom incidentným s priamkou ST. (Obr. 9a, b)

33. Daná je elipsa $k = (AB, CD)$ (hlavná a vedľajšia os). Zostrojte štvorec opísaný elipse k.

[30] Návod: zostrojte normálovú rovinu danej valcovej plochy $\boldsymbol{V}$ a využite súmernosť plochy podľa tejto roviny.

[31] Úlohy 28 – 32 riešte pomocou vhodnej perspektívnej afinity zobrazujúcej danú elipsu do kružnice. (Za os afinity si zvoľte: cvičenie 30a – priamku MN; cvičenie 31 – dotyčnicu t; cvičenie 32 – a) priamku SM; b) priamku ST)



Obr. 9a, b

34. Daná je elipsa $k = (AB, CD)$ (hlavná a vedľajšia os) v rovine α. Dokážte, že: a) množina bodov súmerne združených s ohniskom ^1F elipsy k podľa všetkých jej dotyčníc je kružnica ^1k roviny α so stredom v druhom ohnisku ^2F tejto elipsy a polomerom $2a = |AB|$; b) množina piat kolmíc z ľubovoľného ohniska elipsy k na všetky jej dotyčnice je kružnica k_0 roviny α so stredom v strede S elipsy a polomerom $r = a$. [32]
35. Nech bod M je ľubovoľným bodom elipsy k rôznym od jej vrcholov. Potom platí: priamka m, ktorá je osou vonkajších uhlov sprievodičov ^1FM a ^2FM bodu M vzhľadom na elipsu k je dotyčnicou elipsy k v bode M.[33] Dokážte.
36. Dokážte, že každá dotyčnica elipsy je osou vonkajších uhlov sprievodičov jej dotykového bodu.[34]
37. Určite množinu stredov všetkých kružníc, ktoré sa dotýkajú danej kružnice $m = (O; r = d)$ a prechádzajú jej vnútorným bodom M. (Dôsledok riešenia úloh v cvičení 34; [7])
38. Zostrojte elipsu danú ohniskami ^1F, ^2F a jedným bodom M (t. j. zostrojte vrcholy elipsy). V bode M zostrojte dotyčnicu elipsy. [35]
39. Zostrojte elipsu, ak je dané a) a, $b + e$, b) e, $a + b$, c) a, $b - e$ (a, resp. b, resp. e je dĺžka hlavnej, resp. vedľajšej polosi elipsy, resp. jej lineárna excentricita).
40. Zostrojte elipsu, ak je daný vrchol A hlavnej osi, vrchol C vedľajšej osi a dĺžka a, resp. b hlavnej, resp. vedľajšej polosi. Za akých podmienok je úloha riešiteľná a koľko má riešení?
41. Zostrojte elipsu, ak je dané jej ohnisko, vrchol vedľajšej osi a a) dĺžka b vedľajšej osi; b) lineárna excentricita. Kedy je úloha riešiteľná a koľko má riešení?
42. Zostrojte elipsu, ak je daná priamka incidentná s jej hlavnou osou, dĺžka hlavnej osi, jedno ohnisko a jeden bod elipsy, ktorý nie je vrcholom.
43. Zostrojte elipsu, ak je dané: a) jej ohnisko ^1F, dotyčnica t s dotykovým bodom T a dĺžka a hlavnej polosi; b) jej ohnisko ^1F, dotyčnica t, bod M elipsy a dĺžka a hlavnej polosi.
44. Zostrojte elipsu, ak je dané jej ohnisko ^1F, dva jej body ^1M, ^2M a dĺžka a hlavnej polosi.
45. Zostrojte elipsu, ak sú dané jej ohniská ^1F, ^2F a jej dotyčnica t. Zostrojte i dotykový bod.

---

[32] Kružnica ^1k sa nazýva určujúca (riadiaca) kružnica danej elipsy prislúchajúca ohnisku ^1F. Analogicky hovoríme o riadiacej kružnici $^2k = (^1F, 2a)$ prislúchajúcej ohnisku ^2F. Kružnica k_0 sa nazýva vrcholová kružnica elipsy k (inciduje s hlavnými vrcholmi elipsy).

[33] Vonkajšie uhly sprievodičov bodu M elipsy sú tie z uhlov priamok ^1FM, ^2FM, ktorých vnútra pozostávajú len z vonkajších bodov danej elipsy, t.j. z bodov X, pre ktoré $^1FX + {}^2FX > 2a$. (Dotyčnica elipsy je definovaná v úvode druhej kapitoly.)

[34] Ide o dôsledok definície 2. 1 elipsy. Vysvetlite.

[35] V riešení úloh 38 – 53 použite ohniskové vlastnosti elipsy zhrnuté vo výsledkoch cvičení 34 – 37.

46. Zostrojte elipsu, ak je dané jej ohnisko ${}^1F$, jej rôznobežné dotyčnice ${}^1t$, ${}^2t$ a a) dĺžka a hlavnej polosi; b) dotykový bod ${}^1T$ (${}^1T \in {}^1t$).
47. Zostrojte elipsu, ak je dané jedno jej ohnisko a tri navzájom rôznobežné dotyčnice.[36]
48. Zostrojte elipsu, ak je dané jej ohnisko ${}^1F$, bod M elipsy, dĺžka a hlavnej poloosi a lineárna excentricita e.
49. Zostrojte elipsu, ak je dané jej ohnisko ${}^1F$, vrchol A hlavnej osi elipsy a dĺžka b vedľajšej polosi.
50. Zostrojte elipsu, ak je dané jej ohnisko, jeden vrchol vedľajšej osi a a) dotyčnica t elipsy; b) bod M elipsy.
51. Zostrojte elipsu so stredom v danom bode S a danou dĺžkou a hlavnej polosi tak, aby sa dotýkala daných rôznobežných priamok ${}^1t$, ${}^2t$, ktoré nie sú navzájom kolmé.
52. Umiestnite elipsu k, ktorej osi majú dĺžky $2a$, $2b$ ($a > b$) tak, aby mala jedno ohnisko v bode ${}^1F$ a dotýkala sa danej priamky t.
53. Umiestnite elipsu k, ktorej osi majú dĺžky $2a$, $2b$ ($a > b$) tak, aby mala stred v danom bode S a dotýkala sa danej priamky t.
54. Zostrojte elipsu, ak je dané jej ohnisko, jeden jej bod a dve navzájom rôznobežné dotyčnice.
55. Zostrojte elipsu, pre ktorú je priamka n normálou a body ${}^1F$, ${}^2F$ jej ohniskami (priamka n nie je kolmá na priamku incidentnú s hlavnou osou elipsy, ani s ňou rovnobežná).[37]

Literatúra

[1] Drábek, K., Harant, F., Setzer, O.: *Deskriptivní geometrie I*, SNTL/ALFA Praha, 1982

[2] Harant, M., Lanta, O., Urban, A.: *Deskriptívna geometria pre 2. a 3. ročník SVŠ*, SPN Bratislava, 1968

[3] Klenková, P.: *Stereometria – Elementárna geometria trojrozmerného euklidovského priestoru*. Diplomová práca, 2006, s. 120. Univerzita Komenského v Bratislave, FMFI UK, Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky. In: Internetová stránka Katedry algebry, geometrie a didaktiky matematiky MFF UK, oddelenie geometrie a počítačovej grafiky, Univerzita Komenského Bratislava.

[4] Kraemer, E.: *Zobrazovací metody*, I. diel, SPN Praha, 1991, ISBN 80-04-21778-8

[5] Medek, V., Sivošová, A.: *Zbierka úloh z deskriptívnej geometrie pre 4. ročník gymnázia*, SPN Bratislava, 1976

[6] Sklenáriková, Z., Čižmár, J.: *Elementárna geometria euklidovskej roviny* (učebný text), FMFI UK, vyd. UK Bratislava 2002, 2004. ISBN 80-223-1585-0

[7] Sklenáriková, Z.: Sto rokov od smrti Karla Pelza. In ***G*** *– slovenský časopis pre geometriu a grafiku*, Bratislava: Slovenská spoločnosť pre Geometriu a Grafiku. ISSN 1336-524X, 2008, roč. 5, č. 9, s. 31-44

[8] Urban, A.: *Deskriptivní geometrie I*, SNTL/ALFA Praha, 1979, 1982

[36] Uvažujte i o prípade, keď dve z dotyčníc sú navzájom rovnobežné priamky.

[37] Normála elipsy je priamka prechádzajúca bodom elipsy kolmá na jej dotyčnicu v tomto bode. Návod: Čo platí pre normálu v bode M elipsy a sprievodiče bodu M vzhľadom na danú elipsu t. j. priamky ${}^1FM$, ${}^2FM$? (Cvičenie 36)