Sada úloh na precvičenie (2)

(Polia, vektorové priestory a podpriestory)

1. Nech $(F, +, \cdot)$ je pole. Dokážte, že platí $(a_1 + \cdots + a_n) \cdot b = a_1 \cdot b + \cdots + a_n \cdot b$ pre $a_i, b \in F$, kde $i = 1, \ldots, n$.

2. Vo vektorových priestoroch $V_4(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^4, +, \mathbb{R}, \cdot)$ a $V_4(\mathbb{Z}_5) = (\mathbb{Z}_5^4, +, \mathbb{Z}_5, \cdot)$ vypočítajte: $3 \cdot (1, 1, 1, 0) + 2 \cdot (1, 2, 3, 1) + 4 \cdot (1, 2, 0, 1)$.

3. Overte, že $(\mathbb{Z}_2^2, +, \mathbb{Z}_2, \cdot)$ so sčitovaním a násobením skalárom definovaným po zložkách tvorí vektorový priestor nad poľom $\mathbb{Z}_2$ a vypíšte všetky jeho vektory.

4. Vypíšte všetky vektory vektorového priestoru $V_2(\mathbb{Z}_3) = (\mathbb{Z}_3^2, +, \mathbb{Z}_3, \cdot)$ a potom vypočítajte $2 \cdot (2, 1) + 2 \cdot (2, 2) + (1, 0)$.

5. Nech $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\} =: \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Pre $f, g \in V$ a $c \in \mathbb{R}$ zadefinujeme sčitovanie a násobenie nasledovne: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ a $(c.f)(x) = c.f(x)$, kde $x \in \mathbb{R}$. Dokážte, že $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \mathbb{R}, \cdot)$ je vektorový priestor nad poľom $\mathbb{R}$.

6. Nech F je pole, $V = F^n$. Definujeme operácie $(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$ a $c(x_1, \ldots, x_n) = (cx_1, \ldots, cx_n)$ pre $c, x_i, y_i \in F$ kde $i = 1, \ldots, n$. Dokážte, že potom V je vektorový priestor nad poľom F.
   Poznámka: Čiže priestory S, T zo strednej školy sú naozaj vektorové priestory nad poľom $\mathbb{R}$.

7. Overte, či

   a) množina všetkých polynómov s reálnymi koeficientami stupňa najviac n
   b) množina všetkých polynómov párneho stupňa

   sú vektorové priestory. Sčitovanie a násobenie skalárom definujeme rovnako ako pre reálne funkcie.

8. Ktoré z týchto množín tvoria vektorový podpriestor vektorového priestoru $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$?

   a) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1^2 = x_2^2\}$
   b) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; 7x_1 - x_2 = 0\}$
   c) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 = x_3\}$
   d) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 + x_3 \geq 0\}$
   e) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; 2x_1 = -x_2 = x_3\}$
   f) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

barbora.pokorna@fmph.uniba.sk

9. Ktoré z týchto podmnožín tvoria vektorový podpriestor priestoru reálnych funkcií $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

   a) funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s vlastnosťou $2f(0) = f(1)$

   b) nezáporné funkcie

   c) funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s vlastnosťou $f(1) = 1 + f(0)$

10. Nech $V(R)$ je vekt. priestor nad poľom R. Nech vektory $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{w} \in V(R)$. Dokážte, že $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] \subseteq [\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{w}]$.

11. Nech $V(R)$ je vektorový priestor nad poľom R. Nech vektory $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{w} \in V(R)$ také, že $\vec{z} \notin [\vec{x}, \vec{y}]$ a $\vec{z} \in [\vec{x}, \vec{y}, \vec{w}]$. Dokážte, že $\vec{w} \in [\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]$.

12. Nech $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in V_3(\mathbb{R})\colon 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0\}$. Dokážte, že S je podpriestor vektorového priestoru $V_3(\mathbb{R})$ a nájdite vektory, ktoré ho generujú.

barbora.pokorna@fmph.uniba.sk