

Sada úloh na precvičenie (3)

(Lineárna závislosť vektorov, báza a dimenzia)

- Zistite, či dané vektory sú lineárne závislé v príslušnom vektorovom priestore:
 - $(1,3,4), (2,1,3), (3,1,4)$ vo $V_3(\mathbb{Z}_5)$
 - $(1,3,4), (2,1,3), (3,1,4)$ vo $V_3(\mathbb{Z}_7)$
- Nech $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sú ľubovoľné vektory z vektorového priestoru V nad poľom \mathbb{R} . Dokážte, že potom $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}, \vec{c}]$.
- Nech $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sú lineárne nezávislé vektory z vektorového priestoru V nad poľom R . Dokážte, že potom sú lineárne nezávislé aj vektory
 - $\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
 - $\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{a} + \vec{c}$
- Zistite, či sú vektory f, g, h vo vektorovom priestore $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \mathbb{R}, \cdot)$ lineárne závislé, ak
 - $f(x) = 1, g(x) = \cos x, h(x) = \cos(2x)$
 - $f(x) = 1, g(x) = x + a, h(x) = x^2 + bx + c$
(kde a, b, c môžu byť ľubovoľné reálne čísla)
 - $f(x) = x, g(x) = x(x - 1), h(x) = x(x - 1)(x - 2)$
- Zistite, či dané vektory tvoria bázu vo $V_3(\mathbb{R})$
 - $(1, 2, 3), (1, -2, 3), (1, 2, -3)$
 - $(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1)$
 - $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)$
- Zistite, či dané vektory tvoria bázu vo $V_3(\mathbb{Z}_5)$
 - $(1, 2, 3), (2, 3, 4), (0, 3, 1)$
 - $(1, 0, 0), (0, 1, 2), (2, 1, 3)$
 - $(0, 1, 2), (3, 0, 1), (1, 0, 2)$
- Ak sa to dá, doplňte dané vektory na bázu príslušného vektorového priestoru
 - $(1, 1, 2), (2, 1, 3)$ vo $V_3(\mathbb{R})$
 - $x^2 - 1, x^2 + 1$ vo $V = \mathbb{R}_4[x]$ (priestore polynómov stupňa najviac 3)
 - $(1, 2, 3, 0), (3, 4, 1, 2)$ vo $V_4(\mathbb{Z}_5)$.

8. Overte, že množina $S = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = ax + b, \text{ kde } a, b \in \mathbb{R}\}$ je vektorový podpriestor vo VP $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \mathbb{R}, \cdot)$. Nájdite funkcie $g, h \in S$ také, že $S = [g, h]$.
9. Zistite, či $S = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ kde } a, b, c \in \mathbb{R}\}$ je vektorový podpriestor vo VP $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \mathbb{R}, \cdot)$. Ak áno, nájdite funkcie $g_1, g_2, g_3 \in S$ také, že $S = [g_1, g_2, g_3]$.
10. Dokážte, že $S = \{(a, a, b, b) \in V_4(\mathbb{Z}_5), \text{ kde } a, b \in \mathbb{Z}_5\}$ je vektorový podpriestor vo VP $V_4(\mathbb{Z}_5)$. Nájdite jeho bázu a určte jeho dimenziu.