Sada úloh na precvičenie (4)

(Lineárne a priame súčty VPP, matice)

1. Dokážte, že množina $M_{m,n}(R)$ s operáciou sčitovania matíc a so zobrazením $R \times M_{m,n}(R) \to M_{m,n}(R)$, kde $(c, A) \mapsto cA$, je vektorový priestor nad poľom R.

2. Dokážte, že nasledujúce množiny tvoria vektorové podpriestory vo VP $M_{n,n}(R)$
   (a) množina všetkých symetrických matíc typu $n \times n$,
   (b) množina všetkých antisymetrických matíc typu $n \times n$,
   (c) množina všetkých diagonálnych matíc typu $n \times n$.

3. Určte dimenziu vektorových podpriestorov z príkladu 2 a) a 2 c).

4. Vyriešte maticové rovnice
   (a) nad poľom $\mathbb{R}$: $\begin{pmatrix} 2 & -6 & 1/3 \\ 1 & 1/2 & 5 \\ 8 & -2 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$
   (b) nad poľom $\mathbb{Z}_2$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

5. Dokážte:
   (a) Pre $A = (a_{ij})_{m,n} \in M_{n,n}(R)$ je matica $A' = (a_{ij} + a_{ji}) \in M_{n,n}(R)$ symetrická?
   (b) Nech $A = (a_{ij})_{m,n}$ a $B = (b_{ij})_{m,n}$. Potom $(A + B)^T = A^T + B^T$ a $(A^T)^T = A$. Čomu sa rovná $(c_1A + c_2B)^T$?

6. Vyrátajte:
   (a) nad poľom $\mathbb{C}$: $(1-i)\begin{pmatrix} i & 1-2i & 4 & -1 \\ 2 & 1+3i & i & 2i \end{pmatrix} - (3+2i)\begin{pmatrix} 1+i & 1 & 4 & -1 \\ 2-i & 3 & i & 2i \end{pmatrix}$
   Pozrite si Cvičenie č. 1, ako sa násobia a sčitavajú komplexné čísla.
   (b) nad poľom $\mathbb{Z}_5$: $-3\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

7. Zistite, resp. nájdite:
   (a) či matice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ tvoria bázu vo vektorovom priestore $V = M_{2,2}(\mathbb{R})$

barbora.pokorna@fmph.uniba.sk

(b) nejakú bázu podpriestoru S_K, ktorý prislúcha matici $K = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ nad poľom $\mathbb{Z}_3$ a určte $h(K)$.

8. Nájdite RSM, ktorá je riadkovo ekvivalentná s maticou A, ak

   (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{R}$

   (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{Z}_5$

   (c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{R}$

9. Zistite, či vektor $\alpha \in V_4(\mathbb{R})$ patrí do vektorového podpriestoru $S = [(4,3,2,1), (1,2,3,4), (1,1,1,0)] \subset V_4(\mathbb{R})$, ak

   (a) $\alpha = (3,2,1,0)$

   (b) $\alpha = (3,4,0,1)$

10. Riešte úlohu 9 v priestore $V_4(\mathbb{Z}_7)$

11. Zistite, ktoré dvojice z daných matíc sú riadkovo ekvivalentné nad $\mathbb{R}$:
$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$
Pomôcka: Každá matica je riadkovo ekvivalentná len s jedinou RSM.

12. Určte hodnosť matice M nad $\mathbb{R}$ v závislosti od parametra $c \in \mathbb{R}$, ak

   (a) $M = \begin{pmatrix} 1 & c & -1 & 2 \\ 2 & -1 & c & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & c & 2c \\ 1 & -1 & 3 & -c \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

13. Zistite, pre ktoré hodnoty parametra $c \in \mathbb{R}$ sú dané vektory lineárne závislé vo $V_3(\mathbb{R})$:

   (a) $(-1,0,-1), (2,1,2), (1,1,c)$

   (b) $(1,1,3), (2,1,2), (c,0,-c)$

   (c) $(2,0,-1), (3,2,0), (1,-2,c)$

14. Nájdite bázu daného podpriestoru a určite jeho dimenziu:

   (a) $T = [(1,2,2,0,1), (1,2,0,1,2), (1,2,3,1,0)]$ vo $V_5(\mathbb{Z}_7)$

   (b) $S = [(1,2,2,0,1), (1,2,0,1,2), (1,2,-2,1,0)]$ vo $V_5(\mathbb{R})$