Sada úloh na precvičenie (5)

(Lineárne zobrazenia)

1. Dokážte, že otočenie vo VP $V_2(\mathbb{R})$ okolo $(0,0)$ o uhol α je lineárne zobrazenie a nájdite jeho maticu. Výsledok ilustrujte na príklade pre $\alpha = 45°$ a vektor $\vec{x} = (-1,-1)$.

   Pomôcka: postupujte rovnako, ako pri otočení o $90°$. Matica tohoto zobrazenia je jednou z najznámejších matíc lineárnych zobrazení.

2. Dokážte, že súmernosť podľa osi y vo VP $V_2(\mathbb{R})$ je lineárne zobrazenie. Určte jeho predpis a nájdite jeho maticu.

3. *(za 4 body)* Uvažujme VP $V_2(\mathbb{R})$ a v ňom priamku p, ktorá zviera s osou x uhol θ a $(0,0) \in p$. Dokážte, že súmernosť podľa tejto priamky p je lineárne zobrazenie. Určte jeho predpis a nájdite jeho maticu. Nakreslite obrázok, kde znázorníte obrazy bázových vektorov.

   Pomôcka: Na určenie matice zobrazenia potrebujete obrazy vektorov $(1,0)$ a $(0,1)$. Tieto obrazy viete určiť pomocou vhodného otočenia o príslušný uhol v rovine, t.j. použijete maticu z príkladu 1. Samozrejme, každý bázový vektor potrebujeme otočiť inak (podľa toho, aký uhol zviera s priamkou p).

4. Dokážte, že súmernosť podľa roviny Oxy vo VP $V_3(\mathbb{R})$ je lineárne zobrazenie. Určte jeho predpis a nájdite jeho maticu.

5. Dokážte, že rovnoľahlosť vo VP $V_3(\mathbb{R})$ so stredom v $(0,0,0)$ s koeficientom $\omega = 3$ je lineárne zobrazenie. Určte jeho predpis a nájdite jeho maticu.

6. Je súmernosť podľa priamky $x = k$ $(k \neq 0)$ v rovine $V_2(\mathbb{R})$ lineárne zobrazenie? Prečo? Súmernosť podľa ktorých priamok s rovnicou $ax + by + c = 0$ v rovine bude lineárne zobrazenie (t.j. ako to ovplyvňujú koeficienty $a, b, c \in \mathbb{R}$)? Predpokladáme a, b nie súčasne nulové, t.j. $(a, b) \neq (0,0)$, aby skutočne išlo o priamku.

7. Rozšírme úvahy z predošlého príkladu do priestoru $V_3(\mathbb{R})$. Kedy je súmernosť podľa roviny s rovnicou $ax + by + cz + d = 0$ lineárnym zobrazením (t.j. ako to ovplyvňujú koeficienty $a, b, c, d \in \mathbb{R}$)? Predpokladáme a, b, c nie súčasne nulové, t.j. $(a, b, c) \neq (0,0,0)$, aby skutočne išlo o rovinu.

8. Majme zobrazenie $g\colon V_3(\mathbb{Z}_5) \to V_3(\mathbb{Z}_5)$, ktoré zobrazí vektory $(1,2,1)$, $(2,1,3)$, $(4,0,1)$ na vektory $(2,3,4)$, $(1,0,1)$, $(3,1,1)$ v tomto poradí. Ako sa zobrazí vektor $(2,2,1)$? Je toto zobrazenie lineárne? Ak áno, nájdite jeho maticu. Ide o lineárny izomorfizmus?

barbora.pokorna@fmph.uniba.sk

9. Majme zobrazenie $b\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $b(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, 2x_1 + x_2 + 3x_3, 4x_3)$. Je toto zobrazenie lineárne? Ide o lineárny izomorfizmus? Ak áno, nájdite inverzné zobrazenie b^{-1}.

10. Definujme $\frac{d}{dt}\colon \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t]$ ako zobrazenie derivovania, teda $\frac{d}{dt}(a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0) = na_n t^{n-1} + (n-1)a_{n-1}t^{n-2} \cdots + a_1$ Dokážte, že zobrazenie $\frac{d}{dt}$ je lineárne.

11. Určte, či sú dané lineárne zobrazenia injektívne, surjektívne alebo lineárne izomorfizmy:
    (a) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(a, b, c) = (2a - 3b + c, a + b - 2c, 3a + b)$
    (b) $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $g(a, b) = (2a - 3b, a + b, 3a + b)$
    (c) $h\colon (\mathbb{Z}_2)^3 \to (\mathbb{Z}_2)^3$, $h(a, b, c) = (a + b, a + c, b + c)$

12. Overte, že $\langle(1, 0, 1), (1, -1, 0), (0, 0, 1)\rangle$ je báza v $\mathbb{R}^3$. Nájdite maticu lineárneho zobrazenia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ takého, že $f(1, 0, 1) = (1, -1)$, $f(1, -1, 0) = (1, 0)$, $f(0, 0, 1) = (2, 1)$. Je zobrazenie injektívne, resp. surjektívne?

13. Nájdite všetky $t \in \mathbb{Z}_5$, pre ktoré je lineárne zobrazenie $f\colon V_3(\mathbb{Z}_5) \to V_2(\mathbb{Z}_5)$ surjektívne, ak $M_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 3 & t \end{pmatrix}$.

14. Nech $f\colon V_2(\mathbb{Z}_3) \to V_3(\mathbb{Z}_3)$, $f(a, b) = (a, a + b, -2a + b)$ a $g\colon V_3(\mathbb{Z}_3) \to V_3(\mathbb{Z}_3)$, $g(a, b, c) = (2a + c, b, a - c)$. Je zobrazenie $g \circ f$ injektívne?

15. Zistite, či:
    (a) je lineárnym izomorfizmom (príp. injektívne alebo surjektívne) zobrazenie $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ také, že $f(a, b, c) = (2a - b + c, 3a + 5b - c, 5a + b + c)$?
    (b) existuje surjektívne zobrazenie $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$?
    (c) je lineárnym izomorfizmom (príp. injektívne alebo surjektívne) zobrazenie $k\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ také, že $k(a, b, c) = (2a + 6c, -a - b - c, 3a + 4b + c)$?

16. Vypočítajte inverznú maticu k matici $A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$. Čo robí s vektormi v rovine zobrazenie $f_{A_\varphi^{-1}}$ prislúchajúce matici A_φ^{-1}? Nakreslite obrázok.

17. Nech $n \in \mathbb{N}$. Nájdite inverznú maticu k matici
$$X = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \dots & x^{n-1} & x^n \\ 0 & 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-2} & x^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & x & \dots & x^{n-3} & x^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

18. Reálnu maticu $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ upravte pomocou ERO na RSM M' a napíšte elementárne matice patriace k použitým ERO. Pomocou nich určte maticu L takú, že $LM = M'$. Ako vyzerá inverzná matica M^{-1}?