Sada úloh na precvičenie (6)

(Systémy lineárnych rovníc, determinanty)

Úlohy, ktoré môže riešiť každý:
Očakávam, že zvolíte primerane obtiažne zadanie, t. j. napr. matica A systému lineárnych rovníc nebude I_n a podobne.

1. *(2 body)* Zostavte (príp. použite zadanie z nejakej zbierky úloh) nehomogénny systém lineárnych rovníc nad $\mathbb{R}$, ktorý sa bude skladať zo 4 rovníc a 4 neznámych.
   Riešenie by malo obsahovať aspoň jeden parameter, takže aspoň jeden normálový vektor nadroviny by mal byť nejakou LK ostatných.

   Potom nájdite množinu všetkých riešení S_N tohoto systému. Následne ju zapíšte v tvare $S_N = K + S_H$. Množinu S_H zapíšte ako lineárny obal jej generátorov pomocou fundamentálneho riešenia.

2. *(2 body)* Zostavte (príp. použite zadanie z nejakej zbierky úloh) homogénny systém lineárnych rovníc nad poľom $\mathbb{Z}_5$, ktorý sa bude skladať z 3 rovníc a 4 neznámych. Potom nájdite množinu všetkých riešení S_H tohoto systému.

3. *(1 bod)* Zostavte (príp. použite zadanie z nejakej zbierky úloh) nehomogénny systém lineárnych rovníc nad $\mathbb{R}$, ktorý sa bude skladať z 3 rovníc a 4 neznámych. Potom nájdite množinu všetkých riešení S_N tohoto systému **pomocou Cramerových formúl**.

4. *(1 bod)* Napíšte regulárnu maticu M stupňa 3 nad poľom $\mathbb{Z}_7$. Overte, že je regulárna a pomocou determinantov nájdite M^{-1}.

Zvyšné úlohy:

1. Nájdite homogénny systém lineárnych rovníc tak, aby podpriestor
   $S = [(1,1,0,2),(1,1,1,3),(1,1,4,1)]$ vo VP $V_4(\mathbb{Z}_5)$ bol podpriestorom riešení tohoto systému.

2. *(3 body)* Vypočítajte, čomu sa rovná determinant reálnej matice stupňa n, pre $n \in \mathbb{N}$, ak $D_n = \det \begin{pmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a+b & ab \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & a+b \end{pmatrix}$ v závislosti od n.

   Pomôcka: Výpočtom D_1, D_2, D_3 určte hypotézu o D_n. Potom nájdite pre D_n rekurentný vzťah a ten následne použite pri dokazovaní hypotézy pomocou MI.

barbora.pokorna@fmph.uniba.sk

3. *(3 body)* Vypočítajte, čomu sa rovná determinant reálnej matice stupňa n, pre $n \in \mathbb{N}$, ak $D_n = \det \begin{pmatrix} x & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 1 & \dots & 1 & 1 & x \end{pmatrix}$ v závislosti od n.

   Pomôcka: Upravujte maticu pomocou vhodných ERO/EStĺpcovéO (pozor na ich vplyv na determinant) a využite, že determinant diagonálnej matice sa rovná súčinu prvkov na diagonále.

4. Určte, či matice $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & c-1 \\ c-2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$ a $E = \begin{pmatrix} 2 & e+1 & 0 \\ 2 & e-1 & 2e \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, kde $c, e \in \mathbb{R}$, sú singulárne alebo regulárne a teda či lin. zobrazenia f_C, resp. f_E, sú lineárne izomorfizmy.

5. Nájdite homogénny systém lineárnych rovníc tak, aby podpriestor $S = \{(2a - b - c, 3a - b + 2c, a - 2b + 3c, c) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ vo VP $V_4(\mathbb{R})$ bol podpriestorom riešení tohoto systému.

   Pomôcka: Podpriestor S si najprv zapíšte ako lineárny obal vhodných generátorov a potom už riešte tak, ako na cvičení.

6. Rozhodnite, pre ktoré t má nasledujúci reálny lineárny systém jediné riešenie a nájdite toto riešenie

$$\begin{array}{llll} 2x_1 & -tx_2 & +3x_3 & = -2 \\ 3x_1 & -5x_2 & +x_3 & = 1 \\ 4x_1 & -7x_2 & +x_3 & = -3. \end{array}$$

7. Nájdite a, pre ktoré je reálny lineárny systém riešiteľný, ak

$$\begin{array}{llll} x_1 & +2x_2 & -x_3 & = a \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = 3 \\ 4x_1 & +5x_2 & -x_3 & = 0. \end{array}$$

8. V závislosti od parametra ε vyriešte reálny lineárny systém. Kedy je systém neriešiteľný?

$$\begin{array}{lllll} 7x_1 & -3x_2 & +7x_3 & +17x_4 & = \varepsilon \\ 8x_1 & -6x_2 & -x_3 & -5x_4 & = 9 \\ 4x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +7x_4 & = 1 \\ 5x_1 & -3x_2 & +2x_3 & +4x_4 & = 3 \\ 9x_1 & -5x_2 & +5x_3 & +11x_4 & = 4. \end{array}$$

9. Nech $a, b, c, d \in R$. Vypočítajte determinant $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{pmatrix}$.

   Tento determinant sa nazýva Vandermondeov determinant matice typu 4×4.