sada 5

pr. 11 Určte, či sú lin. zobr. i/s/l.izo

a) $f: \overset{V}{\mathbb{R}^3} \to \overset{W}{\mathbb{R}^3}$

$f(a,b,c) = (2a-3b+c,\ a+b-2c,\ 3a+b)$

dim V = dim W = 3 => zobraz. f má šancu byť aj (i) aj (s)
(či také bude závisí od dim f(V))

- ideme hľadať f(V) = Imf (teda ako sa zobrazí celé V)
- potrebujeme skúmať M_f

$$f(1,0,0) = (2\cdot 1 - 3\cdot 0 + 0,\ 1+0-2\cdot 0,\ 3\cdot 1+0) = (2,1,3)$$
$$f(0,1,0) = (-3,1,1)$$
$$f(0,0,1) = (1,-2,0)$$

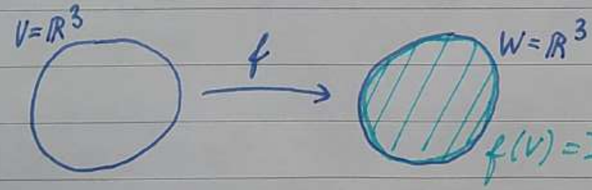
$$\Rightarrow M_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

- hodnosť matice M_f nám povie, akú dim bude mať f(V)

$$\begin{array}{c} \\ \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 3 & -6 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{array}$$

$$M_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$h(M_f) = 3 \quad \Rightarrow$ dim $f(V) = 3$



$f(V) = \text{Im}f = \mathbb{R}^3 = [(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)]$
BÁZA Imf

- keďže dim V = 3 a dim f(V) = 3 => f JE INJEKTÍVNE
(každý prvok z V má „svoj" prvok v f(V), lebo dimenzia ostala zachovaná - neklesla)

- keďže dim W = 3 a dim f(V) = 3 => f JE SURJEKTÍVNE
(f dokázalo „pokryť" celé W, čiže ∀ prvok z W bude mať vzor vo V)

- keďže zobr. je injekt. aj surjekt., tak je LIN. IZOMORFIZMUS

b) $g: \overset{V}{\mathbb{R}^2} \to \mathbb{R}^3\ {}^{W}$

$g(a,b) = (2a-3b,\ a+b,\ 3a+b)$

$\dim V = 2 < 3 = \dim W$ $\Rightarrow$ zobraz. f má šancu byť (i)
ale nemôže byť (s)

(vo V je „príliš málo" prvkov, aby sme pokryli celé W

! ČIŽE PRI ÚVAHE O TOM, ČO MÁ ŠANCU, POUŽÍVAM VETU ZO SLAJDU 9/19

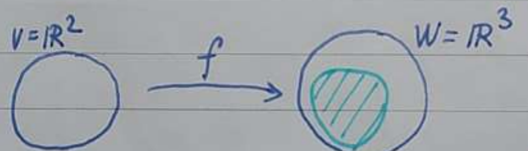
- ideme hľadať $f(V) = \mathrm{Im} f$, teda skúmame M_f

$$\left.\begin{array}{l} g(1,0) = (2,1,3) \\ g(0,1) = (-3,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow M_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- potrebujeme vedieť hodnosť M_f:

$$M_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \scriptstyle 3 \quad 3/2 \quad 9/2 \\ \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 5/2 & 11/2 \end{pmatrix} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 11/5 \end{pmatrix}$$

$h(M_f) = 2 \Rightarrow \dim f(V) = 2$



BÁZA Im f

$f(V) = \mathrm{Im} f = [(1, 1/2, 3/2), (0, 1, 11/5)]$

- keďže $\dim V = 2$ a $\dim f(V) = 2$ $\Rightarrow$ f JE INJEKTÍVNE

$\Leftrightarrow f: R^k \to R^s \quad h(M_f) = k$

- keďže $\dim W = 3$ a $\dim f(V) = 2$ $\Rightarrow$ f NIE JE SURJEKTÍVNE

$\Leftrightarrow f: R^k \to R^s \quad h(M_f) = s$

! ČIŽE PRI URČOVANÍ VLASTNOSTÍ f POUŽÍVAM VETU ZO SLAJDU 12/19

- keďže zobr. f nie je súčasne (i) a (s), tak NIE JE lin. izomorf.

$\Leftrightarrow f: R^k \to R^s \quad h(M_f) = k = s$

c) $h : \underbrace{(\mathbb{Z}_2)^3}_{V} \to \underbrace{(\mathbb{Z}_2)^3}_{W}$

$h(a,b,c) = (a+b, a+c, b+c)$

$\dim V = 3 = \dim W \Rightarrow f$ má šancu byť aj (i) aj (s)

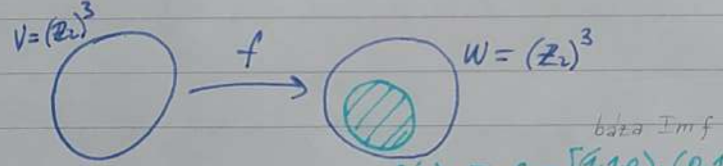
- hľadáme $f(V) = \mathrm{Im} f$, tj skúmame M_f

$$\left.\begin{array}{l} h(1,0,0) = (1,1,0) \\ h(0,1,0) = (1,0,1) \\ h(0,0,1) = (0,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow M_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- zaujíma nás $h(M_f)$:

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{!\mathbb{Z}_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$h(M_f) = 2 \Rightarrow \dim f(V) = 2$



$f(V) = \mathrm{Im} f = [(1,1,0), (0,1,1)]$

- keďže $\dim V = 3$ a $\dim f(V) = 2 \Rightarrow f$ NIE JE INJEKTÍVNE

(keďže 3-rozm. priestor sa zobrazil na 2-rozm. priestor, tak je jasné, že niektoré vektory z V sa museli zobraziť na „ten istý" vo W)

- keďže $\dim W = 3$ a $\dim f(V) = 2 \Rightarrow f$ NIE JE SURJEKTÍVNE

(nepokryli sme celé W)

$\Rightarrow f$ nie je bijektívne, teda NIE JE LIN. IZOMORFIZMUS

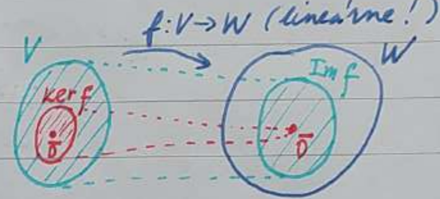
Príklad 2: Určte JADRO a OBRAZ lineárneho zobr. f
(Ker f) (Im f)

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
$f(x,y) = (2x-4y,\ 3x+2y,\ 5x+3y)$

- určíme maticu zobrazenia f

$$\left.\begin{aligned} f(1,0) &= (2,3,5) \\ f(0,1) &= (-4,2,3) \end{aligned}\right\} \Rightarrow M_f = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- ilustrácia, čo hľadáme:



- hľadáme $\mathrm{Ker} f = \{\vec{x} \in V : f(\vec{x}) = \vec{0}\}$

$$(x,y) \cdot M_f = (0,0,0)$$

$$(x,y)\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (0,0,0)$$

$$(2x-4y,\ 3x+2y,\ 5x+3y) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} 2x-4y &= 0 \\ 3x+2y &= 0 \\ 5x+3y &= 0 \end{aligned}\right\} \text{HOMOGÉNNA SÚSTAVA LIN. ROVNÍC}$$

- riešime sústavu: $\begin{matrix} 5 & -10 \\ 3 & -6 \end{matrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 8 \\ 0 & 13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ x, y - viazané, $h(A) = 2$

počet neznámych!

$\Rightarrow$ riešením je VPP S_H, $\dim S_H = 2 - h(A) = 2 - 2 = 0$
$\Rightarrow S_H = \{\vec{0}\}$

$$\left.\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow S_H = \{(0,0) \in \mathbb{R}^2\}$$

- teda $\mathrm{Ker} f = \{\vec{0}\} = [\vec{0}]$

$\dim \mathrm{Ker} f = 0$

↳ keby tu vyšiel netriviálny podpriestor, tak pomocou FUNDAMENTÁLNEHO RIEŠENIA určíme generátory

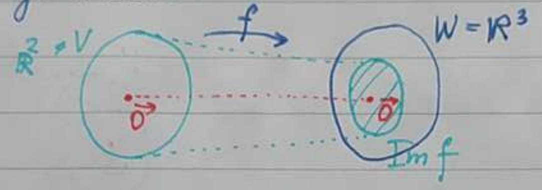
- hledáme obraz $\operatorname{Im} f$:

$$M_f = \begin{pmatrix}2&3&5\\-4&2&3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&3/2&5/2\\0&8&13\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&3/2&5/2\\0&1&13/8\end{pmatrix}$$

$$h(M_f) = 2 \Rightarrow \dim \overset{f(V)}{\overset{\parallel}{\operatorname{Im} f}} = 2$$

$$\operatorname{Im} f = [(1, 3/2, 5/2), (0, 1, 13/8)]$$

- čili f zobrazuje takto:



- kontrola, vždy platí: $\dim V = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f)$

$$2 = 0 + 2 \checkmark$$

Príklad 3: v $\mathbb{Z}_5$, sústava: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&0&0&1\\ 1&2&4&0&2\\ 0&1&3&4&3\\ 0&0&4&4&4 \end{array}\right)$

$$A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&0&0&1\\ 1&2&4&0&2\\ 0&1&3&4&3\\ 0&0&4&4&4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&0&0&1\\ 0&1&4&0&1\\ 0&1&3&4&3\\ 0&0&1&1&1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&0&0&1\\ 0&1&4&0&1\\ 0&0&4&4&2\\ 0&0&1&1&1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&0&0&1\\ 0&1&4&0&1\\ 0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&3 \end{array}\right)$$

$h(A) = 3$
$h(A|B) = 4$ $\Big\}$ $3 \neq 4$ $\Rightarrow$ sústava nemá riešenie
$S_N = \emptyset$

LEBO: v 4. riadku matice máme rovnicu $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 3$

Príklad 4: Riešte v $\mathbb{R}$ sústavu: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&-3&1\\ -1&3&-2&3\\ 0&5&-5&4 \end{array}\right)$

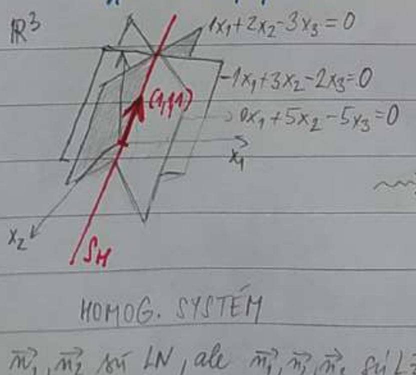
$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&-3&1\\ -1&3&-2&3\\ 0&5&-5&4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&-3&1\\ 0&5&-5&4\\ 0&5&-5&4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&-1&-3/5\\ 0&1&-1&4/5\\ 0&0&0&0 \end{array}\right)$$

$h(A|B) = 2$
$h(A) = 2$ $\Big\}$ $2 = 2$ $\Rightarrow$ sústava má riešenie

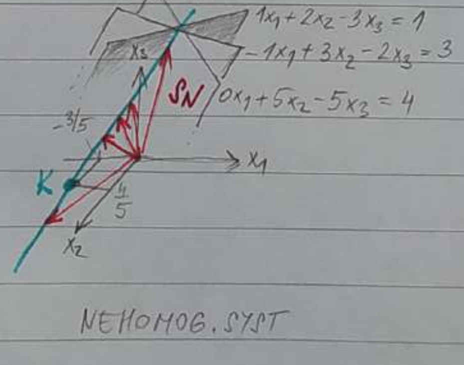
$x_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$
$x_2 = \frac{4}{5} + t$
$x_1 = -3/5 + t$
$\Bigg\} \Rightarrow S_N = \{(-\frac{3}{5}+t, \frac{4}{5}+t, t), t \in \mathbb{R}\}$

$$S_N = \underbrace{\left(-\tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5}, 0\right)}_{K} + \underbrace{\{(t,t,t),\ t \in \mathbb{R}\}}_{S_H}$$

- čiže riešenie príslušného homog. systému je
$S_H = [(1,1,1)]$



HOMOG. SYSTÉM



NEHOMOG. SYST

$\vec{n}_1, \vec{n}_2$ sú LN, ale $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ sú LZ

Príklad 5: $S = [\overbrace{(2,3,1,0)}^{\vec{g_1}}, \overbrace{(3,1,-1,2)}^{\vec{g_2}}, \overbrace{(1,-2,-2,2)}^{\vec{g_3}}] \subset V_4(\mathbb{R})$.

- hľadáme homog. syst. rovníc, ktorého riešením je S

$\boxed{?}$ 1. koľko potrebujeme neznámych ?

2. koľko potrebujeme rovníc ?

1. potrebujeme 4 neznáme x_1, x_2, x_3, x_4, lebo sme vo $V_4(\mathbb{R})$ a vidíme, že riešeniami majú byť „uspor. štvorice"

2. počet rovníc bude závisieť od dim S

$$\begin{array}{c} \\ 3\ -6\ -6\ \ 6 \\ 2\ -4\ -4\ \ 4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 7 & 5 & -4 \\ 0 & 7 & 5 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 7 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim S = 2$$

ide o rovinu vrámci $\mathbb{R}^4$

vieme, že ak máme homog. syst. lin. rovníc, tak

$$\dim S_H = n - h(A)$$

n – počet neznámych; A – matica koeficientov $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix}$

čiže: $2 = 4 - h(A)$

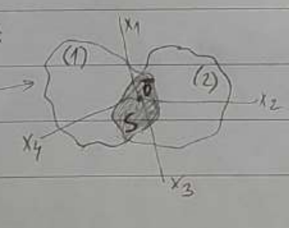
$h(A) = 2 \Rightarrow$ potrebujeme 2 rovnice lin. NEZÁVISLÉ

(1) $a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4 = 0$

(2) $a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4 = 0$

$\mathbb{R}^4$:

nadrovina určená rovnicou (1)



- ideme hľadať koeficienty a_{ij}
- určite generátory z S musia spĺňať rovnice (1), (2)

$$\left.\begin{array}{ll} \vec{g_1} \in (1) & a_{11} \cdot 2 + a_{12} \cdot 3 + a_{13} \cdot 1 + a_{14} \cdot 0 = 0 \\ \vec{g_2} \in (1) & a_{11} \cdot 3 + a_{12} \cdot 1 + a_{13} \cdot (-1) + a_{14} \cdot 2 = 0 \\ \vec{g_3} \in (1) & a_{11} \cdot 1 + a_{12} \cdot (-2) + a_{13} (-2) + a_{14} \cdot 2 = 0 \end{array}\right\}$$

čiže sme dostali homog. sústavu pre $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}$

(rovnako by to bolo pre 2. rovnicu a $\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3}$)

- počítame sústavu pre a_{1i} :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 7 & 5 & -4 \\ 0 & 7 & 5 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4/7 & 6/7 \\ 0 & 1 & 5/7 & -4/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a_{11}, a_{12} - viazané
a_{13}, a_{14} - voľné

$a_{13} = s \in \mathbb{R}$

$a_{14} = t \in \mathbb{R}$

$a_{12} = 4/7\, t - 5/7\, s$

$a_{11} = 4/7\, s - 6/7\, t$

(rovnako by sme to dostali pre koef. $a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}$)

- keďže potrebujeme lin. nezávislú dvojicu, tak :

$s = 1$ a $t = 0$: $\quad a_{11} = \frac{4}{7} \quad a_{12} = -\frac{5}{7} \quad a_{13} = 1 \quad a_{14} = 0$

$s = 0$ a $t = 1$: $\quad a_{21} = -\frac{6}{7} \quad a_{22} = \frac{4}{7} \quad a_{23} = 0 \quad a_{24} = 1$

- hľadaná sústava rovníc :

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{4}{7}x_1 - \tfrac{5}{7}x_2 + 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 &= 0 \\ -\tfrac{6}{7}x_1 + \tfrac{4}{7}x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ riešením je zadaná } S$$

- môžeme ich upraviť na „krajší" tvar

$$\boxed{\begin{aligned} 4x_1 - 5x_2 + 7x_3 &= 0 \\ -6x_1 + 4x_2 + 7x_4 &= 0 \end{aligned}}$$