Príklad 1: $\vec{a} = (2, 1, 0, -5)$
$\vec{b} = (0, 0, -2, -1)$
$\vec{c} = (1, 3, -3, 1)$

a) skalárne súčiny

$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle (2,1,0,-5), (0,0,-2,-1) \rangle = 2.0 + 1.0 + 0.(-2) + (-5)(-1) = \underline{\underline{5}}$

$\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = 2.1 + 1.3 + 0.(-3) + (-5).1 = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{c}$

$\langle \vec{c}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle = 0.1 + 0.3 + (-2)(-3) + (-1).1 = \underline{\underline{5}}$

b) - chceme vypočítať $\measuredangle \vec{b}, \vec{c} = ?$
- vieme, že $\cos(\measuredangle \vec{b}, \vec{c}) = \dfrac{\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle}{|\vec{b}||\vec{c}|}$ pre $\vec{b}, \vec{c} \neq \vec{0}$

- potrebujeme dĺžky vektorov $|\vec{b}|$ a $|\vec{c}|$

$|\vec{b}| = \sqrt{\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle} = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \underline{\sqrt{5}}$

$|\vec{c}| = \sqrt{\langle \vec{c}, \vec{c} \rangle} = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-3)^2 + 1^2} = \underline{\underline{\sqrt{20}}}$

- potom: $\cos(\measuredangle \vec{b}, \vec{c}) = \dfrac{5}{\sqrt{5}\sqrt{20}} = \dfrac{\cancel{5}^{1}}{2\sqrt{5}\sqrt{5}} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad \measuredangle \vec{b}, \vec{c} = \dfrac{\pi}{3} = 30°$

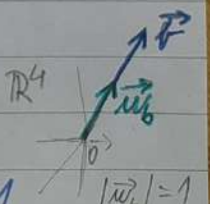
- ďalej chceme vypočítať $\cos(\measuredangle \vec{a}, \vec{c}) = ?$
- keďže $\vec{a} \perp \vec{c}$, tak $\cos(\measuredangle \vec{a}, \vec{c}) = \dfrac{\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle}{|\vec{a}||\vec{c}|} = \dfrac{0}{\cdots} = 0$

c) $|\vec{a}| = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2 + (-5)^2} = \underline{\underline{\sqrt{30}}}$

$|\vec{c}| = \underline{\underline{\sqrt{20}}}$

d) jednotkové vektory $\vec{w}_b$ a $\vec{w}_c$

$\vec{w}_b = \dfrac{1}{|\vec{b}|} \cdot \vec{b} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} (0, 0, -2, -1) = \left(0, 0, -\dfrac{2}{\sqrt{5}}, -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$

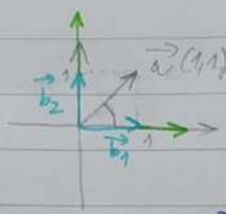


- overenie: $|\vec{w}_b| = \sqrt{\langle \vec{w}_b, \vec{w}_b \rangle} = \sqrt{0^2 + 0^2 + \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{5}} = \underline{1}$

$\vec{w}_c = \dfrac{1}{|\vec{c}|} \cdot \vec{c} = \dfrac{1}{\sqrt{20}} (1, 3, -3, 1) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{20}}, \dfrac{3}{\sqrt{20}}, -\dfrac{3}{\sqrt{20}}, \dfrac{1}{\sqrt{20}}\right)$

Príklad 2: $\vec{a} = (1,1) \in \mathbb{R}^2$

hľadáme $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$: $\sphericalangle \vec{a}, \vec{b} = \frac{\pi}{4}$ $= 45°$



očakávame 2 priamky ako riešenia

- označme $\vec{b} = (u, v)$
- ak $\sphericalangle \vec{a}, \vec{b} = \frac{\pi}{4}$, tak: $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1.u + 1.v}{\sqrt{1^2+1^2}\sqrt{u^2+v^2}} \quad /.\sqrt{2}$$

$$1 = \frac{u+v}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

$$\sqrt{u^2+v^2} = u+v \quad /(\;)^2$$

$$u^2+v^2 = u^2+2uv+v^2$$

$$0 = 2uv \Rightarrow \begin{cases} u=0 & \vec{b_1} = (0, \underset{\neq 0}{v}) \\ v=0 & \vec{b_2} = (\underset{\neq 0}{u}, 0) \end{cases}$$

- teda sú to vektory z množiny:

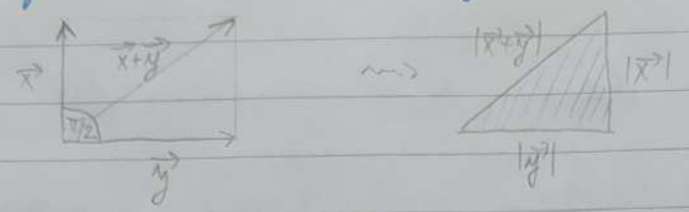
$B = \{(0,v) \in \mathbb{R}^2, \text{ kde } v \neq 0\} \cup \{(u,0) \in \mathbb{R}^2, \text{ kde } u \neq 0\}$

- čo sa dá zapísať aj ako:

$B = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : u.v = 0\}$

Príklad 3: $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euklidovský VP, $\vec{x}, \vec{y} \in V$

a) Pytagorova veta: ak $\vec{x} \perp \vec{y} \Rightarrow |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 = |\vec{x}+\vec{y}|^2$

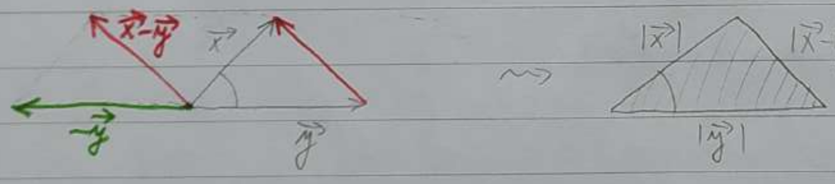


- ak $\vec{x} \perp \vec{y} \Rightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$

$$|\vec{x}+\vec{y}|^2 = \langle \vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{x}+\vec{y} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{x}+\vec{y} \rangle =$$

$$= \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle =$$
$$= \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + 2\underbrace{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}_{=0 \ (\vec{x} \perp \vec{y})} + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle$$
$$= |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2$$

b) kosínusová veta: $|\vec{x}-\vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 - 2|\vec{x}||\vec{y}|\cos(\sphericalangle \vec{x}, \vec{y})$

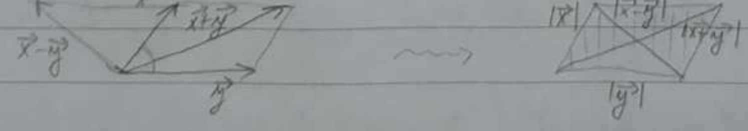


strany $\triangle$ a, b, c:
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

$$|\vec{x}-\vec{y}|^2 = \langle \vec{x}-\vec{y}, \vec{x}-\vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{x}, -\vec{y} \rangle + \langle -\vec{y}, \vec{x} \rangle + \langle -\vec{y}, -\vec{y} \rangle =$$
$$= |\vec{x}|^2 - 2\underbrace{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}_{=|\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cos(\sphericalangle \vec{x}, \vec{y})} + |\vec{y}|^2$$

$$= |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 - 2|\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cos(\sphericalangle \vec{x}, \vec{y})$$

c) rovnobežníkové pravidlo: $|\vec{x}+\vec{y}|^2 + |\vec{x}-\vec{y}|^2 = 2|\vec{x}|^2 + 2|\vec{y}|^2$



(uhlopriečky v $\square$)

$$|\vec{x}+\vec{y}|^2 + |\vec{x}-\vec{y}|^2 = \langle \vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y} \rangle + \langle \vec{x}-\vec{y}, \vec{x}-\vec{y} \rangle =$$
$$= \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + \cancel{2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle} + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \cancel{-2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle} + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle =$$
$$= 2|\vec{x}|^2 + 2|\vec{y}|^2$$

Príklad 4: $S = [(1,2,2,1), (1,1,-5,3), (3,2,8,-7)] \subset \mathbb{R}^4$

$S^\perp = ?$

- pozrime sa na $\underline{\dim S}$, či sú generátory LN

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & 3 \\ 3 & 2 & 8 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -7 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -12 & 5 \\ 0 & 1 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 30 & -18 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\dim S = 3}$$

naozaj sú LN

- teraz vieme, že $\underline{\dim S^\perp = 1}$, lebo $\boxed{\dim S + \dim S^\perp = \dim V}$ (VPP)

$3 + 1 = 4$

- VPP $S^\perp = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : \vec{x} \perp \vec{s} \text{ pre } \forall \vec{s} \in S\}$
- čiže hľadáme $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ také, že:

$$\left.\begin{array}{lll} \vec{x} \perp (1,2,2,1) & : & 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 = 0 \\ \vec{x} \perp (1,1,-5,3) & : & 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 - 5x_3 + 3 \cdot x_4 = 0 \\ \vec{x} \perp (3,2,8,-7) & : & 3 \cdot x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 7x_4 = 0 \end{array}\right\} \text{homog. sústava rovníc}$$

- riešime homogénnu sústavu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & 3 \\ 3 & 2 & 8 & -7 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -12 & 5 \\ 0 & 1 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 30 & -18 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -11/5 \\ 0 & 1 & 0 & 11/5 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 \end{pmatrix}$$

$x_4 = t \in \mathbb{R}$

$x_3 = \frac{3}{5}t$

$x_2 = -\frac{11}{5}t$

$x_1 = \frac{11}{5}t$

$$S_H = \{(\tfrac{11}{5}t, -\tfrac{11}{5}t, \tfrac{3}{5}t, t) \in \mathbb{R}^4, t \in \mathbb{R}\} = \underline{\underline{S^\perp}}$$

- fundament. riešenie : $t = 1$: $(\frac{11}{5}, -\frac{11}{5}, \frac{3}{5}, 1)$

$$S^\perp = [(\tfrac{11}{5}, -\tfrac{11}{5}, \tfrac{3}{5}, 1)] = [(11, -11, 3, 5)]$$

Príklad 5: $T=[(1,0,3),(2,-1,0)] \subset \mathbb{R}^3$, chceme ortonormálnu bázu

$\underbrace{(1,0,3)}_{\vec{t}_1}$, $\underbrace{(2,-1,0)}_{\vec{t}_2}$

- vektory $\vec{t}_1$ a $\vec{t}_2$ sú LN - tvoria bázu T, tj. $\dim T = 2$
- skúsime, či $\vec{t}_1 \perp \vec{t}_2$ (to by nám potom stačilo len zmeniť dĺžku)

$$\langle \vec{t}_1, \vec{t}_2 \rangle = 1.2 + 0.(-1) + 3.0 = 2 \neq 0 \quad \Rightarrow \vec{t}_1 \not\perp \vec{t}_2$$

- teda hľadáme „novú" bázu $\vec{y}_1, \vec{y}_2$ takú, že $[\vec{y}_1, \vec{y}_2] = T$ a zároveň $\vec{y}_1 \perp \vec{y}_2$

- Gram - Schmidtova ortogonalizácia:

$$\vec{y}_1 = \vec{t}_1 = (1,0,3) \qquad \vec{y}_1 = (1,0,3)$$

$$\vec{y}_2 = \vec{t}_2 + \alpha . \vec{y}_1 = (2,-1,0) + \alpha . (1,0,3)$$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je také, že $\vec{y}_2 \perp \vec{y}_1$

$$\alpha = - \frac{\langle \vec{t}_2, \vec{y}_1 \rangle}{\langle \vec{y}_1, \vec{y}_1 \rangle} = - \frac{2.1 + (-1).0 + 0.3}{1^2 + 0^2 + 3^2} = - \frac{2}{10} = - \frac{1}{5}$$

$$\vec{y}_2 = (2,-1,0) - \frac{1}{5}(1,0,3) = \left(\frac{9}{5}, -1, -\frac{3}{5}\right) \quad \to \vec{y}_2 = (9,-5,-3)$$

- získali sme ortogonálnu bázu $[(1,0,3),(9,-5,-3)]$
- potrebujeme ešte dĺžky $=1$:

$$|\vec{y}_1| = \sqrt{\langle \vec{y}_1, \vec{y}_1 \rangle} = \sqrt{1^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$
$$|\vec{y}_2| = \sqrt{\langle \vec{y}_2, \vec{y}_2 \rangle} = \sqrt{9^2 + (-5)^2 + (-3)^2} = \sqrt{115}$$

- takže ortonormálna báza je $T = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, 0, \frac{3}{\sqrt{10}}\right), \left(\frac{9}{\sqrt{115}}, \frac{-5}{\sqrt{115}}, \frac{-3}{\sqrt{115}}\right)\right]$

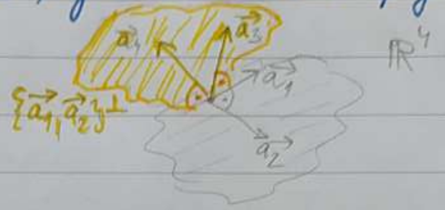
Príklad 6: $\vec{a_1} = (1,-2,2,-3)$ $\vec{a_3}, \vec{a_4} = ?$ $[\underbrace{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}, \vec{a_4}}] = \mathbb{R}^4$

$\vec{a_2} = (2,-3,2,4)$ ortogonálna b.

- overíme, že $\vec{a_1} \perp \vec{a_2}$: $\langle \vec{a_1}, \vec{a_2} \rangle = 1.2 + (-2)(-3) + 2.2 + (-3).4 = \underline{\underline{0}}$

- vektory $\vec{a_3}$ aj $\vec{a_4}$ musia byť kolmé na $\vec{a_1}$ aj $\vec{a_2}$

$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{a_3}, \vec{a_4} \in \{\vec{a_1}, \vec{a_2}\}^\perp}}$



- hľadáme ortogonálny doplnok $\{\vec{a_1}, \vec{a_2}\}^\perp$
- čiže také $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$:

$$\left.\begin{array}{lll} \vec{x} \perp \vec{a_1}: & \langle \vec{x}, \vec{a_1} \rangle = 0 & 1x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ \vec{x} \perp \vec{a_2}: & \langle \vec{x}, \vec{a_2} \rangle = 0 & 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \end{array}\right\} \text{homog. súst.}$$

- riešime homog. sústavu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 17 \\ 0 & 1 & -2 & 10 \end{pmatrix}$$

$x_4 = s \in \mathbb{R}$ $x_3 = t \in \mathbb{R}$ $x_2 = 2t - 10s$ $x_1 = 2t - 17s$

$$S_H = \{(2t-17s, 2t-10s, t, s) \in \mathbb{R}^4,\ t,s \in \mathbb{R}\} = \{\vec{a_1}, \vec{a_2}\}^\perp$$

$$\{\vec{a_1}, \vec{a_2}\}^\perp = [\underbrace{(2,2,1,0), (-17,-10,0,1)}_{\text{vektory } \vec{a_3}, \vec{a_4} \text{ budú odtiaľto}}]$$

- nech $\vec{a_3} = (2,2,1,0)$, určite $\vec{a_3} \perp \vec{a_1}$ aj $\vec{a_3} \perp \vec{a_2}$
- skúsime, či by mohol byť $\vec{a_4} = (-17,-10,0,1)$

$$\langle \vec{a_3}, \vec{a_4} \rangle = 2.(-17) + 2.(-10) + 1.0 + 0.1 = -54 \neq 0 \Rightarrow \vec{a_3} \not\perp \vec{a_4}$$

- teda za $\vec{a_4}$ musíme vybrať iný prvok z $\{\vec{a_1}, \vec{a_2}\}^\perp$
- pomôžeme si Gram-Schmidt. ortogonalizáciou

$\vec{a_3} = (2,2,1,0)$

$\vec{a_4} = (-17,-10,0,1) + \alpha \cdot \vec{a_3} = (-17,-10,0,1) + \alpha(2,2,1,0)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

chceme $\vec{a_4} \perp \vec{a_3}$: $\alpha = -\dfrac{\langle (-17,-10,0,1), \vec{a_3} \rangle}{\langle \vec{a_3}, \vec{a_3} \rangle} = -\dfrac{-54}{9} = 6$

$\vec{a_4} = (-17,-10,0,1) + 6(2,2,1,0) = (-5,2,6,1)$

<u>overenie</u>: $\langle \vec{a_3}, \vec{a_4} \rangle = 2.(-5) + 2.2 + 1.6 + 0.1 = -10+4+6 = \underline{\underline{0}}$

- hľadaná ortogonálna báza je:
$[(1,-2,2,-3), (2,-3,2,4), (2,2,1,0), (-5,2,6,1)] = \mathbb{R}^4$

<u>Príklad 7</u>: $\vec{a_1} = (1, 2, 4, -3) \in \mathbb{R}^4$
$\vec{a_2} = (3, 5, 6, -4)$
$\vec{a_3} = (4, 5, -2, 3)$
$\vec{a_4} = (3, 8, 24, -19)$

$\vec{x} \perp \{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}, \vec{a_4}\}$

- najprv overíme, či má zmysel také $\vec{x}$ hľadať.
Ak by totiž $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}, \vec{a_4}$ boli LN, tak vygenerujú celé $\mathbb{R}^4$ a teda už nevieme nájsť písty vektor $\perp$ na všetky

Lebo ak $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}, \vec{a_4}$ sú LN, tak $\dim[\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}, \vec{a_4}] = 4$
$\dim \mathbb{R}^4 = 4$

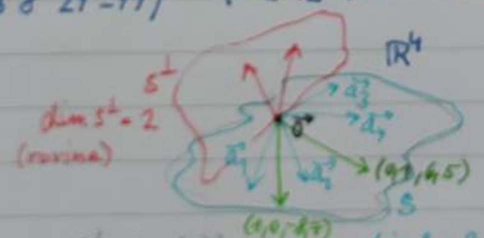
a teda: $\dim[\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}, \vec{a_4}] + \dim[\ldots]^\perp = \dim \mathbb{R}^4$
$4 + \dim[\ldots]^\perp = 4$
$\Rightarrow \dim[\ldots]^\perp = 0 \Rightarrow [\ldots]^\perp = \{\vec{0}\}$
a teda len $\vec{x} = \vec{0}$ je taký, že bude kolmý na $\perp \vec{a_i}$

- či sú $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}, \vec{a_4}$ LN:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & -18 & 15 \\ 0 & 2 & 12 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tieto už sú LN

$\Rightarrow \vec{a_i}$ sú LZ, v skutočnosti $\dim \underbrace{[\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}, \vec{a_4}]}_{S} = 2$



$\Rightarrow$ očakávame $\underline{\dim S^\perp = 2}$

$\dim S = 2$ (rovina)

$\underset{\text{vpp}}{S^\perp} \cap \underset{\text{vpp}}{S} = \{\vec{0}\}$

- hľadáme $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ taký, že

$\vec{x} \perp \vec{a_1}$: $\langle \vec{x}, \vec{a_1} \rangle = 0$: $1x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0$
$\vec{x} \perp \vec{a_2}$: $\vdots$
$\vec{x} \perp \vec{a_3}$: $\vdots$
$\vec{x} \perp \vec{a_4}$:

homog. sústava

- stačí hľadať $\vec{x} \perp (1, 0, -8, 7)$ a $\vec{x} \perp (0, 1, 6, -5)$

$\langle \vec{x}, (1,0,-8,7) \rangle = 0 : \quad 1x_1 + 0x_2 - 8x_3 + 7x_4 = 0$
$\langle \vec{x}, (0,1,6,-5) \rangle = 0 : \quad 0x_1 + 1x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 0$ } homog. sústava

- riešime homog. sústavu:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow x_4 = t^{\in \mathbb{R}}, x_3 = s^{\in \mathbb{R}}, x_2 = 5t - 6s, x_1 = 8s - 7t$

$S_H = \{ (8s - 7t, 5t - 6s, s, t) \in \mathbb{R}^4, \ s, t \in \mathbb{R} \} = S^{\perp}$

$S^{\perp} = [(8, -6, 1, 0), (-7, 5, 0, 1)]$

$\hookrightarrow$ všetky $\vec{x} \in S^{\perp}$ sú kolmé na $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}, \vec{a_4}$