① a) $a*b = a^b$ na $\mathbb{N}$

- je to bin. operácia, lebo $a^b \in \mathbb{N}$ $\forall a,b \in \mathbb{N}$
- asociatívnosť:

$a,b,c \in \mathbb{N}$: $(a*b)*c = (a^b)*c = (a^b)^c = a^{b\cdot c}$

$a*(b*c) = a*(b^c) = a^{(b^c)}$ $\neq$ nie je asociat.

napr. $2^{2\cdot 3} = 2^6$

$2^{2^3} = 2^8$

- komutatívnosť:

$a,b \in \mathbb{N}$: $a*b = a^b$

$b*a = b^a$ $\neq$ nie je komutat.

napr. $3^2 = 9$

$2^3 = 8$

- neutrálny prvok:

$a,e \in \mathbb{N}$ nech $a*e = a$:

$a^e = a \Rightarrow \underbrace{e=1}_{\text{kandidát}}$, over $e*a = a$

$1^a = a$

$\cancel{1 = a}$ platí len pre $a=1$, nie pre všetky $a \in \mathbb{N}$

$a*b = a^b$ na $\mathbb{Q}$

- nie je to bin. operácia, lebo $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

b) $a \circ b = a+b+3$ na $\mathbb{Z}$

- je to bin. operácia, lebo $a+b+3 \in \mathbb{Z}$ pre $\forall a,b \in \mathbb{Z}$
- asoc.: $(a\circ b)\circ c = (a+b+3)\circ c = a+b+3+c+3 = a+b+c+6$

$a\circ(b\circ c) = a\circ(b+c+3) = a+b+c+3+3 = a+b+c+6$ " pre $\forall a,b,c$

- komutat.: $a\circ b = a+b+3$

$b\circ a = b+a+3$ " pre $\forall a,b,c$

- neutr. prvok: $a\circ e = a \Rightarrow a+e+3 = a \Rightarrow \underline{e=-3}$ kandidát

over: $e\circ a = e+a+3 = -3+a+3 = a$ pre $\forall a \in \mathbb{Z}$ ✓ OK

- inverzný prvok: $a\circ a^{-1} = e \Rightarrow a+a^{-1}+3 = -3 \Rightarrow \underline{a^{-1} = -6-a}$

pre a, nech je a^{-1} over: $a^{-1}\circ a = (-6-a)+a+3 = -3 = e$ ✓

čiže $(\mathbb{Z},\circ)$ je abel. grupa

c) $a * b = 2ab$ na $\mathbb{Q}$

- je to bin. operácia, lebo $2ab \in \mathbb{Q}$ pre $\forall \frac{p}{q}, \frac{p_1}{q_1} \in \mathbb{Q}$
- asociat.: $(a*b)*c = (2ab)*c = 4abc$,,
  $a*(b*c) = a*(2bc) = 4abc$ pre $\forall a,b,c$
- komutat.: $a*b = 2ab$,,
  $b*a = 2ba$ pre $\forall a,b$
- neutr. prvok: $a*e = a \Rightarrow 2ae = a \Rightarrow \underline{e = \frac{1}{2}}$ kandidát
  over: $e*a = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot a = a$ pre $\forall a$ ✓ok
- inverz. prvok: $a \circ a^{-1} = e \Rightarrow 2aa^{-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{a^{-1} = \frac{1}{4a}}$ pre $a \neq 0$

  over: $a^{-1} \circ a = 2\cdot\frac{1}{4a}\cdot a = \frac{1}{2} = e$ ✓

  čiže pre $a \neq 0$ je $a^{-1} = \frac{1}{4a}$
  pre $a = 0$ inverzný prvok neexistuje
  čiže na $(\mathbb{Q}\setminus\{0\}, *)$ je to abel. grupa

d) $(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d)$ na $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

- je to bin. operácia, lebo $a+c \in \mathbb{R} \wedge b+d \in \mathbb{R}$ pre $a,b,c,d \in \mathbb{R}$
- asociat.: $((a,b)\oplus(c,d))\oplus(e,f) = (a+c, b+d)\oplus(e,f) = (a+c+e, b+d+f)$ ''
  $(a,b)\oplus((c,d)\oplus(e,f)) = (a,b)\oplus(c+e, d+f) = (a+c+e, b+d+f)$
  pre $\forall a,b,c,d,e,f$
- komutat.: $(a,b)\oplus(c,d) = (a+c, b+d)$,,
  $(c,d)\oplus(a,b) = (c+a, d+b)$ pre $\forall a,b,c,d$
- neutr. prvok: $(a,b)\oplus(e_1,e_2) = (a,b)$
  $(a+e_1, b+e_2) = (a,b) \Rightarrow \underline{(e_1,e_2) = (0,0)}$ kandidát
  $\begin{bmatrix} a+e_1 = a \\ b+e_2 = b \end{bmatrix}$
  over: $(0,0)\oplus(a,b) = (0+a, 0+b) = (a,b)$ pre $\forall (a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$
- inverz. prvok: $(a,b)\oplus(a,b)^{-1} = (0,0)$
  označme $(a,b)^{-1} = (x,y)$
  $(a+x, b+y) = (0,0) \Rightarrow (x,y) = \underline{(-a,-b)} = -(a,b)$
  $\begin{bmatrix} a+x = 0 \\ b+y = 0 \end{bmatrix}$

  over:
  $(-a,-b)\oplus(a,b) = (-a+a, -b+b) = (0,0)$ ✓

čiže pre $(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ je inverz. (opačný) prvok $-(a,b) = (-a,-b)$.

e) $(a,b) \odot (c,d) = (a \cdot c - bd,\ ad + bc)$ na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

– je to bin. operácia, lebo $a \cdot c - bd \in \mathbb{R} \wedge ad + bc \in \mathbb{R}$ pre $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$

– je asociat.:

$$[(a,b) \odot (c,d)] \odot (e,f) = (ac - bd, ad + bc) \odot (e,f) = (ace - bde - adf - bcf,\ acf - bdf + ade + bce)$$

$$(a,b) \odot [(c,d) \odot (e,f)] = (a,b) \odot (ce - df, cf + de) = (ace - adf - bcf - bde,\ acf + ade + bce - bdf)$$

$\forall a,b,c,d,e,f$

– je komutat.:

$$(a,b) \odot (c,d) = (a \cdot c - bd,\ ad + bc)$$

$$(c,d) \odot (a,b) = (ca - db,\ cb + da) = (ac - bd,\ ad + bc)$$

$\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$

– neutr. prvok: $(a,b) \odot (e_1, e_2) = (a,b)$

$$(ae_1 - be_2,\ ae_2 + be_1) = (a,b)$$

$$\left[\begin{array}{l} ae_1 - be_2 = a \\ ae_2 + be_1 = b \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} e_1 = 1 \\ e_2 = 0 \end{array} \Rightarrow \underline{(e_1, e_2) = (1,0)} \text{ kandidát}$$

over. $(1,0) \odot (a,b) = (a,b)$ pre $\forall (a,b)$ ✓ OK

– inverz. prvok: ozn. $(a,b)^{-1} = (x,y)$

$$(a,b) \odot (x,y) = (1,0)$$

$$\left[\begin{array}{l} ax - by = 1 \\ ay + bx = 0 \end{array}\right]$$

na vyjadrenie x:

$ax - by = 1 \quad /\cdot a$

$ay + bx = 0 \quad /\cdot b$

$$\begin{array}{r} a^2x - aby = a \\ aby + b^2x = 0 \\ \hline (a^2+b^2)x = a \end{array} \quad)+$$

$$x = \frac{a}{a^2+b^2}$$

na vyjadrenie y:

$ax - by = 1 \quad /\cdot b$

$ay + bx = 0 \quad /\cdot(-a)$

$$\begin{array}{r} abx - b^2y = b \\ -a^2y - abx = 0 \\ \hline -(a^2+b^2)y = b \end{array} \quad)+$$

$$y = \frac{-b}{a^2+b^2}$$

$$(a,b)^{-1} = (x,y) = \underline{\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)}$$

! POZOR $(a,b) \neq (0,0)$

over:

$$(a,b) \odot (a,b)^{-1} = (a,b) \odot \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) = \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} - \frac{-b^2}{a^2+b^2}, \frac{-ab}{a^2+b^2} + \frac{ab}{a^2+b^2}\right) = (1,0) ✓$$

pre $(a,b) = (0,0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ neexistuje inverzný prvok, inak je to $(a,b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$

PRÍKLAD d, e JE VLASTNE SČÍTOVANIE A NÁSOBENIE V $\mathbb{C}$

f) máme množinu : M

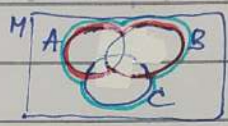
$P(M)$ – množina všetkých podmnožín M

$\boxed{A \cup B}$ – binárna je, lebo zjednotenie množín z $P(M)$ je opäť množina z $P(M)$

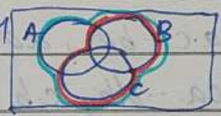
– komutatívne : ✓ $A \cup B = B \cup A$

– asociatívnosť :

$(A \cup B) \cup C$:



$A \cup (B \cup C)$:



)) pre $\forall A, B, C \subset P(M)$

– neutrálny prvok E : $A \cup E = A \Rightarrow E = \emptyset$ prázdna množina

– inverzný prvok : $A \cup ? = E = \emptyset$

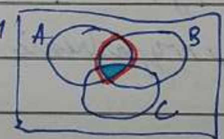
neexistuje inverzný prvok k A

$\boxed{A \cap B}$ – binárna operácia, lebo prienik množín z $P(M)$ je množina z $P(M)$

– komutatívne : $A \cap B = B \cap A$

– asociatívnosť :

$(A \cap B) \cap C$:



$A \cap (B \cap C)$:

)) $\forall A, B, C \in P(M)$

– neutrálny prvok E : $A \cap E = A \Rightarrow E = M$ celá množina M

– inverzný prvok : $A \cap ? = E = M$

neexistuje inverzný prvok k A

② $M=\{a,b,c\}$

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

- nech c je náš neutr. prvok, čiže $c=e$
  e - neutr.
- nech: $a^{-1}=b$ a $b^{-1}=a$ sú inverzné prvky
- keby $a*a=e$, tak $a^{-1}=a$ a to nechceme (lebo asociat. bin. op. má jednoznačne daný a^{-1})
- keby $a*a=a$:

$$\underline{e}=b*a=b*(a*a)=(b*a)*a=e*a=\underline{a}$$

zle

$\Rightarrow a*a=b$

podobne pre b máme $b*b=a$

- analógia $(\mathbb{Z}_3,\oplus)$:

		e	a	b
	$\oplus$	0	1	2
e	0	0	1	2
a	1	1	2	0
b	2	2	0	1

③ $(\mathbb{Z}_4,\oplus)$ je komutat. grupa

- bin. operácia: $(a+b) \bmod 4 \in \{0,1,2,3\}$ pre $\forall\, a,b \in \{0,1,2,3\}$
- asociatívnosť: $(a+b)+c=a+(b+c)$ (obyč. sčítanie)

$$((a+b)+c) \bmod 4 = (a+(b+c)) \bmod 4$$

$$[((a+b) \bmod 4)+c] \bmod 4 = [a+((b+c) \bmod 4)] \bmod 4$$

$$(a\oplus b)\oplus c = a\oplus(b\oplus c)$$

- komutatívnosť:

$$a+b=b+a$$

$$(a+b) \bmod 4 = (b+a) \bmod 4$$

$$a\oplus b = b\oplus a$$

- neutrálny prvok:

$a+0=a$ (kde $a\in\{0,1,2,3\}$)

$$(a+0) \bmod 4 = a \bmod 4 = a$$

$$a\oplus 0 = a$$

- inverzný prvok:

$$a\oplus(-a)=0$$

	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$$(a+(-a)) \bmod 4 = 0$$

$\Rightarrow 4 \mid (a+(-a))$ a zároveň:

$0\le a<4$, $0\le(-a)<4$ lebo $\in\{0,1,2,3\}$ $\Rightarrow 0\le(a+(-a))<8$

$\Rightarrow$ $a+(-a)=0 \Rightarrow \boxed{a=0,\ -a=0}$

$a+(-a)=4$: $\boxed{a=1\ -a=3;\ a=2\ -a=2;\ a=3\ -a=1}$

- spočítajte: $(-2)\oplus(-3)=(2+1) \bmod 4 = \underline{\underline{3}}$