1. $(F, +, \cdot)$ je pole.

a) $\underbrace{(a+b)}_{x \in F} . (c+d) \overset{1.DZ}{=} x.c + x.d = (a+b).c + (a+b).d \overset{2.DZ}{=} ac+bc+ad+bd$

$\forall a,b,c,d \in F$

b) ukážeme MI vzhľ. na $k \in N$

$\underline{k=1}$: $a.b_1 = a.b_1$ $\quad \forall a, b_1 \in F$

$\underline{k=2}$: $a.(b_1+b_2) \overset{1.DZ}{=} a.b_1 + ab_2$ $\quad \forall a, b_1, b_2 \in F$

IP : nech pre $\underline{k-1}$ platí : $a.(b_1 + \ldots + b_{k-1}) = a.b_1 + \ldots + ab_{k-1}$

skúmajme teda výraz pre $\underline{k}$:

$a.(\underbrace{(b_1 + \ldots + b_{k-1})}_{\substack{X \in F \\ \text{(asociatívnosť +)}}} + b_k) \overset{1.DZ}{=} a.x + a.b_k = a.(b_1 + \ldots + b_{k-1}) + a.b_k \overset{IP}{=}$

$= a.b_1 + \ldots + a.b_{k-1} + ab_k$

c) počítajme :

$(a+b) + ((-a)+(-b)) \overset{\text{(asociat. +)}}{=} a + (b + (-a)) + (-b) \overset{\text{(komutat. +)}}{=} a + (-a) + b + (-b) = 0+0 = \underline{\underline{0}}$

ak sú tieto prvky navzájom opačné, očakávame výsledok 0

čiže ozaj $-(a+b) = (-a)+(-b)$

$\forall a, b \in F$

2. $Z_5 = \{0,1,2,3,4\}$

⊕	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

⊙	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

$a \oplus b = (a+b) \bmod 5$ $\qquad$ $a \odot b = (a \cdot b) \bmod 5$

modulové operácie $\qquad$ modulové súč.

$2.3 + 4.2 = (2.3) \bmod 5 + (4.2) \bmod 5 = 1 + 3 = (1+3) \bmod 5 = \underline{\underline{4}}$

$2^{-1} = \underline{\underline{3}}$ a naozaj $2.3 = 6 \bmod 5 = 1$, čo je neutr. prvok vzhľ. na ⊙

$-3 = \underline{\underline{2}}$ a naozaj $3+2 = 5 \bmod 5 = 0$, čo je neutr. prvok ⊕

$2.3^{-1} + 4.2^{-1} - 4 = 2.2 + 4.3 + (-4) = 4 \bmod 5 + 12 \bmod 5 + 1 = (4+2) \bmod 5 +$

$+ 1 = 1+1 = 2 \bmod 5 = \underline{\underline{2}}$

3. na $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ $\quad (a,b)\oplus(c,d) = (a+c,\ b+d)$

$$(a,b)\odot(c,d) = (ac-bd,\ ad+bc)$$

- minule: $(\mathbb{R}\times\mathbb{R},\oplus)$ a $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\},\odot)$ sú komutat. grupy
- platia distribut. zákony?

$$(a,b)\odot\big((c,d)\oplus(e,f)\big) = (a,b)\odot(c+e,\ d+f) =$$
$$= \big(a(c+e)-b(d+f),\ a(d+f)+b(c+e)\big) =$$
$$= (ac+ae-bd-bf,\ ad+af+bc+be) =$$
$$= (\underbrace{ac-bd}_{A}\ \underbrace{+ae-bf}_{C},\ \underbrace{ad+bc}_{B}\ \underbrace{+af+be}_{D}) \overset{\oplus}{=} (A,B)\oplus(C,D) =$$
$$= \underbrace{(ac-bd,\ ad+bc)}_{=(a,b)\odot(c,d)} \oplus \underbrace{(ae-bf,\ af+be)}_{=(a,b)\odot(e,f)} =$$
$$= \big((a,b)\odot(c,d)\big)\oplus\big((a,b)\odot(e,f)\big) \quad \checkmark$$

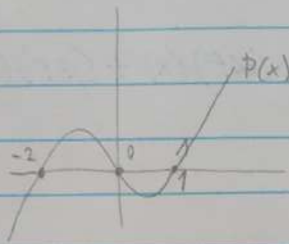
$$\big((a,b)\oplus(c,d)\big)\odot(e,f) = (a+c,\ b+d)\odot(e,f) =$$
$$= \big((a+c)e-(b+d)f,\ (a+c)f+(b+d)e\big) =$$
$$= (\underbrace{ae-bf}_{A}+\underbrace{ce-df}_{C},\ \underbrace{af+be}_{B}+\underbrace{cf+de}_{D}) = (A,B)\oplus(C,D) =$$
$$= (ae-bf,\ af+be)\oplus(ce-df,\ cf+de) =$$
$$= \big((a,b)\odot(e,f)\big)\oplus\big((c,d)\odot(e,f)\big) \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ je to pole

4. polynóm je funkcia $P: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \cdot 1$$

$a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \wedge a_n \neq 0$
(reálne) koeficienty



$P(x) = (x+2)\cdot(x-0)\cdot(x-1)$
$= x^3 + x^2 - 2x$

a) $\underline{V = \{P(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\} \text{ nad } \mathbb{R}}$ je to VP?

definujme: $(P+Q)(x) = P(x) + Q(x)$ pre $P(x), Q(x) \in V$

$(\alpha P)(x) = \alpha \cdot P(x)$

1. skúmame, či $(V, +)$ je abelovská grupa

- „+" je binárna operácia, lebo: $P(x) + Q(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 + b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0 \in V$
- $V \neq \emptyset$, lebo $P(x) = x^2 \in V$
- asociatívnosť:

$$((\underbrace{P+Q}_{U}) + W)(x) = \underset{\shortparallel (P+Q)}{U(x)} + W(x) = (P+Q)(x) + W(x) = P(x) + Q(x) + W(x)$$

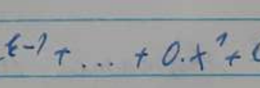
$$(P + (Q+W))(x) = P(x) + (Q+W)(x) = P(x) + Q(x) + W(x)$$ $\shortparallel$ $\forall P, Q, W \in V$

- komutatívnosť:

$$(P+Q)(x) = P(x) + Q(x)$$
$$(Q+P)(x) = Q(x) + P(x)$$ $\shortparallel$ $\forall P, Q \in V$

- neutrálny prvok: $(P+E)(x) = P(x)$

$$P(x) + E(x) = P(x) \Rightarrow E(x) \equiv 0$$

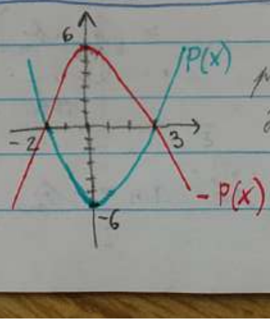


- inverzný prvok: $(P + (-P))(x) = E(x) = 0$

$$P(x) + (-P)(x) = 0 \cdot x^k + 0 x^{k-1} + \dots + 0 \cdot x^1 + 0$$
$$a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 + (-P)(x) = 0$$
$$\underline{\underline{(-P)(x) = \overset{\in \mathbb{R}}{-a_n} x^n \overset{\in \mathbb{R}}{-a_{n-1}} x^{n-1} - \dots - a_1 x - a_0}}$$

$\exists$ pre $\forall P(x)$

$\Rightarrow (V, +)$ je abelovská grupa



pre $P(x) = x^2 - x - 6$
je $-P(x) = -x^2 + x + 6$

2. overujeme axiómy 2-5

(2) $(\alpha+\beta)\vec{x} = \alpha\vec{x}+\beta\vec{x} \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R} \ \forall \vec{x} \in V$

$\in \mathbb{R}$ $\quad (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0)$

$$(\underbrace{(\alpha+\beta)}_{=\gamma\in\mathbb{R}}P)(x) \overset{def}{=} \underbrace{(\alpha+\beta)}_{\gamma}.P(x) = \alpha.P(x)+\beta.P(x) = (\alpha P)(x)+(\beta P)(x)$$

$(\gamma P)(x) = \gamma.P(x)$

(3) $\alpha(\vec{x}+\vec{y}) = \alpha\vec{x}+\alpha\vec{y} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$(\alpha(\underbrace{P+Q}_{S}))(x) = \alpha.(\underbrace{P+Q}_{S})(x) = \alpha.(P(x)+Q(x)) = \alpha.P(x)+\alpha.Q(x) = (\alpha P)(x)+(\alpha Q)(x)$$

(4) $\alpha(\beta\vec{x}) = (\alpha\beta)\vec{x} \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$ a $\forall \vec{x} \in V$

$$(\alpha(\underbrace{\beta P}_{S}))(x) = \alpha.(\beta P)(x) = \alpha.(\beta.P(x)) = (\alpha.\beta).P(x) = ((\alpha\beta)P)(x)$$

(5) $1\vec{x} = \vec{x} \quad \forall \vec{x} \in V$

$$(1P)(x) = 1.P(x) = P(x)$$

<u>Záver</u>: Množina $V = \{P(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ je vekt. priestor nad poľom $\mathbb{R}$. (s daným sčítovaním a násobením skalárom)

b) $V = \{P(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ nad $\mathbb{R}$, kde $P(x)$ je stupňa <u>práve</u> n

1. skúmame, či $(V,+)$ je abelovská grupa
- je „+" binárna operácia?

$$P(x)+Q(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 + b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$
$$= \underbrace{(a_n+b_n)}_{\text{toto musí byť } \neq 0 \text{ aby ten polynóm } \in V} x^n + (a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_1+b_1)x + (a_0+b_0)$$

lenže ak $a_n = -b_n$, tak $P(x)+Q(x) \notin V$, tj. nie je to bin. operácia