Cvičenie č. 3

6. 10. 2020

1. Nech $(F, +, \cdot)$ je pole. Dokážte, že platí

   a) $(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + b \cdot c + a \cdot d + b \cdot d$ pre $\forall a, b, c, d \in F$

   b) $a \cdot (b_1 + \cdots + b_k) = a \cdot b_1 + \cdots + a \cdot b_k$ pre $a, b_i \in F$, kde $i = 1, \ldots, k$

   c) $-(a + b) = (-a) + (-b)$ $\forall a, b \in F$

2. V poli $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ vypočítajte $2 \cdot 3 + 4 \cdot 2$, 2^{-1}, -3, $2 \cdot 3^{-1} + 4 \cdot 2^{-1} - 4$.

3. Majme na množine $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definované operácie $\oplus$, $\odot$ ako
   $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$ a $(a, b) \odot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.
   Dokážte, že $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \oplus, \odot)$ je pole.

   [Návod: To, že $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \oplus)$ a $(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}, \odot)$ sú komutatívne grupy, sme ukázali na cvičení 2. Takže stačí overiť distributívne zákony.]
   Poznámka: Tým sme vlastne ukázali, že $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ je pole.

4. Overte, či

   a) množina všetkých polynómov s reálnymi koeficientami

   b) množina všetkých polynómov stupňa práve n

   sú vektorové priestory. Sčitovanie a násobenie skalárom definujeme rovnako ako pre reálne funkcie.

barbora.pokorna@fmph.uniba.sk