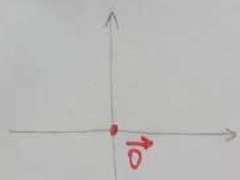
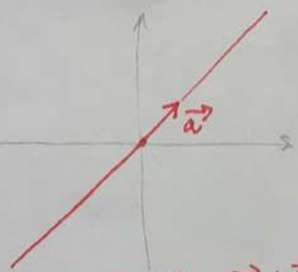
(1)

$\mathbb{R}^2$:

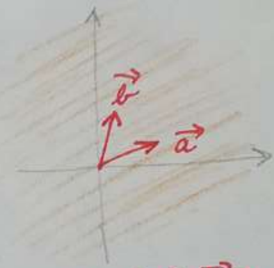


$D = \{\vec{0}\}$



$D = [\vec{a}]$ $\vec{a} \neq \vec{0}$

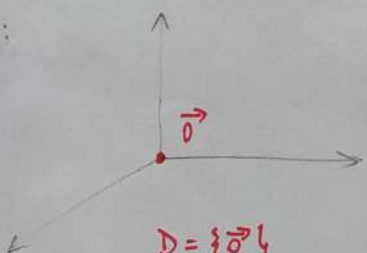
všetky priamky
prechádzajúce cez (0,0)



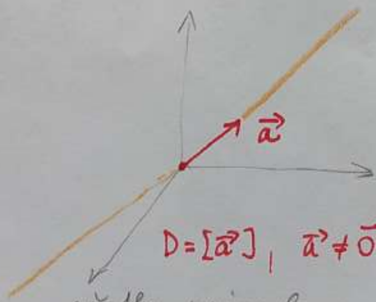
$D = [\vec{a}, \vec{b}] = \mathbb{R}^2$
$\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$, LN

Ako generátory volíme vždy LN vektory, aby sme pridaním vektora aj reálne získali nejaké „rozšírenie" D.
Zo Steinitzovej vety vieme, že viac ako 2 LN vektory nenájdeme v $\mathbb{R}^2$.

$\mathbb{R}^3$:

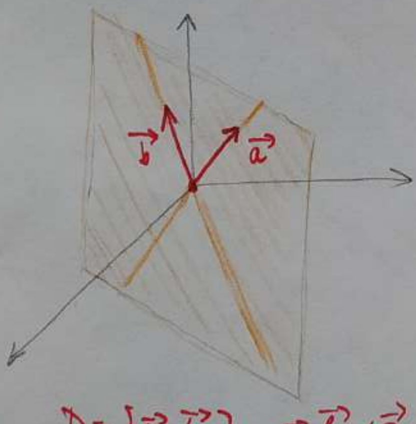


$D = \{\vec{0}\}$

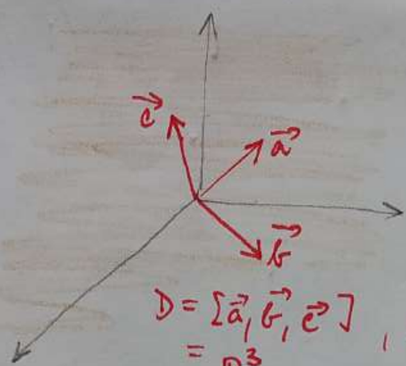


$D = [\vec{a}]$, $\vec{a} \neq \vec{0}$

všetky priamky
prechádzajúce cez (0,0,0)



$D = [\vec{a}, \vec{b}]$, $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$, LN
všetky roviny
prechádzajúce cez (0,0,0)



$D = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \mathbb{R}^3$, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \neq \vec{0}$, LN

2.) $V = \mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$

a) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \ x_1 \in \mathbb{Z}\}$

- množ. $M \neq \emptyset$, lebo $(\overset{\in \mathbb{Z}}{0},0,0) \in M$
- skúmajme $\vec{a}+\vec{b}$, kde $\vec{a},\vec{b} \in M$

súčet 2 celých čísel je celé číslo

$$\vec{a} + \vec{b} = (\overset{\in\mathbb{Z}}{z_1}, x_2, x_3) + (\overset{\in\mathbb{Z}}{z_2}, y_2, y_3) = (z_1+z_2, x_2+y_2, x_3+y_3) \in M$$

- ďalej počítajme $\alpha\vec{a}$, kde $\vec{a} \in M$ a $\alpha \in \mathbb{R}$

násobíme celé číslo reálnym $\Rightarrow \alpha z_1 \notin \mathbb{Z}$ napr pre $\alpha = \sqrt{2}$

$$\alpha\cdot\vec{a} = \alpha(z_1,x_2,x_3) = (\alpha z_1, \alpha x_2, \alpha x_3) \notin M$$

- záver: množ. M nie je VPP vo V

b) $M = \{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3, \ x_1 = 0\}$

- množ. $M\neq\emptyset$, lebo $(\overset{=0}{0},0,0)\in M$
- nech $\vec{a},\vec{b}\in M$: $\vec{a}+\vec{b} = (0,a_2,a_3)+(0,b_2,b_3) = (0,a_2+b_2,a_3+b_3) \in M$
- ďalej: $\alpha\vec{a} = \alpha(0,a_2,a_3) = (0,\alpha a_2,\alpha a_3)\in M$
- záver: M je VPP vo V
- generátory: $(0,x_2,x_3) = x_2(0,1,0)+x_3(0,0,1)$, tj: $[(0,1,0),(0,0,1)] = M$

c) $M = \{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3, \ x_1=0 \vee x_2=0\}$

↳ čiže prvky tvaru $(0,x_2,x_3)$, $(x_1,0,x_3)$, $(0,0,x_3)$, pričom x_3 - ľub.

- množ. $M\neq\emptyset$, lebo $(0,0,0) \in M$

$\rightarrow$ $\vec{a}+\vec{b}$ = [napr. tvaru 1 a 2] = $(0,x_2,x_3)+(x_1,0,x_3) = (x_1,x_2,2x_3)\notin M$

$\Rightarrow$ M nie je VPP vo V

d) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ 3x_1 + 4x_2 = 1\}$

- množ. $M \neq \emptyset$, lebo napr. $(0, \underset{\in\mathbb{R}}{\frac{1}{4}}, 0) \in M$ $\quad (3.0 + 4\cdot\frac{1}{4} = 1)$
- nech $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \in M$, tj: $3a_1 + 4a_2 = 1$
  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \in M$, tj: $3b_1 + 4b_2 = 1$

$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$

$\boxed{?}$ čomu sa rovná: $3(a_1 + b_1) + 4(a_2 + b_2) = 3a_1 + 3b_1 + 4a_2 + 4b_2 =$

$= \underbrace{(3a_1 + 4a_2)}_{=1,\ \text{lebo } \vec{a} \in M} + (\underbrace{3b_1 + 4b_2}_{=1}) = 1 + 1 = 2 \neq 1$

a teda $\vec{a} + \vec{b} \notin M$

- teda M nie je VPP vo V

e) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x_1 = x_2\}$

- množ. $M \neq \emptyset$, lebo $(0, 0, 0) \in M$ $\quad 0=0$
- nech $\vec{a} = (a_1, a_1, a_3) \in M$
  $\vec{b} = (b_1, b_1, b_3) \in M$

$\vec{a} + \vec{b} = (a_1, a_1, a_3) + (b_1, b_1, b_3) = (a_1 + b_1, a_1 + b_1, a_3 + b_3) \in M$

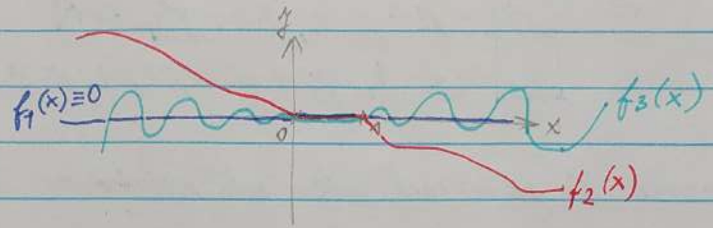
$\alpha\vec{a} = \alpha(a_1, a_1, a_3) = (\underbrace{\alpha a_1, \alpha a_1}_{=}, \alpha a_3) \in M$

- teda M je VPP vo V

- generátory: $\vec{x} = (x_1, x_1, x_3) = x_1(1,1,0) + x_3(0,0,1)$

$\Rightarrow [(1,1,0), (0,0,1)] = M$

3.) $A = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \forall x \in \langle 0,1\rangle : f(x) = 0\} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ nad $\mathbb{R}$



- množ. $A \neq \emptyset$, lebo funkcia $f_1(x) \equiv 0 \in A$
- nech $f(x), g(x) \in A$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, pre $x \in \langle 0,1\rangle$: $0 + 0 = 0$
a teda $(f+g) \in A$

- nech $f(x) \in A$ a $\alpha \in \mathbb{R}$

$(\alpha f)(x) = \alpha . f(x)$, pre $x \in \langle 0,1\rangle$: $\alpha . 0 = 0$
a teda $(\alpha f) \in A$

- teda množ. A je VPP vo V
- nemáme konečný počet generátorov (napr. „polynómy"
$f(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i & \text{pre } x \notin \langle 0,1\rangle \\ 0 & \text{pre } x \in \langle 0,1\rangle \end{cases}$)

4.) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ nad $\mathbb{R}$
- máme ukázať, že $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{a}+\vec{b}, \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}]$

1. $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \subset [\vec{a}, \vec{a}+\vec{b}, \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}]$, lebo:
- nech $\vec{x} \in [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$
$\Rightarrow \vec{x} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ pre $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$
- chceme ukázať, že $\exists\, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \in \mathbb{R}$ taký, že
$\vec{x} = \alpha_1\vec{a} + \beta_1(\vec{a}+\vec{b}) + \gamma_1(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{a} + \beta_1\vec{b} + \gamma_1\vec{a} + \gamma_1\vec{b} + \gamma_1\vec{c}$

$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \underbrace{(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1)}_{=\alpha}\vec{a} + \underbrace{(\beta_1 + \gamma_1)}_{=\beta}\vec{b} + \underbrace{\gamma_1}_{\gamma}\vec{c}$

$$\begin{aligned} \alpha_1+\beta_1+\gamma_1 &= \alpha \\ \beta_1+\gamma_1 &= \beta \\ \gamma_1 &= \gamma \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} \gamma_1 &= \underbrace{\gamma}_{} \in R \\ \beta_1 &= \beta-\gamma = \underbrace{\beta+(-\gamma)}_{} \in R \\ \alpha_1 &= \alpha-\beta_1-\gamma_1 = \alpha-(\beta-\gamma)-\gamma = \alpha-\beta = \underbrace{\alpha+(-\beta)}_{\in R} \end{aligned}}$$

overenie, že naozaj vieme $\vec{x}$ napísať ako LK vektorov $\vec{a}, \vec{a}+\vec{b}, \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

$$\alpha_1\vec{a}+\beta_1(\vec{a}+\vec{b})+\gamma_1(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = [\alpha+(-\beta)]\vec{a}+[\beta+(-\gamma)](\vec{a}+\vec{b})+\gamma(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

$$= (\alpha\vec{a}-\beta\vec{a})+(\beta\vec{a}+\beta\vec{b}-\gamma\vec{a}-\gamma\vec{b})+(\gamma\vec{a}+\gamma\vec{b}+\gamma\vec{c}) =$$

$$= \alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c} = \underline{\underline{\vec{x}}} \qquad \Rightarrow \vec{x} \in [\vec{a}, \vec{a}+\vec{b}, \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}]$$

2. $[\vec{a}, \vec{a}+\vec{b}, \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}] \subset [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$

- nech $\vec{x} \in [\vec{a}, \vec{a}+\vec{b}, \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}]$, t.j.:

  $\vec{x} = \alpha\vec{a}+\beta(\vec{a}+\vec{b})+\gamma(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ pre vhodné $\alpha, \beta, \gamma \in R$

- rozpíšme výraz:

  $$\vec{x} = \alpha\vec{a}+\beta\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{a}+\gamma\vec{b}+\gamma\vec{c} =$$
  $$= \underbrace{(\alpha+\beta+\gamma)}_{=\alpha'}\vec{a}+\underbrace{(\beta+\gamma)}_{=\beta'}\vec{b}+\underbrace{\gamma}_{=\gamma'}\vec{c}$$

  pre $\alpha' = \alpha+\beta+\gamma$, $\beta' = \beta+\gamma$, $\gamma' = \gamma$ $(\alpha', \beta', \gamma' \in R)$
  máme vekt. $\vec{x}$ vyjadrený ako LK vektorov $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

  $$\vec{x} = \alpha'\vec{a}+\beta'\vec{b}+\gamma'\vec{c} \quad \Rightarrow \quad \vec{x} \in [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$$

5.) 1, $[(1,1,0), (1,1,1), (1,0,1)] \subset V_3(\mathbb{R}) = [(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)]$

$$\vec{x} = \alpha(1,1,0)+\beta(1,1,1)+\gamma(1,0,1) = (\alpha+\beta+\gamma, \alpha+\beta, \beta+\gamma) =$$
$$= \underbrace{(\alpha+\beta+\gamma)}_{\in\mathbb{R}}.(1,0,0)+\underbrace{(\alpha+\beta)}_{\in\mathbb{R}}(0,1,0)+\underbrace{(\beta+\gamma)}_{\in\mathbb{R}}(0,0,1)$$

2, $V_3(\mathbb{R}) \subset [(1,1,0), (1,1,1), (1,0,1)]$

$$\vec{x} = (a,b,c) \stackrel{?}{=} \alpha(1,1,0)+\beta(1,1,1)+\gamma(1,0,1) \qquad ?\ \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

$$(a,b,c) = (\alpha+\beta+\gamma,\ \alpha+\beta,\ \beta+\gamma)$$

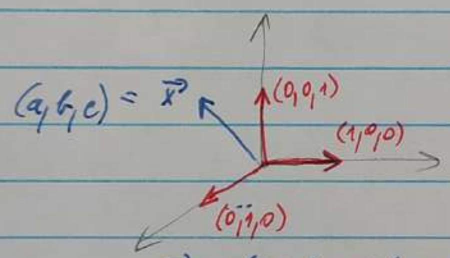
$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} a &= \alpha+\beta+\gamma \\ b &= \alpha+\beta \\ c &= \beta+\gamma \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &a = b+\gamma \\ &\text{čiže } \underline{\gamma = a-b} \end{aligned} \quad \begin{aligned} &c = \beta+(a-b) \\ &\underline{\beta = c-a+b} \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\alpha = b-\beta \\ &\underline{\alpha = a-c} \end{aligned}$$

overenie: $\overbrace{(a-c)}^{\alpha}(1,1,0) + \overbrace{(c-a+b)}^{\beta}(1,1,1) + \overbrace{(a-b)}^{\gamma}(1,0,1) =$

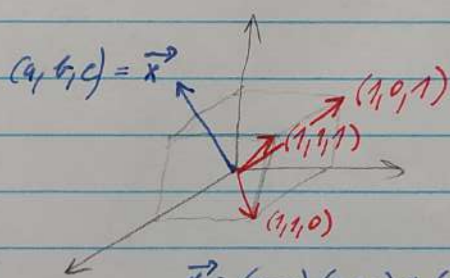
$= (a-c, a-c, 0) + (c-a+b, c-a+b, c-a+b) + (a-b, 0, a-b) =$

$= (a,b,c)$ ✓

čiže $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ sa dá napísať ako LK vektorov $(1,1,0)$, $(1,1,1)$, $(1,0,1)$



$\vec{x} = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1)$



$\vec{x} = (a-c)(1,1,0) + (c-a+b)(1,1,1) + (a-b)(1,0,1)$