① a) $(1,2,3)$, $(1,3,2)$, $(2,1,5)$ vo $V_3(\mathbb{R})$

- máme zistiť, či existujú $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ také, že

$$\alpha(1,2,3) + \beta(1,3,2) + \gamma(2,1,5) = (0,0,0) \quad (=\vec{0})$$
$$(\alpha+\beta+2\gamma,\ 2\alpha+3\beta+\gamma,\ 3\alpha+2\beta+5\gamma) = (0,0,0)$$

$$\begin{aligned} 1\cdot\alpha+\beta+2\gamma &= 0 \\ 2\alpha+3\beta+\gamma &= 0 \\ 3\alpha+2\beta+5\gamma &= 0 \end{aligned} \quad \left.\right\} + (-2)\cdot 1 (1.\ \text{riadok}) \quad \left.\right\} + (-3)\cdot 1 (1.\ \text{riadok})$$

opačný k 2

inverzný k 1

$$\begin{aligned} \alpha+\beta+2\gamma &= 0 \\ \beta-3\gamma &= 0 \\ -\beta-\gamma &= 0 \end{aligned} \quad \left.\right\} + (1)\cdot 1 (2.\ \text{riadok})$$

$$\begin{aligned} \alpha+\beta+2\gamma &= 0 \\ \beta-3\gamma &= 0 \\ -4\gamma &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \underline{\gamma=0} \rightarrow \underline{\beta=0} \rightarrow \underline{\alpha=0}$$

- riešením sústavy Gaussovou elim. metódou sme získali RIEŠENIE systému LINEÁRNYCH ROVNÍC v tvare:

$$(\alpha,\beta,\gamma) = (0,0,0)$$

- to je triviálna kombinácia pre nulový vektor
=> vektory sú LINEÁRNE NEZÁVISLÉ vo $V_3(\mathbb{R})$

- a keďže $\dim(V_3(\mathbb{R})) = 3$, tak tieto vektory sú zároveň BÁZOU tohoto VP
(jednou z mnohých)

<u>Veta</u>: $\langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \rangle$ je báza vo V ($\dim V = n$) $\Leftrightarrow$ sú LN

b) $(1,2,3)$, $(1,3,2)$, $(2,1,5)$, $(1,127,3)$ vo $V_3(\mathbb{R})$

- dôsledok Steinitzovej vety: 4 vektory vo VP $\dim V_3(\mathbb{R})=3$ sú LZ

c) $(1,3,4,1)$, $(2,1,3,2)$, $(3,1,4,3)$ vo $V_4(\mathbb{Z}_7)$ $= \{0,1,2,3,4,5,6\}$

- hľadáme $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}_7$:

$$\alpha(1,3,4,1) + \beta(2,1,3,2) + \gamma(3,1,4,3) = (0,0,0,0)$$

$$\begin{aligned} 1\cdot\alpha + 2\beta + 3\gamma &= 0 \\ 3\alpha + \beta + \gamma &= 0 \quad + (4)\cdot 1 \cdot r_1 \\ 4\alpha + 3\beta + 4\gamma &= 0 \quad + (3)\cdot 1 \cdot r_1 \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma &= 0 \quad + (6)\cdot 1 \cdot r_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta + 3\gamma &= 0 \\ 2\beta + 6\gamma &= 0 \\ 2\beta + 6\gamma &= 0 \quad + (5).4.r_2 \\ 0 &= 0 \quad \text{VOK} \end{aligned}$$

opačný k 2

inverzný k 2

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta + 3\gamma &= 0 \\ 2\beta + 6\gamma &= 0 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\underline{\gamma}$ - parameter, β dopočítame

$2\beta = (-6)\gamma$ (v $\mathbb{Z}_7$)!

$\beta = 2^{-1}\cdot(-6)\gamma$

$\beta = 4.1\gamma = \underline{4\gamma}$

over: $2.(4\gamma) + 6\gamma = \gamma + 6\gamma = (7 \bmod 7)\gamma = 0\gamma = 0$

dosadíme do 1. rovnice na výpočet α:

$$\alpha + 2(4\gamma) + 3\gamma = 0$$
$$\alpha + 4\gamma = 0$$
$$\alpha = (-4)\gamma = \underline{3\gamma}$$

- riešením sústavy pomocou GEM sme získali RIEŠENIE syst. lin. rovníc v tvare:

$$(\alpha, \beta, \gamma) = \{(3\gamma, 4\gamma, \gamma) \text{ pre } \gamma \in \mathbb{Z}_7\}$$

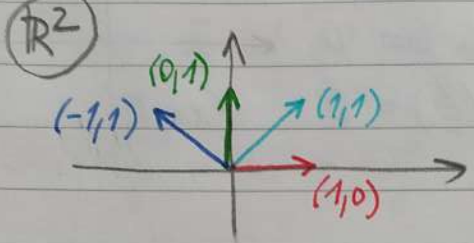
- čiže napr. pre $\gamma = 1$ je riešením $(\alpha, \beta, \gamma) = (3,4,1)$, čo dáva NETRIVIÁLNU kombináciu pre $\vec{o}$:

$$3(1,3,4,1) + 4(2,1,3,2) + 1(3,1,4,3) = (0,0,0,0)$$

- a teda vektory sú LZ

② $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{w} \in V_2(\mathbb{R})$ tak, aby každá dvojica bola LN

- vieme, že $\vec{x}, \vec{y} \neq \vec{0}$ sú LZ $\Leftrightarrow$ $\vec{x} = \alpha \vec{y}$
(čiže ležia na 1 priamke)



$\vec{x} = (1,0)$ $\vec{y} = (1,1)$ $\vec{z} = (0,1)$ $\vec{w} = (-1,1)$
sú po dvojiciach LN

③ a) $f(x) = x+1$ $g(x) = x^2$ $h(x) = x^3$ v $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \mathbb{R}\cdot)$

OPAKOVANIE: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ pre $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
$(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x)$ pre $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$

- hľadáme $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$:

nulová funkcia $e(x) = 0$ pre $\forall x \in \mathbb{R}$

$\alpha f(x) + \beta g(x) + \gamma h(x) = \vec{0}$ pre $\forall x \in \mathbb{R}$
$\alpha (x+1) + \beta x^2 + \gamma x^3 = 0$ pre $\forall x \in \mathbb{R}$
$\alpha + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 = 0$ pre $\forall x \in \mathbb{R}$

- polynóm sa rovná 0 pre všetky $x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ keď je to NULOVÝ POLYNÓM (teda jeho koef. sú 0)

$\Rightarrow$ $\alpha = 0$ $\beta = 0$ $\gamma = 0$

a teda $f(x), g(x), h(x)$ sú LN

b) $f(x) = 1 \quad g(x) = \cos x \quad h(x) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$

- hľadáme $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$:

$$\alpha f(x) + \beta g(x) + \gamma h(x) = \vec{0}$$
$$\alpha \cdot 1 + \beta \cos x + \gamma \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- skúmajme $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$:

vieme, že $\cos 2x = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

čiže $\cos 2x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

a teda $\cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$

$$\Rightarrow \quad \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cos x + 1}{2}$$

- môžeme nahradiť:

$$\alpha \cdot 1 + \beta \cos x + \gamma \cdot \frac{\cos x + 1}{2} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\alpha \cdot 1 + \beta \cos x + \left(\frac{\gamma}{2}\right) \cos x + \frac{\gamma}{2} \cdot 1 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) \cdot 1 + \left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right) \cos x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha + \frac{\gamma}{2} = 0$$
$$\beta + \frac{\gamma}{2} = 0$$

GEM: $\alpha + \frac{1}{2}\gamma = 0$

$\beta + \frac{1}{2}\gamma = 0 \quad \Rightarrow \gamma$ - param, $\beta = -\frac{1}{2}\gamma$, $\alpha = -\frac{1}{2}\gamma$

- získali sme RIEŠENIE: $(\alpha, \beta, \gamma) = \{(-\frac{1}{2}\gamma, -\frac{1}{2}\gamma, \gamma); \gamma \in \mathbb{R}\}$
- čiže napr. pre $\gamma = -2$:

$(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 1, -2)$

a teda:

$$1 \cdot f(x) + 1 \cdot g(x) + (-2)\, h(x) = \vec{0}$$

over: $1 \cdot 1 + 1 \cdot \cos x - 2 \cdot \frac{\cos x + 1}{2} = 1 + \cos x - \cos x - 1 = 0$ pre $\forall x \in \mathbb{R}$

- čiže $f(x), g(x), h(x)$ sú LZ

④ $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ – nenulové

a) $\vec{x}, \vec{y}, \overbrace{\vec{x}+\vec{y}}^{\vec{w}}, \vec{z}$

– vieme, že sú LZ ak niektorý je LK ostatných

$\vec{w} = \vec{x} + \vec{y} = 1.\vec{x} + 1.\vec{y} + 0.\vec{z}$ a $1, 0 \in R$ $\Rightarrow$ sú LZ

b) $\vec{x}, \vec{y}, \vec{o}$

– vieme, že ak postupnosť obsahuje $\vec{o}$, tak je LZ

PREČO?

$$\vec{o} = 0.\vec{x} + 0.\vec{y} + 1.\vec{o}$$

$(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 1)$ – netriv. komb., $0, 1 \in R$

c) $\vec{x}, \overbrace{\vec{x}}^{\vec{w}}, \vec{y}, \vec{z}$

$\vec{w} = \vec{x} = 1.\vec{x} + 0.\vec{y} + 0.\vec{z}$ a $1, 0 \in R$ $\Rightarrow$ sú LZ

⑤ – vieme, že $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$ je báza vo V nad R

$\Rightarrow$ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sú LN, nenulové, $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = V$ a $\underline{\dim V = 3}$

– ak vektory $\vec{a} + 2\vec{b}, \vec{b} + 2\vec{c}, \vec{c} + 2\vec{a}$ budú tvoriť bázu

$\Leftrightarrow$ budú LN

– čiže hľadáme $\alpha, \beta, \gamma \in R$:

$$\alpha(\vec{a} + 2\vec{b}) + \beta(\vec{b} + 2\vec{c}) + \gamma(\vec{c} + 2\vec{a}) = \vec{o}$$
$$(\alpha + 2\gamma)\vec{a} + (2\alpha + \beta)\vec{b} + (2\beta + \gamma)\vec{c} = \vec{o}$$

– keďže $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sú LN $\Rightarrow$
$$\alpha + 2\gamma = 0$$
$$2\alpha + \beta = 0$$
$$2\beta + \gamma = 0$$

– riešime systém a získame riešenie: $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)$

$\Rightarrow$ $\langle \vec{a} + 2\vec{b}, \vec{b} + 2\vec{c}, \vec{c} + 2\vec{a} \rangle$ <u>tvoria bázu</u> V

⑥ $S = [\overset{\vec{a}}{(1,3,2,1)}, \overset{\vec{b}}{(4,9,5,4)}, \overset{\vec{c}}{(3,7,4,3)}]$

[?] $\dim S = 1$

- to by museli ∀3 ležať na 1 priamke, napr. $\vec{a}$ a $\vec{b}$ sú určite LN, lebo jeden nie je násobkom druhého

[?] $\dim S = 2$

- to by museli ∀3 ležať v 1 rovine
- vieme, že $\vec{a}, \vec{b}$ sú LN
- skúmajme, či $\vec{c}$ je LK ostatných alebo nie:

$$\alpha(1,3,2,1) + \beta(4,9,5,4) = (3,7,4,3)$$

- riešme systém:

$$\begin{aligned} \alpha + 4\beta &= 3 \\ 3\alpha + 9\beta &= 7 \quad +(-3)\cdot r_1 \\ 2\alpha + 5\beta &= 4 \quad +(-2)\, r_1 \\ \alpha + 4\beta &= 3 \quad +(-1)\cdot r_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha + 4\beta &= 3 \\ -3\beta &= -2 \\ -3\beta &= -2 \quad \Rightarrow \underline{\beta = \tfrac{2}{3}} \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

$$\underline{\alpha = \tfrac{1}{3}}$$

- našli sme riešenie $(\alpha, \beta) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$
⇒ $\vec{c}$ sa dá napísať ako LK ostatných dvoch
⇒ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sú LZ a teda ležia v 1 rovine
⇒

$$\boxed{\dim S = 2}$$

(7) - sme vo VP $V_4(\mathbb{Z}_5)$

- určite $V_4(\mathbb{Z}_5) = [\underbrace{(1,0,0,0)}_{\vec{x_1}}, \underbrace{(0,1,0,0)}_{\vec{x_2}}, \underbrace{(0,0,1,0)}_{\vec{x_3}}, \underbrace{(0,0,0,1)}_{\vec{x_4}}]$

- skúmame, či vôbec sú zadané vektory LN:
$(2,1,1,1)$ nie je násobkom $(2,2,1,2)$, tj. sú LN

- máme množ. $\{\underbrace{(2,1,1,1)}_{\vec{y_1}}, \underbrace{(2,2,1,2)}_{\vec{y_2}}\}$ LN vektorov,
t.j. podľa Steinitzovej vety vieme doplňať
z vektorov $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}, \vec{x_4}$ na bázu

- skúsme $\vec{x_1}$ (či je s $\vec{y_1}$ a $\vec{y_2}$ LN):

$\boxed{?}\ \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_5: \alpha(2,1,1,1) + \beta(2,2,1,2) = (1,0,0,0)$

- riešime systém:
$$\begin{aligned} 2\alpha + 2\beta &= 1 \\ \alpha + 2\beta &= 0 \\ \alpha + \beta &= 0 \\ \alpha + 2\beta &= 0 \end{aligned}$$

- to je to isté ako:
$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 0 \\ 2\alpha + 2\beta &= 1 \quad + (3).r_1 \\ \alpha + 2\beta &= 0 \quad + (4).r_1 \\ \alpha + 2\beta &= 0 \quad + (4).r_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 0 \\ \underline{0 = 1} \end{aligned}$$
=> systém lin. rovníc NEMÁ RIEŠENIE

=> NEEXISTUJÚ také α, β, že by sme vedeli
vektor $\vec{x_1} = (1,0,0,0)$ napísať ako LK vektorov $\vec{y_1}, \vec{y_2}$
=> vektory $\vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{y_2}$ sú LN

- máme množ. LN vekt. $\{\vec{y_1}, \vec{y_2}, \vec{x_1}\}$, tj. podľa
Steinitzovej vety vieme doplňať z $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}, \vec{x_4}$ na bázu
- skúsme $\vec{x_2}$ (či je s $\vec{y_1}, \vec{y_2}, \vec{x_1}$ LN):

$\boxed{?}\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}_5: \quad \alpha(2,1,1,1) + \beta(2,2,1,2) + \gamma(1,0,0,0) = (0,1,0,0)$

- riešime lin. systém a zistíme, že nemá riešenie

$\Rightarrow$ vektory $\vec{y_1}, \vec{y_2}, \vec{x_1}, \vec{x_2}$ sú LN

a teda báza $V_4(\mathbb{R})$ je: $\underline{\langle (2,1,1,1), (2,2,1,2), (1,0,0,0), (0,1,0,0) \rangle}$