$$\overbrace{}^{x_1}\quad \overbrace{}^{x_2}$$

1. $S = [(1,2,3), (-1,2,3)]$
   $T = [\underbrace{(2,1,4)}_{y_1}, \underbrace{(-2,1,4)}_{y_2}]$ $\Big\}$ VPP vo $V_3(\mathbb{R}^3)$

- skúmajme priestory S, T:

priestor S:

sú x_1, x_2 LN? $\quad \alpha(1,2,3) = (-1,2,3)$

$$\begin{aligned} \alpha &= -1 \\ 2\alpha &= 2 \\ 3\alpha &= 3 \end{aligned}$$ overíme: $2(-1) = -2 \neq 2$

sústava nemá riešenie $\Rightarrow x_1, x_2$ sú LN

$\Rightarrow$ dim $S = 2$ (je to rovina vo $V_3(\mathbb{R})$)

báza: $\langle x_1, x_2 \rangle$

priestor T:

sú y_1, y_2 LN? $\quad \alpha(2,1,4) = (-2,1,4)$

$$\begin{aligned} 2\alpha &= -2 \\ \alpha &= 1 \\ 4\alpha &= 4 \end{aligned}$$ overíme: $2 \cdot 1 = 2 \neq -2$

sústava nemá rieš. $\Rightarrow y_1, y_2$ sú LN

$\Rightarrow$ dim $T = 2$ (je to rovina vo $V_3(\mathbb{R})$)

báza: $\langle y_1, y_2 \rangle$

- hľadajme VP $S \cap T$ (vieme, že bude rôzny od $\{\vec{o}\}$)

ak $\vec{a} \in S \cap T \Rightarrow \vec{a} \in S$: $\vec{a} = \alpha \vec{x_1} + \beta \vec{x_2}$

$\vec{a} \in T$: $\vec{a} = \delta \vec{y_1} + \lambda \vec{y_2}$

keďže: $\vec{a} = \vec{a}$

$$\alpha \vec{x_1} + \beta \vec{x_2} = \delta \vec{y_1} + \lambda \vec{y_2}$$

$$\alpha \vec{x_1} + \beta \vec{x_2} - \delta \vec{y_1} - \lambda \vec{y_2} = \vec{o}$$

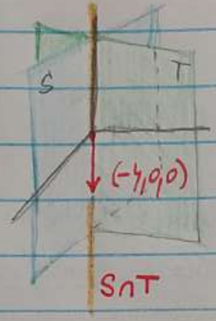
$$\alpha(1,2,3) + \beta(-1,2,3) - \delta(2,1,4) - \lambda(-2,1,4) = (0,0,0)$$

$$\begin{aligned} \alpha - \beta - 2\delta + 2\lambda &= 0 \\ 2\alpha + 2\beta - \delta - \lambda &= 0 \\ 3\alpha + 3\beta - 4\delta - 4\lambda &= 0 \end{aligned}$$

$\Big\}$ riešením sústavy je množina $\{(-2\lambda, 2\lambda, -\lambda, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$

ako teda vyzerá $\vec{a} \in S \cap T$ pre $\alpha = -2\lambda$, $\beta = 2\lambda$, $\delta = -\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$\vec{a} = \alpha \vec{x_1} + \beta \vec{x_2} = (-2\lambda)(1,2,3) + 2\lambda(-1,2,3) = (-4\lambda, 0, 0) = \lambda \cdot (-4,0,0)$



toto je vlastne param. vyjadrenie priamky prechádz. cez (0,0,0)

$p: \; x = 0 - 4\lambda$
$\quad y = 0 + 0.\lambda$
$\quad z = 0 + 0.\lambda \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \dim(S \cap T) = 1$

báza $\langle(-4,0,0)\rangle$ (alebo aj $\langle(-1,0,0)\rangle$, resp. $\langle(1,0,0)\rangle$)

- lineárny súčet $S+T$ **nie je priamy**, lebo $S \cap T \neq \{\vec{o}\}$

$\dim(S+T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T) = 2+2-1 = 3$

keďže sme vo $V_3(\mathbb{R})$, ktorého $\dim V_3(\mathbb{R}) = 3$, tak $S+T = V_3(\mathbb{R})$

báza pr. $S+T$: (nemôžeme zobrať $\{x_1, x_2, y_1, y_2\}$, lebo sú LZ)

- v tomto prípade môžeme použiť bázu z $V_3(\mathbb{R})$, tj $\langle \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3} \rangle$
- vo všeobecnosti ju hľadáme takto:
  - zoberieme bázové vektory z $S \cap T$, tj: $(-4,0,0)$
  - doplníme z bázových vektorov S tie, ktoré chýbajú do „vygenerovania" celého S:

    skúsime: $(-4,0,0)$, x_1 – sú LN?

    $\alpha(-4,0,0) = (1,2,3)$

    $\left.\begin{array}{l} -4\alpha = 1 \\ 0 = 2 \\ 0 = 3 \end{array}\right\}$ nemá rieš. $\Rightarrow$ sú LN a teda $S = [(-4,0,0),(1,2,3)]$

  - podobne doplníme z bázových vektorov T, tj. $T = [(-4,0,0),(2,1,4)]$

- a teda báza $S+T$: $\langle(-4,0,0),(1,2,3),(2,1,4)\rangle$

2. máme $S, T \subset V_3(F)$, kde F-pole
$S \neq T$, $\dim S = 2$
$\dim T = 2$

chceme ukázať, že $\dim(S \cap T) \geq 1$

Dôkaz <u>SPOROM</u>: nech $\dim(S \cap T) = 0$

$\Rightarrow S \cap T = \{\vec{o}\} \Rightarrow S + T \sim S \oplus T$

$$\dim(S \oplus T) = \dim S + \dim T = 2 + 2 = 4$$

- lenže $\dim V_3(F) = 3$ a teda $S \oplus T \not\subset V_3(F)$, čo je SPOR, lebo ak $\vec{x} \in S \oplus T$

$$\underset{\substack{\cap \\ V_3(R)}}{\vec{x} = \vec{s}} + \vec{t}_{\in V_3(R)} \Rightarrow \in V_3(R)$$

- teda $\dim(S \cap T)$ je naozaj > 0 a teda $\underline{\dim(S \cap T) \geq 1}$

3. máme $S, T \subset V_4(F)$, kde F-pole
$S \neq T$, $\dim S = 3$
$\dim T = 3$

- ako môže vyzerať prienik $\underline{S \cap T}$, resp. čo vieme o jeho $\dim(S \cap T)$

$\boxed{?}$ $\dim(S \cap T) = 0$
- to by znamenalo, že $S \cap T = \{\vec{o}\}$ a teda vieme vo $V_4(F)$ urobiť $S \oplus T$
- lenže $\dim(S \oplus T) = \dim S + \dim T = 3 + 3 = 6 \underset{\text{SPOR}}{>} 4 = \dim V_4(F)$
$\Rightarrow \underline{\dim(S \cap T) \neq 0}$

$\boxed{?}$ $\dim(S \cap T) = 1$
- potom by $\dim(S + T) = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T) = 3 + 3 - 1 = 5$ SPOR
$\Rightarrow \underline{\dim(S \cap T) \neq 1}$

$\boxed{?}$ $\dim(S \cap T) = 2$

- potom by: $\dim(S+T) = 3+3-2 = 4 = \dim V_4(F)$
- teda tento prípad MÔŽE nastať
- skúsme hľadať príklad:

$$V_4(F) = [v_1, v_2, v_3, v_4], \text{ že } \langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle \text{ je báza}$$

zoberme: $S = [v_1, v_2, v_3]$ $\Rightarrow$ $S \neq T$ ✓

$T = [v_1, v_2, v_4]$ $\dim S = 3$ ✓

$\dim T = 3$ ✓

$S \cap T = [v_1, v_2]$, $\langle v_1, v_2 \rangle$ sú LN

$\Rightarrow \dim(S \cap T) = 2$ ✓

a teda sme našli príklad takých 3-rozm. S, T vo $V_4(F)$

$\boxed{?}$ $\dim(S \cap T) = 3$

- potom by: $\dim(S+T) = 3+3-3 = 3 = \dim S = \dim T$

$\Rightarrow S \cap T = S = T$, čo je spor s predpokl. $S \neq T$

$\Rightarrow \underline{\dim(S \cap T) \neq 3}$

Záver: ak máme 2 rôzne 3-rozmerné VPP v 4-rozm. VP, tak určite ich prienikom je ROVINA.