Úloha 1: $V = M_{m,n}(R)$ $\dim V = m.n$

- nájdeme vhodné generátory a ukážeme, že sú LN => báza
- zoberme $A \in M_{m,n}(R)$

→ jednotka poľa R

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & & a_{mn} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix} + \ldots$$

$$+ a_{1n} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\ldots\ldots}_{2.\text{ riadok}} + a_{mn} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{a_{11} \cdot E_{11} + a_{12} E_{12} + \ldots + a_{mn} E_{mn}}$$ kde $E_{ij} = \begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots 1 \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} & i\text{-ty riadok} \\ j\text{-ty stĺpec} & \end{array}$

- tieto matice generujú celý priestor V:

$$M_{m,n}(R) = [E_{11}, \ldots, E_{1n}, E_{21}, \ldots, E_{m1}, \ldots, E_{mn}]$$

- potrebujeme ukázať, že sú LN:
  teda hľadáme $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{mn} \in R$ také, že:
  $\alpha_{11}E_{11} + \ldots + \alpha_{1n}E_{1n} + \alpha_{21}E_{21} + \ldots + \alpha_{m1}E_{m1} + \ldots + \alpha_{mn}E_{mn} = 0$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \cdots & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{m1} & \cdots & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

a to nastane $\Leftrightarrow \forall \alpha_{ij} = 0$, teda ide o triviálnu LK
$\Rightarrow E_{ij}$ sú LN

- keďže ide o bázu, zistíme počet jej vektorov a máme dim:

$$\left.\begin{array}{l} E_{11}, \ldots, E_{1n} \sim n \\ E_{21}, \ldots, E_{2n} \sim n \\ \vdots \\ E_{m1}, \ldots, E_{mn} \sim n \end{array}\right\} m \text{ riadkov} \Rightarrow \boxed{\dim V = m.n}$$

Úloha 2: A, B nad $\mathbb{Z}_5$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^T =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}}}$$

Úloha 3: M nad $\mathbb{Z}_5$, hledáme v RSM

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \underset{1r \leftrightarrow 3r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{2r \mathrel{+}= (\overset{=2}{-3}) * 1r \\ 3r \mathrel{+}= (\overset{=3}{-2}) * 1r \\ 4r \mathrel{+}= (\underset{=1}{-4}) * 1r}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \underset{2r \mathrel{*}= 3^{-1} = 2}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{3r \mathrel{+}= (\overset{=1}{-4}) * 2r \\ 4r \mathrel{+}= (\underset{=3}{-2}) * 2r}}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M', \text{ je RSM}$$

Úloha 4: $A_t \in M_{3,4}(\mathbb{R})$, t-parameter , $h(A_t) = ?$

- hodnosť je počet nenulových riadkov:

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 2t & 10 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \overset{1r \leftrightarrow 3r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 10 & -6 & 1 \\ 4 & -2 & 2t & 10 \\ 1 & t & -1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\substack{2r \pm (-4) * 1r \\ 3r \pm (-1) * 1r}}{\sim} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 10 & -6 & 1 \\ 0 & -42 & 2t+24 & 6 \\ 0 & t-10 & 5 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \dots \vec{x} \\ \dots \vec{y} \end{array}$$

- hodnosť bude závisieť od toho, či budú riadky 2. a 3. LZ

- pýtame sa, či môže byť $\vec{x} = \alpha \vec{y}$

$(0, -42, 2t+24, 6) = \alpha(0, t-10, 5, 1)$

$0 = \alpha . 0$

$-42 = \alpha(t-10)$ overíme: $6(3-10) = -42$ ✓

$2t + 24 = \alpha \cdot 5$ $2t + 24 = 30 \Rightarrow t = 3$

$6 = \alpha . 1$ $\Rightarrow \alpha = 6$

$\Rightarrow$ pre $t = 3$ dostávame:

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & -6 & 1 \\ 0 & -42 & 30 & 6 \\ 0 & -7 & 5 & 1 \end{pmatrix} \overset{2r * = \frac{1}{6}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 10 & -6 & 1 \\ 0 & -7 & 5 & 1 \\ 0 & -7 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 10 & -6 & 1 \\ 0 & -7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{h(A_{t=3}) = 2}$$

pre $t \neq 3$ máme $\boxed{h(A_t) = 3}$

úloha 5: $\vec{a} = (3,2,4,1)$
$\vec{b} = (3,2,3,2)$
$\vec{c} = (1,4,0,0)$ } máme doplniť na bázu $V_4(\mathbb{Z}_5)$

- najprv nás zaujíma skutočná dimenzia $S = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{1r \leftrightarrow 3r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \underset{3r \mathrel{+}= (-3)*1r}{\overset{2r \mathrel{+}= \overset{=2}{(-3)}*1r}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \overset{2r \mathrel{*}= \overset{=2}{3^{-1}}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{3r \mathrel{+}= \overset{=1}{(-4)}*2r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h(M) = 2 \Rightarrow \underline{\dim S = 2}$$

čiže medzi $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ je jeden LZ vektor

$\Rightarrow$ potrebujeme z trojice $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vybrať dva, ktoré sú LN a doplniť k nim <u>vhodné</u> dva vektory zo štandardnej bázy
$V_4(\mathbb{Z}_5) = [(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)]$

- pozrime sa na úpravy v M:

$$M = \begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \vec{c} \\ \vec{b} \\ \vec{a} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \vec{c} \\ \vec{b} + 2\vec{c} \\ \vec{a} + 2\vec{c} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \vec{c} \\ 2\vec{b} + 4\vec{c} \\ \vec{a} + 2\vec{c} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \vec{c} \\ 2\vec{b} + 4\vec{c} \\ \vec{a} + 2\vec{c} + (2\vec{b} + 4\vec{c}) \end{pmatrix}$$

- čiže môžeme zobrať vektory $\vec{c}, \vec{b}$ a k nim budeme pridávať

$$S = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}] = [(1,4,0,0), (0,0,1,4)]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ \boxed{0 \; 1 \; 0 \; 0} \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ \boxed{0 \; 0 \; 0 \; 1} \end{pmatrix} \underset{3r \mathrel{+}= \underset{=1}{(-4)}*4r}{\overset{1r \mathrel{+}= \overset{=1}{(-4)}*2r}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4$$

$\Rightarrow$ tieto vektory generujú celý $V_4(\mathbb{Z}_5)$

- čiže to, čo nám chýba, je $T = [(0,1,0,0), (0,0,0,1)]$
aby

$$S \oplus T = [(1,4,0,0), (0,0,1,4), (0,1,0,0), (0,0,0,1)] =$$
$$= \underline{\underline{[\vec{b}, \vec{c}, (0,1,0,0), (0,0,0,1)]}}$$

overenie: $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4$

<u>úloha 6</u>: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\boxed{?}$ $S = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}] \overset{?}{=} V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ <u>štand. báza</u>: $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

- pýtame sa, či sú $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ LN; teda pre aké $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$

$$\alpha\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha+\beta+\gamma+\delta & 2\alpha+3\beta+\gamma+2\delta \\ \gamma+\delta & 2\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

máme systém rovníc:

$$\begin{aligned} \alpha+\beta+\gamma+\delta &= 0 \\ 2\alpha+3\beta+\gamma+2\delta &= 0 \\ \gamma+\delta &= 0 \\ 2\delta &= 0 \quad \Rightarrow \underline{\delta = 0} \end{aligned}$$

$\underline{\gamma = 0}$, $\alpha = -\beta$, $-2\beta + 3\beta = 0$, $\underline{\beta = 0}$, $\underline{\alpha = 0}$

$\Rightarrow$ ide o triviálnu LK a teda $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ sú LN. Zároveň sú 4, t.j. generujú celý priestor $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

<u>overenie:</u> naozaj každú $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ vieme pomocou nich získať

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

máme systém:

$$\begin{aligned} \alpha+\beta+\gamma+\delta &= x \\ 2\alpha+3\beta+\gamma+2\delta &= y \\ \gamma+\delta &= z \\ 2\delta &= w \quad \Rightarrow \underline{\delta = \tfrac{w}{2}} \end{aligned}$$

do (3): $\underline{\gamma = z - \frac{w}{2}}$

do (1): $\alpha = -\beta + x - z + \cancel{\frac{w}{2}} - \cancel{\frac{w}{2}} = -\beta + x - z$

do (2): $\underline{\beta = y + z - 2x - \frac{w}{2}}$

$\underline{\alpha = 3x - y - 2z + \frac{w}{2}}$

čiže: $\left(3x-y-2z+\frac{w}{2}\right)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \left(y+z-2x-\frac{w}{2}\right)\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \left(z-\frac{w}{2}\right)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{w}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 3x-y-2z+\frac{w}{2}+y+z-2x-\frac{w}{2}+z-\frac{w}{2}+\frac{w}{2} & 6x-2y-4z+w+3y+3z-6x-\frac{3}{2}w+z-\frac{w}{2}+w \\ z-\frac{w}{2}+\frac{w}{2} & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$