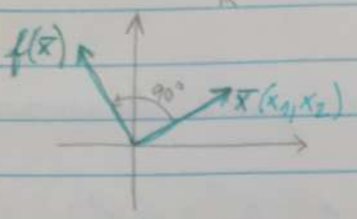
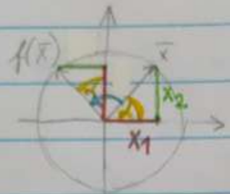
Úloha 1: Otočenie v rovine o 90° je lin. zobrazenie



$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$f(x_1,x_2) = ?$



$f(x_1,x_2) = (-x_2, x_1)$

- chceme overiť podm. lineárnosti pre $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x_1,x_2) = (-x_2,x_1)$

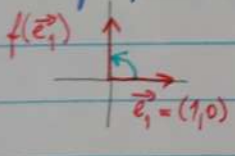
$$f(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}) = f(\alpha(x_1,x_2)+\beta(y_1,y_2)) = f(\alpha x_1+\beta y_1, \alpha x_2+\beta y_2) =$$

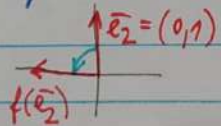
$$= (-(\alpha x_2+\beta y_2), \alpha x_1+\beta y_1) = (-\alpha x_2, \alpha x_1) + (-\beta y_2, \beta y_1) =$$

$$= \alpha(-x_2,x_1) + \beta(-y_2,y_1) = \alpha f(\vec{x}) + \beta f(\vec{y})$$

- naozaj je lineárne. Keďže je definované pre $R^k \to R^s$, môžeme hľadať maticu M_f :

$f(1,0) = (0,1)$ $\qquad$ $f(0,1) = (-1,0)$ $\qquad$, čiže $M_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$





- naozaj, keď túto maticu použijeme na $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$, dostaneme predpis f:

$$f(\vec{x}) = (x_1,x_2) \cdot M_f = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (0\cdot x_1 - 1\cdot x_2, 1\cdot x_1 + 0\cdot x_2) = (-x_2, x_1)$$

PREČO? $\quad f(x_1,x_2) = f(x_1(1,0) + x_2(0,1)) = x_1 f(1,0) + x_2 f(0,1) = (x_1,x_2)\begin{pmatrix} f(1,0) \\ f(0,1) \end{pmatrix}$

Úloha 2: a) $h: M_{m,n}(R) \to M_{n,m}(R)$

$h(A) = A^T$

- naozaj je to zobrazenie, lebo $\forall$ matici $\exists$ práve jedna transponovaná
- lineárnosť:

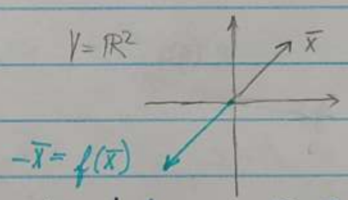
(1) $h(\underbrace{A+B}_{C}) = h(C) = C^T = (A+B)^T = A^T + B^T = h(A)+h(B)$

(2) $h(\underbrace{\alpha A}_{C}) = h(C) = C^T = (\alpha A)^T = \alpha A^T = \alpha h(A)$

$\Rightarrow$ je lineárne

b) $g: V(R) \to V(R)$

$g(\vec{x}) = -\vec{x}$



- je to zobraz., lebo $\forall \vec{x} \in V(R)$ $\exists$ práve jeden opačný vektor $-\vec{x} \in V(R)$
- lineárnosť:

$g(\underbrace{\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}}_{\vec{z}\in V(R)}) = g(\vec{z}) = -\vec{z} = -(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}) \overset{DZ}{=} (-1)(\alpha\vec{x}) + (-1)(\beta\vec{y}) =$

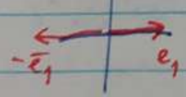
$= \alpha(-\vec{x}) + \beta(-\vec{y}) = \alpha g(\vec{x}) + \beta g(\vec{y})$

$\Rightarrow$ je to lin. zobrazenie

- nech $V(R) = \mathbb{R}^2$, nájdite maticu zobraz. $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$g(x_1, x_2) = (-x_1, -x_2)$

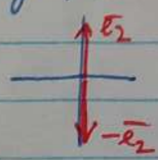
$g(1,0) = (-1,0)$



$\Rightarrow M_g = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

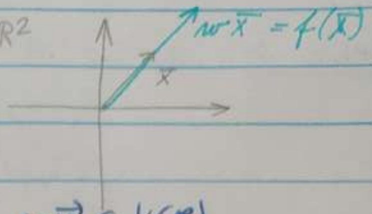
$g(0,1) = (0,-1)$

overenie: $g(\vec{x}) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (-x_1, -x_2)$ ✓



a) $r: V(R) \to V(R)$

$r(\vec{x}) = w.\vec{x}$ pre $w \neq 0$, $w \in R$



- je to zobrazenie, lebo $\forall \vec{x} \in V(R)$ $\exists$ jediné $w\vec{x} \in V(R)$
- lineárnosť:

$$r(\underbrace{\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}}_{\vec{z} \in V(R)}) = r(\vec{z}) = w.\vec{z} = w(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}) = w(\alpha\vec{x}) + w(\beta\vec{y}) =$$

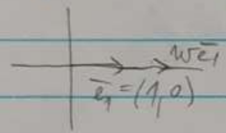
$$= \alpha w\vec{x} + \beta w\vec{y} = \alpha r(\vec{x}) + \beta r(\vec{y})$$

$\Rightarrow$ je to lin. zobr.

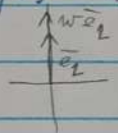
- nech $V(R) = \mathbb{R}^2$, nájdite maticu zobr. $r: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$r(x_1, x_2) = w(x_1, x_2) = (wx_1, wx_2)$

$r(1,0) = w(1,0) = (w, 0)$



$r(0,1) = w(0,1) = (0, w)$



$$M_r = \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix}$$

overenie:

$r(\vec{x}) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix} = (wx_1, wx_2)$

Úloha 3: a) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

$$f(2,0,3) = (1,2,-1,1)$$
$$f(4,1,5) = (4,5,-2,1)$$
$$f(3,1,2) = (1,-1,1,-1)$$

- máme zaručené, že také LINEÁRNE zobrazenie existuje?
- skúmame, či sú vektory $(2,0,3)$, $(4,1,5)$ a $(3,1,2)$ LN a teda či v $\mathbb{R}^3$ tvoria bázu:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -5/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$h(B) = 3$
$\Rightarrow$ vektory generujú priestor S
$\dim S = 3 \Rightarrow$ sú LN

- keďže $\langle (2,0,3), (4,1,5), (3,1,2) \rangle$ je báza v $\mathbb{R}^3$, tak určite EXISTUJE PRÁVE JEDNO lineárne zobrazenie f

- hľadáme M_f:

$1r \ast (3):\ 3 \quad 0 \quad 9/2 \quad 3/2 \quad 3 \quad -3/2 \quad 3/2$
$1r \ast (4):\ 4 \quad 0 \quad 6 \quad 2 \quad 4 \quad -2 \quad 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 2 & 0 & 3 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 & 4 & 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 3/2 & 1/2 & 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -5/2 & -1/2 & -4 & 5/2 & -5/2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 3/2 & 1/2 & 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3/2 & -5/2 & -5 & 5/2 & -3/2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 11/3 & 13/3 & -5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5/3 & 10/3 & -5/3 & 1 \end{array}\right)$$

$= M_f$

- čiže:
$$\left.\begin{aligned} f(1,0,0) &= (-2,-4,2,-1) \\ f(0,1,0) &= (11/3, 13/3, -5/3, 0) \\ f(0,0,1) &= (5/3, 10/3, -5/3, 1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow M_f = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 & -1 \\ 11/3 & 13/3 & -5/3 & 0 \\ 5/3 & 10/3 & -5/3 & 1 \end{pmatrix}$$

- predpis zobrazenia:

$$f(\vec{x}) = f(x_1,x_2,x_3) = (x_1,x_2,x_3) \cdot M_f = (\overbrace{-2x_1 + \tfrac{11}{3}x_2 + \tfrac{5}{3}x_3}^{1.\ \text{súr.}},\ \overbrace{-4x_1 + \tfrac{13}{3}x_2 + \tfrac{10}{3}x_3}^{2.\ \text{súr.}},$$
$$\underbrace{2x_1 - \tfrac{5}{3}x_2 - \tfrac{5}{3}x_3}_{3.\ \text{súr.}},\ \underbrace{-x_1 + x_3}_{4.\ \text{súr.}})$$

- overíme: $(3,1,2) \cdot M_f = (-6 + \frac{11}{3} + \frac{10}{3}, -12 + \frac{13}{3} + \frac{20}{3}, 6 - \frac{5}{3} - \frac{10}{3}, -3+2) = (1,-1,1,-1)$

✓ sedí so zadaním

b) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

$$f(\underbrace{2,0,3}_{\vec{a}_1}) = (1,2,-1,1)$$
$$f(\underbrace{4,1,5}_{\vec{a}_2}) = (4,5,-2,1)$$
$$f(\underbrace{2,-1,4}_{\vec{a}_3}) = (-1,1,-1,2)$$

- skúmame, či $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ tvoria bázu v $\mathbb{R}^3$:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$h(B) = 2$
$\Rightarrow$ vektory $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ generujú priestor S iba $\dim S = 2$
$\Rightarrow$ netvoria bázu, sú LZ

$\Rightarrow$ NEMÁME ZARUČENÉ, že $\exists$ lin. zobraz. f

- hľadáme M_f:

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 2 & 0 & 3 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 & 4 & 5 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 3/2 & 1/2 & 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 3/2 & 1/2 & 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$f(0,0,0) = (0,0,0,0)$, čiže $f(\vec{0}) = \vec{0}$
f spĺňa nutnú podmienku lineárnosti, tj. musíme hľadať ďalej

vidíme, že $f(0,0,1)$ si môžeme zvoliť ľubovoľne
$\Rightarrow$ $\exists$ nekonečne veľa lin. zobr. f

- zvoľme $f(0,0,1) = (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$
- potom máme:

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 3/2 & 1/2 & 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & b & c & d \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1-3a}{2} & 1-\frac{3}{2}b & \frac{-1-3c}{2} & \frac{1-3d}{2} \\ 0 & 1 & 0 & a+2 & b+1 & c & d-1 \\ 0 & 0 & 1 & a & b & c & d \end{array}\right)$$

$M_f\,(a,b,c,d)$

- čiže máme celú množinu matíc, ktoré reprezentujú lin. zobrazenia, ktoré spĺňajú zadané podmienky

- overme pre $(a,b,c,d) = (-1,2,-1,1)$: $M_f = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$f(2,0,3) = (2,0,3) \cdot M_f = (4-3, -4+6, 2-3, -2+3) = (1,2,-1,1)$ ✓
$f(4,1,5) = (4,1,5) \cdot M_f = (8+1-5, -8+3+10, 4-1-5, -4+5) = (4,5,-2,1)$ ✓
$f(2,-1,4) = (-1,1,-1,2)$ ✓

c) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

$f(2,0,3) = (1,2,-1,1)$

$f(4,1,5) = (4,5,-2,1)$

$f(2,-1,4) = (1,-1,1,-1)$

- z prípadu b) už vieme, že $\vec{a_1} = (2,0,3), \vec{a_2} = (4,1,5), \vec{a_3} = (2,-1,4)$ sú LZ

$\Rightarrow$ nemáme zaručené, že lin. zobr. f existuje

- hľadáme M_f:

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 2 & 0 & 3 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 & 4 & 5 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 3/2 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -3 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 3/2 & 1/2 & 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 2 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow f(0,0,0) = (2,-2,2,-3)$$

a teda zobrazenie f zobrazí

$f(\vec{0}) = (2,-2,2,-3) \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^4$

$\Rightarrow$ f NIE JE LINEÁRNE

(čiže neexistuje také lin. zobr. f, ktoré by spĺňalo zadané podmienky)

PREČO V PRÍPADE b) MÁME NEKONEČNE VEĽA RIEŠ. A V c) ŽIADNE ?

- vektory $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ sú LZ, hľadajme ako:

$\alpha(2,0,3) + \beta(4,1,5) = (2,-1,4)$

$3(2,0,3) + (-1)(4,1,5) = (2,-1,4)$

- v prípade b): $3 f(2,0,3) + (-1) f(4,1,5) = 3(1,2,-1,1) + (-1)(4,5,-2,1) = (-1,1,-1,2)$

$= f(2,-1,4) = f(3(2,0,3) + (-1)(4,1,5))$

vidíme, že pre túto trojicu $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ je splnená podm. linearnosti

- v prípade c): $3f(2,0,3) + (-1)f(4,1,5) = 3(1,2,-1,1) + (-1)(4,5,-2,1) = (-1,1,-1,2)$

$\neq f(2,-1,4)$

čiže pre samotnú trojicu $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ f nie je lineárne