Príklad 1: Hľadáme izomorfné priestory

a) $V_1 = \mathbb{R}^3$

- prvky: $(x_1, x_2, x_3) = x_1(1,0,0) + x_2(0,1,0) + x_3(0,0,1)$ $\quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ báza V_1: $\langle (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \rangle$ (sú LN, generujú celý VP)

$\Rightarrow$ $\dim V_1 = 3$

b) $V_2 = \mathbb{R}^4$

- prvky: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1(1,0,0,0) + x_2(0,1,0,0) + x_3(0,0,1,0) + x_4(0,0,0,1)$

$\Rightarrow$ báza V_2: $\langle (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1) \rangle$ (sú LN, generujú VP)

$\Rightarrow$ $\dim V_2 = 4$

c) $V_3 = \mathbb{R}_4[t]$

- prvky: $at^3 + bt^2 + ct + d$ $\quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ báza V_3: $\langle t^3, t^2, t, \underbrace{1}_{=t^0} \rangle$ (sú LN, generujú celý VP)

$\Rightarrow$ $\dim V_3 = 4$

d) $V_4 = M_{3,2}(\mathbb{R})$

- prvky:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ báza V_4:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\Rightarrow$ $\dim V_4 = 6$

e) $V_5 = [(3,1,2,4,6), (1,3,1,1,0), (2,-2,1,3,6), (-2,1,0,3,3)] \subset \mathbb{R}^5$

- potrebujeme zistiť, či je to báza, alebo len generátory:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 3 & 6 \\ -2 & 1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & -8 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 7 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -6 & -9 \\ 0 & 0 & 9 & 47 & 66 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ báza V_5: $\langle (1,3,1,1,0), (0,1,-1,-6,-9), (0,0,9,47,66) \rangle$

$\Rightarrow$ $\dim V_5 = 3$

f) $V_6 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ c & -a \end{pmatrix},\ a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \subset M_{2,2}(\mathbb{R})$

- prvky: $\begin{pmatrix} a & 2b \\ c & -a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad a, b, c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ báza V_6: $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ $\quad$ sú LN, generujú celý VP

$\hookrightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha + 0 \cdot \beta + 0 \cdot \gamma = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \\ 0\alpha + 2\beta + 0 \cdot \gamma = 0 \Rightarrow \beta = 0 \\ 0\alpha + 0 \cdot \beta + 1 \cdot \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0 \end{array}\right\}$ triviálna LK

$\Rightarrow$ $\dim V_6 = 3$

g) $V_7 = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^5;\ x_1 + 2x_3 = x_4 \}$

- prvky: $(x_1, x_2, x_3, x_1 + 2x_3, x_5) = x_1(1,0,0,1,0) + x_2(0,1,0,0,0) + x_3(0,0,1,2,0)$
$+ x_5(0,0,0,0,1)$ $\quad x_1, x_2, x_3, x_5 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ báza V_7: $\langle (1,0,0,1,0), (0,1,0,0,0), (0,0,1,2,0), (0,0,0,0,1) \rangle$

$\Rightarrow$ $\dim V_7 = 4$

- podľa základnej vety o lin. zobraz.:
$\langle \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m \rangle$ bázu vo V a $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m \in V$, tak $\exists!$ lin. z. $f: V \to W$
$f(\vec{a}_i) = \vec{b}_i$

- toto lin. zobrazenie je lineárny izomorf. $\Leftrightarrow$ keď zobrazí bázu na bázu
- ak $\exists$ lin. izomorf. medzi V a W, tak $V \cong W$

- záver: $V_1 \cong V_5 \cong V_6$ $\quad$ (napr. $V_1 \cong V_6$: $\quad f: V_1 \to V_6$
$\left.\begin{array}{l} f(1,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ f(0,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ f(0,0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$ týmto už viem ku $\forall \vec{x} \in V_1$ priradiť maticu z V_6

$V_2 \cong V_3 \cong V_7$

V_4 - nie je izomorfný so žiadnym VP

Príklad 2: $X \in M_{3,3}(\mathbb{Z}_5)$: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = 2I_3$

- platí: $A.X = B \quad /.A^{-1}$ zľava

$$A^{-1}.A.X = A^{-1}.B$$
$$I_n.X = A^{-1}.B$$
$$\underline{\underline{X = A^{-1}.B}}$$

v rovniciach môžeme násobiť inverz. mat., POZOR NA PORADIE!

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}}^{M} . X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad /.M^{-1} \text{ zľava}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- hľadáme M^{-1}:

4 2 2 2 0 0

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$= M^{-1}$

overenie: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓ sedí

- pokračujeme:

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- overenie:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2.I_3 \quad ✓$$

Príklad 3: $A, B \in M_{3,3}(\mathbb{R})$, $B^{-1} \cdot A^{-1} = ?$

1. spôsob: nájdeme A^{-1}, B^{-1} a vynásobíme

$3\ 15\ 9 \quad 0\ 3\ 0 \quad 0\ 6\ 6$
$2\ 10\ 6 \quad 0\ 2\ 0 \quad -2\ 4\ 0$

$$A^{-1}: \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 7 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & -5 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7/3 & -1/3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5/3 & -1/3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$= A^{-1}$

$$B^{-1}: \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/9 & 2/9 & 2/9 \\ 0 & 1 & 0 & 2/9 & 1/9 & -2/9 \\ 0 & 0 & 1 & 2/9 & -2/9 & 1/9 \end{array}\right)$$

$= B^{-1}$

$$B^{-1} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/9 & 2/9 & 2/9 \\ 2/9 & 1/9 & -2/9 \\ 2/9 & -2/9 & 1/9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7/3 & -1/3 & 2 \\ 5/3 & -1/3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -7 & -1 & 6 \\ 5 & -1 & -3 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{27} \begin{pmatrix} -9 & 3 & 6 \\ 3 & -9 & 3 \\ -30 & 3 & 21 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ -10 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

2. spôsob: $(AB)(AB)^{-1} = I_n$

$A \cdot B (AB)^{-1} = I_n \quad / \cdot A^{-1}$ zľava

$A^{-1} \cdot A \cdot B \cdot (AB)^{-1} = A^{-1} \cdot I_n$

$I_n \quad B \cdot (AB)^{-1} = A^{-1} \quad / \cdot B^{-1}$ zľava

$(B^{-1}B)(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$I_n \quad (AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

- vypočítame $AB = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 5 & -7 \\ 17 & 1 & -5 \\ 29 & 7 & -8 \end{pmatrix}$

- hľadáme $(AB)^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 22 & 5 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ 17 & 1 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 29 & 7 & -8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/3 & 1/9 & 2/9 \\ 0 & 1 & 0 & 1/9 & -1/3 & 1/9 \\ 0 & 0 & 1 & -10/9 & 1/9 & 7/9 \end{array}\right)$$

$= (AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

__Príklad 4__: $f: \overbrace{V_4(\mathbb{Z}_5)}^{V} \to \overbrace{V_4(\mathbb{Z}_5)}^{W}$, $M_f = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) $\operatorname{Im} f = f(V) = ?$

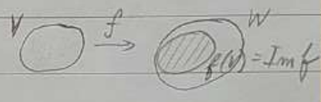
- obraz V, čiže $f(V) = [\overset{(3,1,2,2)}{f(\vec{e_1})}, \overset{(4,3,2,1)}{f(\vec{e_2})}, \overset{(0,1,2,4)}{f(\vec{e_3})}, \overset{(2,0,1,2)}{f(\vec{e_4})}]$

ale bude to celý priestor W ?

- keďže $W = V_4(\mathbb{Z}_5)$, $\dim W = 4$, tak len vtedy, ak sú LN

$$M_f = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow h(M_f) = 3$ a teda $\dim f(V) = 3$



a teda $f(V) = [\underbrace{(1,0,0,1), (0,1,0,4), (0,0,1,0)}_{\text{tieto už sú LN, teda sú báza}}] = \underline{\operatorname{Im} f}$

b) $\operatorname{Ker} f = ?$ (jadro zobrazenia f = také $\vec{x} \in V$, že $f(\vec{x}) = \vec{0}$)

- pre lineárne zobrazenie určite $\vec{0} \in \operatorname{Ker} f$, ale aj niečo iné?
- nech $\vec{x} \in \operatorname{Ker} f$:

$$f(\vec{x}) = \vec{0}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot M_f = (0,0,0,0)$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (0,0,0,0)$$

$$(3x_1 + 4x_2 + 0 \cdot x_3 + 2x_4, \; x_1 + 3x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4, \; 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4, \; 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4) = (0,0,0,0)$$

$\Rightarrow$ riešime súst. rovníc: (nad $\mathbb{Z}_5$!)

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 \quad + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \quad &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

- použijeme GEM:

$$\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + x_3 \quad = 0 \\ 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 \quad + x_4 = 0 \\ 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ \hline x_1 + 3x_2 + x_3 \quad = 0 \\ x_2 \quad + x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$ x_4 - param.

$x_3 = -x_4 = 4x_4$

$x_2 = -x_4 = 4x_4$

$x_1 = -x_4 = 4x_4$

- máme množ. rieš. $\{(4x_4, 4x_4, 4x_4, x_4) \; ; \; x_4 \in \mathbb{Z}_5\}$

- čiže všetky vektory $\vec{x} = (4a, 4a, 4a, a) \in \mathrm{Ker}\, f$
$a \in \mathbb{Z}_5$

sú to vlastne vektory $(0,0,0,0)$, $(4,4,4,1)$, $(3,3,3,2)$, $(2,2,2,3)$, $(1,1,1,4)$

- overenie:

$$(4a, 4a, 4a, a) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (2a + a + 2a, 4a + 2a + 4a, 3a + 3a + 3a + a, 3a + 4a + a + 2a) =$$

$$= (0,0,0,0) \checkmark$$

$\mathrm{Ker}\, f = \{(4a, 4a, 4a, a), \; a \in \mathbb{Z}_5\}$

$\vec{x} = (4a, 4a, 4a, a) = a \cdot \underbrace{(4,4,4,1)}_{\text{generátor VP}} \quad a \in \mathbb{Z}_5$

$\mathrm{Ker}\, f = [(4,4,4,1)]$

Príklad 5: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
$$f(a,b) = (2a-3b,\ a+b,\ -2a+b)$$

$$g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$g(a,b,c) = (2a-b+c,\ b-c,\ a+b-c)$$

$g \circ f$ – je injektívne?

– hľadáme $g \circ f$, resp. jeho maticu: $g \circ f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

1. spôsob: $(g\circ f)(a,b) = g(f(a,b)) = g(\overbrace{2a-3b}^{a'}, \overbrace{a+b}^{b'}, \overbrace{-2a+b}^{c'}) =$

$$= (2(2a-3b)-(a+b)+(-2a+b),\ (a+b)-(-2a+b),\ (2a-3b)+(a+b)-(-2a+b))$$
$$= \underbrace{(a-6b,\ 3a,\ 5a-3b)}_{\text{predpis zobrazenia } g\circ f}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow (g\circ f)(1,0) = (1,3,5) \\ (g\circ f)(0,1) = (-6,0,-3) \end{array}\right\} \Rightarrow M_{g\circ f} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

2. spôsob:
$$M_f = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \to f(1,0) \\ \to f(0,1) \end{array} \qquad M_g = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \to g(1,0,0) \\ \to g(0,1,0) \\ \to g(0,0,1) \end{array}$$

$$M_{g\circ f} = M_f \cdot M_g = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

– ideme skúmať hodnosť matice $M_{g\circ f}$:

$$M_{g\circ f} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -6 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 18 & 27 \end{pmatrix} \left.\begin{array}{l} \Rightarrow h(M_{g\circ f}) = 2 \\ \text{a keďže } g\circ f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{JE INJEKTÍVNE}$$

Príklad 6: $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

$$g(x,y,z) = (2x+y+z,\ -x+\varepsilon y+10z,\ \varepsilon x-y-6z,\ 5x+2y+z)$$

$\varepsilon \in \mathbb{R}$, g - injektívne

- aby g bolo injektívne, potrebujeme $h(M_g) = 3$
- určíme maticu M_g: $M_g = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \varepsilon & 5 \\ 1 & \varepsilon & -1 & 2 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightsquigarrow g(1,0,0) \\ \rightsquigarrow g(0,1,0) \\ \rightsquigarrow g(0,0,1) \end{array}$
- zjednodušíme:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & \varepsilon & 5 \\ 1 & \varepsilon & -1 & 2 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 10 & -6 & 1 \\ 0 & \varepsilon-10 & 5 & 1 \\ 0 & -21 & \varepsilon+12 & 3 \end{pmatrix}$$

- kedy by boli riadky 2. a 3. LZ?

$\alpha \cdot (0, \varepsilon-10, 5, 1) = (0, -21, \varepsilon+12, 3)$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}$

$0 = 0$

$\alpha(\varepsilon-10) = -21$

$\alpha \cdot 5 = \varepsilon + 12$ $\quad 15 = \varepsilon + 12 \Rightarrow \underline{\varepsilon = 3}$ $\quad$ over: $3.(3-10) = 3.(-7) = -21$

$\underline{\alpha = 3}$

čiže keby $\underline{\varepsilon = 3}$: $\begin{pmatrix} 1 & 10 & -6 & 1 \\ 0 & -7 & 5 & 1 \\ 0 & -21 & 15 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 10 & -6 & 1 \\ 0 & -7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h(M_g) = 2$ a to by už g nebolo injektívne

pre $\underline{\varepsilon \neq 3}$ je $h(M_g) = 3$ a teda g je injektívne

- záver: $\underline{\varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{3\}}$

Príklad 7: Zistite, či $\overset{\vec{x}}{\begin{pmatrix}1&2\\0&4\end{pmatrix}}, \overset{\vec{y}}{\begin{pmatrix}2&3\\5&0\end{pmatrix}}, \overset{\vec{z}}{\begin{pmatrix}3&0\\1&2\end{pmatrix}}, \overset{\vec{w}}{\begin{pmatrix}0&5\\4&2\end{pmatrix}}$ tvoria bázu $M_{22}(\mathbb{R})$

- dimenzia priestoru: $\dim M_{22}(\mathbb{R}) = 4$ $\quad \left\langle \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} \right\rangle$ je báza

$\Rightarrow$ ak sú matice LN, budú tvoriť bázu

- overenie LN:

1. spôsob: $\alpha \cdot \vec{x} + \beta \vec{y} + \gamma \vec{z} + \delta \vec{w} = \vec{0}$
   - hľadáme $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ cez sústavu rovníc
     - ak $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0 \Rightarrow$ sú LN
     - ak sú nenulové $\Rightarrow$ sú LZ
   - postup je zdĺhavý (riešenie v Sade 4)

2. spôsob:
   - využijeme lineárny izomorfizmus:

$$M_{2,2}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4$$

$\dim M_{2,2}(\mathbb{R}) = 4 \qquad \dim \mathbb{R}^4 = 4$

- priradenie prvkov (zobraz. f) môžme urobiť napr. takto:

$$\left.\begin{aligned} f: M_{2,2}(\mathbb{R}) &\to \mathbb{R}^4 \\ \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} &\mapsto (a,b,c,d) \end{aligned}\right\} \text{ je to lineárny izomorfizmus}$$

- čiže stačí nám skúmať, či sú LZ/LN vektory
  $(1,2,0,4)$, $(2,3,5,0)$, $(3,0,1,2)$, $(0,5,4,2)$

3 6 0 12
2 4 0 8

0 5 -25 40
0 6 -30 48

$$\begin{pmatrix}1&2&0&4\\2&3&5&0\\3&0&1&2\\0&5&4&2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&2&0&4\\0&-1&5&-8\\0&-6&1&-10\\0&5&4&2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&2&0&4\\0&1&-5&8\\0&0&-29&38\\0&0&29&-38\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&2&0&4\\0&1&-5&8\\0&0&-29&38\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ sú LZ

$\Rightarrow$ dané 4 matice netvoria bázu v $M_{2,2}(\mathbb{R})$, lebo ani ich „dvojičky" v $\mathbb{R}^4$ netvoria bázu