Cvičenie č. 9

18. 11. 2020

1. Medzi nasledujúcimi vektorovými priestormi nájdite tie, ktoré sú lineárne izomorfné, ak
   (a) $V_1 = \mathbb{R}^3$
   (b) $V_2 = \mathbb{R}^4$
   (c) $V_3 = \mathbb{R}_4[t]$
   (d) $V_4 = M_{3,2}(\mathbb{R})$
   (e) $V_5 = [(3,1,2,4,6),(1,3,1,1,0),(2,-2,1,3,6),(-2,1,0,3,3)] \subset \mathbb{R}^5$
   (f) $V_6 = \{\left(\begin{smallmatrix} a & 2b \\ c & -a \end{smallmatrix}\right),\ \text{kde } a,b,c \in \mathbb{R}\} \subset M_{2,2}(\mathbb{R})$
   (g) $V_7 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^5; x_1 + 2x_3 = x_4\}$

2. Nájdite maticu $X \in M_{3,3}(\mathbb{Z}_5)$, pre ktorú $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = 2I_3$.

3. Majme matice $A, B \in M_{3,3}(\mathbb{R})$, kde $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.
   Vyrátajte maticu $B^{-1} \cdot A^{-1}$.

4. Majme lineárne zobrazenie $f\colon V_4(\mathbb{Z}_5) \to V_4(\mathbb{Z}_5)$ určené maticou $M_f = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.
   (a) Určte, čomu sa rovná $\mathrm{Im}(f)$.
   (b) Nájdite všetky vektory, ktoré sa zobrazia na nulový vektor, t. j. $f(\vec{x}) = \vec{0}$.
   Poznámka: Množina takýchto vektorov sa nazýva ***jadro zobrazenia*** f *a ozn.* $\mathrm{Ker}\, f$.

5. Nech $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(a,b) = (2a-3b, a+b, -2a+b)$ a $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $g(a,b,c) = (2a-b+c, b-c, a+b-c)$ sú lineárne zobrazenia. Je zobrazenie $g \circ f$ injektívne?

6. Nájdite všetky $\varepsilon \in \mathbb{R}$, pre ktoré je zobrazenie $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ injektívne, ak jeho predpis je $g(x,y,z) = (2x+y+z, -x+\varepsilon y+10z, \varepsilon x - y - 6z, 5x+2y+z)$.

7. Zistite, či matice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ tvoria bázu vo vektorovom priestore $V = M_{2,2}(\mathbb{R})$. (Príklad č. 7 v Sade 4) Využite, že $M_{2,2}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4$.

barbora.pokorna@fmph.uniba.sk