Systém lineárnych rovníc

Def: nech sú dané rovnice pre neznáme $x_1, \dots, x_n$:

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$a_{s1}x_1 + \dots + a_{sn}x_n = b_s \qquad \text{(s rovníc s n neznámymi)}$$

Ak tieto rovnice majú byť splnené súčasne, tak hovoríme, že je daný systém $\underline{s}$ lineárnych rovníc s $\underline{n}$ neznámymi $x_1, \dots, x_n$.

- Ak pritom $a_{ij} \in R$ a $b_1, \dots, b_s \in R$, tak hovoríme, že to je systém lineárnych rovníc nad R.
- Prvky poľa R: a_{ij}, kde $i = 1, \dots, s \wedge j = 1, \dots, n$ sa nazývajú koeficienty (systému).
- $b_1, \dots, b_s$ sa nazývajú absolútne členy alebo aj „pravé strany"
- Riešenie systému (x) je každá n-tica $(v_1, v_2, \dots, v_n) \in R$, ktorá vyhovuje každej z rovníc v systéme (x)
- Vyriešiť systém (x) znamená nájsť <u>všetky</u> jeho riešenia, resp. zistiť, že nemá riešenie (je neriešiteľný)

Príklad: 1, systém 2 lineárnych rovníc s 2-ma neznámymi x_1, x_2 nad $\mathbb{R}$:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \text{nemá riešenie}$$

2) systém 3 lineárnych rovníc s 5-mi neznámymi nad R

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = -1 \qquad x_4 = 0$$

riešenie: $(1, -1, s, 0, t)$; $s, t \in R$ = parametre

Def: Dva systémy lineárnych (počet rovníc a počet neznámych je rovnaký) rovníc sú rovnaké (ekvivalentné) ak majú tú istú množinu riešení.

Veta: nasledujúce úpravy lineárnych systémov sú ekvivalentné:

1) vynásobenie ľubovoľnej rovnice systému prvkom $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
2) vzájomná výmena dvoch rovníc
3) pripočítanie nenulového násobku rovnice systému k inej rovnici toho istého systému (c = 0 ; nič nezískame)

Stratégia riešenia: upraviť daný systém lineárnych rovníc ekvivalentnými úpravami na taký, ktorý sa dá ľahko ~~riešiť~~ vyriešiť.

Gaussova eliminačná metóda

- máme daný systém (x). Môžme predpokladať, že $a_{11} \neq 0$.

→ ak je v systéme (x) rovnica tvaru $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = q$; $q \neq 0$, tak systém (x) je neriešiteľný.

→ ak toto nenastane, tak k 2. rovnici pričítame $(-a_{21} \cdot a_{11}^{-1})$-násobok prvej rovnice, atď. až k s-tej rovnici -||- $(-a_{s1} \cdot a_{11}^{-1})$-násobok prvej rovnice. Dostaneme sústavu (xx):

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n &= c_2 \\ c_{32}x_2 + \ldots + c_{3n}x_n &= c_3 \\ &\vdots \\ c_{s2}x_2 + \ldots + c_{sn}x_n &= c_s \end{aligned}$$

ktorá je ekvivalentná so sústavou (x).

→ ak je v systéme (xx) rovnica tvaru $0x_2 + \ldots + 0x_n = p$; $p \neq 0$, tak systém (xx) a teda aj systém (x) je neriešiteľný

→ ak toto nenastane, vylúčime x_2 z 3., 4., ... s.-tej rovnice.

→ po konečnom počte krokov alebo dospejeme k rovnici $0 = w$; $w \neq 0$ a teda systém je neriešiteľný, alebo dostaneme systém tvaru:

1. možnosť

1) P: $d_{11}x_1 + \dots + d_{1n}x_n = d_1$

$d_{22}x_2 + \dots + d_{2n}x_n = d_2$

$\ddots$

$d_{nn}x_n = d_n$; $d_{11}, \dots, d_{nn} \neq 0$

↳ nazveme ho systém P [úprava na △ tvar]

→ potom už len riešime systém P tak, že $\underline{\underline{x_n = d_n \cdot d_{nn}^{-1}}}$; potom to už len dosadzujeme smerom hore (dostaneme $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots x_1$)

2. možnosť

2) P_1: $d_{11}x_1 + \dots + d_{1n}x_n = d_1$

$d_{22}x_2 + \dots + d_{2n}x_n = d_2$

$\vdots$

$d_{kk}x_k + \dots + d_{kn}x_n = d_k$; $d_{11}, \dots, d_{kk} \neq 0$

→ potom $x_1, \dots, x_k$ sú „viazané neznáme", kým $x_{k+1}, \dots, x_n$ môžu nadobúdať ľubovoľné hodnoty z poľa R ; sú to „voľné neznáme" čiže parametre. Z poslednej rovnice systému x_k pomocou parametrov 2.2.9 /
$x_{k+1}, \dots, x_n$, potom z predchádzajúcej rovnice vyrátame x_{k-1} 2.3.7
až dostaneme x_1. Tým vyriešime P1 a teda aj systém (x)