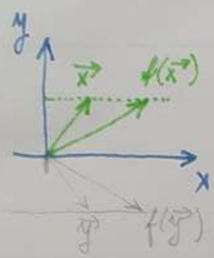
Príklad 1: Ukážte, že skosenie (v smere osi x) v rovine $\mathbb{R}^2$ je lineárne zobrazenie.



$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$f(x,y) = (x + s_x y, y)$ kde $s_x \in \mathbb{R}$ (číslo určujúce mieru skosenia)

- zobrazenie je lineárne:

$\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f(\vec{u}+\vec{v}) = f((u_x, u_y) + (v_x, v_y)) = f((u_x + v_x, u_y + v_y)) =$$

$$= (u_x + v_x + s_x(u_y + v_y), u_y + v_y) = (u_x + s_x u_y, u_y) + (v_x + s_x v_y, v_y) =$$

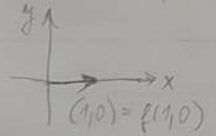
$$= f(\vec{u}) + f(\vec{v})$$

$$f(\alpha \vec{u}) = f(\alpha(u_x, u_y)) = f(\alpha u_x, \alpha u_y) = (\alpha u_x + s_x \cdot (\alpha u_y), \alpha u_y) =$$

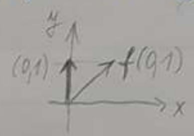
$$= \alpha (u_x + s_x u_y, u_y) = \alpha \cdot f(\vec{u})$$

- matica zobrazenia f:

$$f(1,0) = (1 + s_x \cdot 0, 0) = (1,0)$$



$$f(0,1) = (0 + s_x \cdot 1, 1) = (s_x, 1)$$



$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_x & 1 \end{pmatrix}$$

!

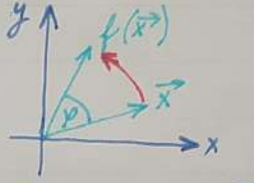
overenie: $f(\vec{x}) = f(x,y) = (x,y) \cdot M_f =$

$$= (x,y) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_x & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (x + s_x y, y)$$

✓ sedí

Príklad 2: (Sada 5, pr 16) $A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ - otočenie okolo (0,0) o uhol φ proti smeru hod. ručičiek



- očakávame, že inverzná matica A_φ^{-1} urobí „opačné" otočenie, tj. o uhol φ v smere hodinových ručičiek, tj. o uhol $\boxed{-\varphi}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \cos\varphi & \sin\varphi & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} \cos^2\varphi & \sin\varphi\cos\varphi & \cos\varphi & 0 \\ -\sin^2\varphi & \cos\varphi\sin\varphi & 0 & \sin\varphi \end{array}\right) \sim$$

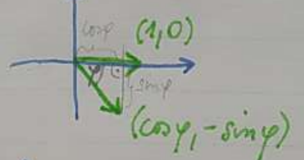
$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} \cos^2\varphi-(-\sin^2\varphi) & \sin\varphi\cos\varphi-\cos\varphi\sin\varphi & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ -\sin^2\varphi & \cos\varphi\sin\varphi & 0 & \sin\varphi \end{array}\right) \sim$$

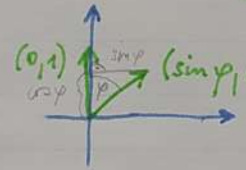
$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ -\sin^2\varphi & \cos\varphi\sin\varphi & 0 & \sin\varphi \end{array}\right) \overset{2r += \sin^2\varphi * 1r}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \cos\varphi\sin\varphi & \cos\varphi\sin^2\varphi & \underbrace{\sin\varphi-\sin^3\varphi}_{\sin\varphi(1-\sin^2\varphi) = \sin\varphi\cos^2\varphi} \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{array}\right)$$

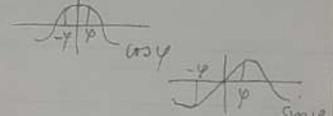
$$\Rightarrow A_\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

A_φ^{-1}:

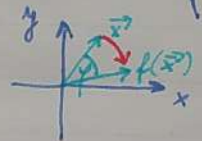




a keďže $\cos\varphi = \cos(-\varphi)$
$\sin\varphi = -\sin(-\varphi)$



tak $\boxed{A_\varphi^{-1}} = \begin{pmatrix} \cos(-\varphi) & \sin(-\varphi) \\ -\sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{pmatrix} = \boxed{A_{-\varphi}}$



čiže otočiť o 30° v smere hod. ruč. je to isté ako otočiť o -30° proti smeru hod. ruč.

- pri ERO sme násobili $\sin\varphi$ a $\cos\varphi$ - čo ak sú $=0$?

$\cos\varphi = 0$: $A_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, všeobecne inv. $\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$ $= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = A_\varphi^{-1}$ ✓

$\sin\varphi = 0$: $A_\varphi = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, všeobecne $\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$ $= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = A_\varphi^{-1}$

$\Rightarrow$ ERO sa urobia inač, ale výsledok je rovnaký

Príklad 3: Majme zobrazenie určené maticou $M_g = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$.
- určte jeho predpis
- zistite, či je lineárne
- určte Ker(g), Im(g) - bázu a dim
- zistite, či je injekt./surjekt./bijekt.

- predpis zobrazenia: $g(\vec{x}) = \vec{x} \cdot M_g$ $\quad g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\quad (M_g \in M_{3,3}(\mathbb{R}))$

$$g(x_1,x_2,x_3) = (x_1,x_2,x_3) \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \left(\frac{x_1}{2}+\frac{x_3}{2}, x_2, \frac{x_1}{2}+\frac{x_3}{2}\right)$$

- lineárnosť:

$$g(\vec{x}+\vec{y}) = g((x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3)) = g(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) =$$
$$= \left(\frac{x_1+y_1}{2}+\frac{x_3+y_3}{2}, x_2+y_2, \frac{x_1+y_1}{2}+\frac{x_3+y_3}{2}\right) =$$
$$= \left(\frac{x_1}{2}+\frac{x_3}{2}, x_2, \frac{x_1}{2}+\frac{x_3}{2}\right) + \left(\frac{y_1}{2}+\frac{y_3}{2}, y_2, \frac{y_1}{2}+\frac{y_3}{2}\right) = g(\vec{x})+g(\vec{y})$$

$$g(\alpha\vec{x}) = g(\alpha(x_1,x_2,x_3)) = g(\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) = \left(\frac{\alpha x_1}{2}+\frac{\alpha x_3}{2}, \alpha x_2, \frac{\alpha x_1}{2}+\frac{\alpha x_3}{2}\right)$$
$$= \alpha\left(\frac{x_1}{2}+\frac{x_3}{2}, x_2, \frac{x_1}{2}+\frac{x_3}{2}\right) = \alpha g(\vec{x})$$

- jadro Ker(g): také $\vec{x}$, že $g(\vec{x}) = \vec{0}$ čiže $\underline{\vec{x} \cdot M_g = \vec{0}}$

$$(x_1,x_2,x_3) \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = (0,0,0)$$

$$\left(\frac{x_1}{2}+\frac{x_3}{2}, x_2, \frac{x_1}{2}+\frac{x_3}{2}\right) = (0,0,0)$$

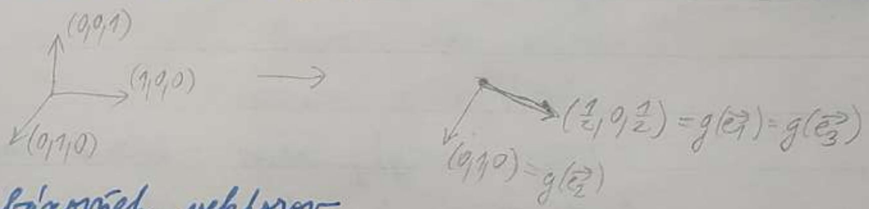
$$\left.\begin{aligned} \frac{x_1}{2}+\frac{x_3}{2} &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ \frac{x_1}{2}+\frac{x_3}{2} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{homog. systém}$$

riešime homog. systém: $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad h(A) = 2$; x_1, x_2 - viazané, x_3 - param.

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= t \in \mathbb{R} \\ x_2 &= 0 \\ x_1 &= -t \end{aligned}\right\} \Rightarrow S_H = \{(-t,0,t), t \in \mathbb{R}\} = Ker(g)$$

$\dim Ker(g) = 1$ $\quad Ker(g) = [(-1,0,1)]$ fundament. pre $t=1$

- obraz $Im(g)$ - ako sa zobrazí celé $\mathbb{R}^3$



záleží od obrazov bázových vektorov
hodnosť matice M_g nám povie dimenziu $Im(g)$

$$M_g = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad h(M_g) = 2 \Rightarrow \dim Im(g) = 2$$

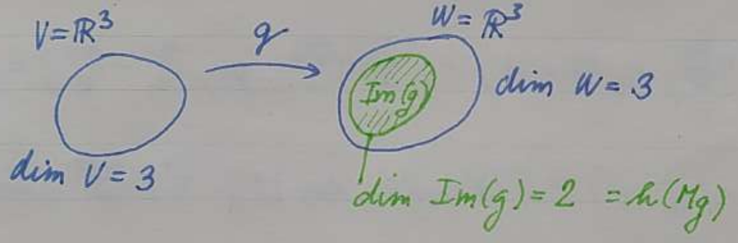
$$Im(g) = [(1,0,1), (0,1,0)]$$

- overenie: $\dim V = \dim Ker(g) + \dim Im(g)$

$$3 = 1 + 2$$

✓ sedí

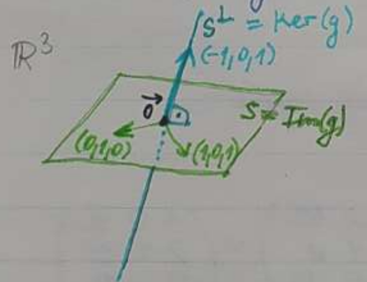
- vlastnosti zobr. (i/s/b)

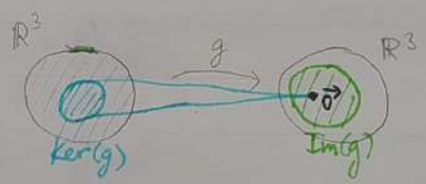


- keďže $\dim V = 3$ a $\dim Im(g) = 2$ $\Rightarrow$ g NIE JE INJEKTÍVNE
(už napr. $\forall \vec{x} \in Ker(g)$ sa zobrazia na ten istý vektor $\to \vec{0}$)

- keďže $\dim W = 3$ a $\dim Im(g) = 2$ $\Rightarrow$ g NIE JE SURJEKTÍVNE

- doplnenie: ide o ortogonálnu projekciu do $S = [(0,1,0), (1,0,1)]$



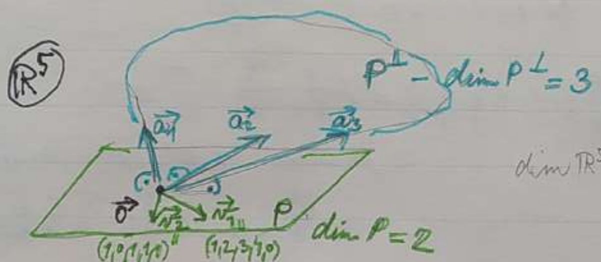


Príklad 4: Nájdite ortonormálnu bázu podpriestoru $P^\perp$, kde $P^\perp$ je ortogonálny doplnok podpriestoru $P = [(1,2,3,4,0),(1,0,1,1,1)] \subset V_5(\mathbb{R})$

- hľadáme skutočnú dimenziu pr. P:

$$M_P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow h(M_P) = 2 \Rightarrow \dim P = 2$$

(rovina v $\mathbb{R}^5$)



$\dim \mathbb{R}^5 = \dim P + \dim P^\perp$

- vieme, že hľadaný $P^\perp$ bude $\dim P^\perp = 3$, tj. budeme hľadať 3 bázové vektory $[\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}] = P^\perp$

- chceme určiť množinu $\forall$ vektorov $\vec{x} \in P^\perp$, určite $\vec{x} \perp \vec{v_1}$ a $\vec{x} \perp \vec{v_2}$

$$\langle \vec{x}, \vec{v_1} \rangle = 0 \qquad 1 \cdot x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 0 \cdot x_5 = 0$$
$$\langle \vec{x}, \vec{v_2} \rangle = 0 \qquad 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_4 + 1 \cdot x_5 = 0$$

- riešime homog. systém:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

x_1, x_2 - viazané

x_3, x_4, x_5 - parametre

$\dim S_H = 5 - h(A) = 5 - 2 = 3$ to chceme ✓

$x_3 = r \quad x_4 = s \quad x_5 = t \quad , r, s, t \in \mathbb{R}$

$x_1 = -r - s - t \quad x_2 = -r - \frac{3}{2}s + \frac{1}{2}t$

$$S_H = \{(-r-s-t, -r-\tfrac{3}{2}s+\tfrac{1}{2}t, r, s, t) \in \mathbb{R}^5, \ r, s, t \in \mathbb{R}\} = P^\perp$$

$\left.\begin{matrix} r=1 \\ s=0 \\ t=0 \end{matrix}\right\} \underbrace{(-1,-1,1,0,0)}_{\vec{a_1}} \qquad \left.\begin{matrix} r=0 \\ s=1 \\ t=0 \end{matrix}\right\} \underbrace{(-1,-\tfrac{3}{2},0,1,0)}_{\vec{a_2}} \qquad \left.\begin{matrix} r=0 \\ s=0 \\ t=1 \end{matrix}\right\} \underbrace{(-1,\tfrac{1}{2},0,0,1)}_{\vec{a_3}}$

$$P^\perp = [(-1,-1,1,0,0), (-1,-\tfrac{3}{2},0,1,0), (-1,\tfrac{1}{2},0,0,1)]$$

- túto bázu ešte musíme ortogonalizovať

- Gram-Schmidtova ortogonalizácia bázy $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$

$\vec{y_1} = \vec{a_1} = (-1,-1,1,0,0)$

$\vec{y_2} = \vec{a_2} + \alpha \cdot \vec{y_1} = (-1,-\frac{3}{2},0,1,0) + \alpha(-1,-1,1,0,0)$, pričom α volíme tak, aby $\vec{y_2} \perp \vec{y_1}$

$$\alpha = -\frac{\langle \vec{a_2}, \vec{y_1} \rangle}{\langle \vec{y_1}, \vec{y_1} \rangle} = -\frac{(-1)\cdot(-1) + (-\frac{3}{2})(-1) + 0.1 + 1.0 + 0.0}{1+1+1+0+0} = -\frac{5}{6}$$

$$\vec{y_2} = (-1,-\frac{3}{2},0,1,0) - \frac{5}{6}(-1,-1,1,0,0) = (-\frac{1}{6},-\frac{2}{3},-\frac{5}{6},1,0)$$

môžeme vziať nenulový násobok (6)

$\vec{y_2} = (-1,-4,-5,6,0)$

$\vec{y_3} = \vec{a_3} + \beta_1 \vec{y_1} + \beta_2 \vec{y_2}$, pričom β_1, β_2 volíme tak, aby $\vec{y_3} \perp \vec{y_1}$, $\vec{y_3} \perp \vec{y_2}$

$$\beta_1 = -\frac{\langle \vec{a_3}, \vec{y_1} \rangle}{\langle \vec{y_1}, \vec{y_1} \rangle} = -\frac{\frac{1}{2}}{3} = -\frac{1}{6} \qquad \beta_2 = -\frac{\langle \vec{a_3}, \vec{y_2} \rangle}{\langle \vec{y_2}, \vec{y_2} \rangle} = -\frac{-1}{78} = \frac{1}{78}$$

$$\vec{y_3} = (-1,\frac{1}{2},0,0,1) - \frac{1}{6}(-1,-1,1,0,0) + \frac{1}{78}(-1,-4,-5,6,0) = (-\frac{11}{13},\frac{8}{13},-\frac{3}{13},\frac{1}{13},1)$$

môžeme vziať nenul. násobok (13)

$\vec{y_3} = (-11,8,-3,1,13)$

- našli sme ortogonálnu bázu $P^\perp = [(-1,-1,1,0,0),(-1,-4,-5,6,0),(-11,8,-3,1,13)]$

- potom ortonormálna báza: (predelíme dĺžkou)

$|\vec{y_1}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

$|\vec{y_2}| = \sqrt{1+16+25+36} = \sqrt{78}$

$|\vec{y_3}| = \sqrt{121+64+9+1+169} = \sqrt{364}$

$$\boxed{P^\perp = \left[\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},0,0\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{78}},-\frac{4}{\sqrt{78}},-\frac{5}{\sqrt{78}},\frac{6}{\sqrt{78}},0\right),\left(-\frac{11}{\sqrt{364}},\frac{8}{\sqrt{364}},-\frac{3}{\sqrt{364}},\frac{1}{\sqrt{364}},\frac{13}{\sqrt{364}}\right)\right]}$$