Záverečná písomka

18. decembra 2020

	Demčáková	Demeterová	Fileková	Harmata	Kšenzuláková	Lakoštíková	Mäsiar	Melkovič	Modrovičová	Mrníková	Mucha	Paľová	Richtárik	Špániková	Veres	Bretzová	Drnajová	Froleková	Gáliková	Jedináková	Križánková	Sirotňák	Šlosár
a	2	-2	4	2	-4	-2	4	-2	4	-4	4	2	-4	-2	4	-4	2	2	4	-2	-4	2	-2
b	3	4	-1	-3	1	3	1	-3	2	-1	-3	-1	-3	2	-2	3	-2	-4	3	1	2	4	-4

Vo všetkých príkladoch používajte svoje konkrétne hodnoty a, b.

1. úloha (13 bodov)
Majme vektorový podpriestor $S = [(\mathrm{a}, 1, -1, 0), (3\mathrm{a} + 2\mathrm{b}, 3, 1, 2), (\mathrm{b}, 0, 2, 1)] \subset V_4(\mathbb{R})$. Nájdite jeho ortogonálny doplnok $S^\perp$ a určte jeho bázu a dimenziu.

2. úloha (17 bodov)
Majme lineárne zobrazenie f určené maticou $M_f = \begin{pmatrix} 3+\mathrm{b} & \frac{1}{2}\mathrm{a} & 1 \\ \mathrm{b} & 0 & 3 \\ 6 & \mathrm{a} & -4 \end{pmatrix}$. Nájdite jadro $\mathrm{Ker}(f)$ a obraz $\mathrm{Im}(f)$ zobrazenia f (určte ich bázu a dimenziu). Rozhodnite, či je zobrazenie f injektívne alebo surjektívne.

3. úloha (10 bodov)
Nájdite maticu zobrazenia, ktoré zobrazí vektory $(1, 1, 1), (-2, -1, 1), (-1, 2, 0) \in \mathbb{R}^3$ na vektory $(\mathrm{b}, 1), (\mathrm{a}, 1), (0, 2) \in \mathbb{R}^2$ v tomto poradí. Dokážte, že toto zobrazenie je lineárne.

4. úloha (10 bodov)
Majme bázu $[(1, 0, \mathrm{a}), (1, 1, \mathrm{b} - \mathrm{a}), (0, 1, \mathrm{b})]$ priestoru $V_3(\mathbb{R})$. Pomocou Gram-Schmidtovej ortogonalizácie tejto bázy nájdite trojicu navzájom kolmých vektorov, ktorá generuje celý priestor $V_3(\mathbb{R})$.

5. úloha (10 bodov)
Vyriešte daný systém lineárnych rovníc a riešenie zapíšte ako súčet $K + S_h$, kde K je nejaké riešenie tohoto systému a S_h je množina všetkých riešení príslušného homogénneho systému.

$$\begin{array}{rrrrcr} 4x_1 & +\,2\mathrm{a}x_2 & & +\,2x_4 & = & 4 \\ & -\,x_2 & +\,\mathrm{b}x_3 & & = & -3 \\ x_1 & +\,2\mathrm{a}x_2 & +\,(1-2\mathrm{b})x_3 & +\,x_4 & = & 4 \\ 3x_1 & +\,2x_2 & -\,x_3 & +\,x_4 & = & 6 \end{array}$$