Množiny a zobrazenia

Lineárna algebra

Barbora Pokorná

KAG, FMFI UK

2020

Množiny

DEFINÍCIA

Množina je súhrn prvkov jednoznačne určený tak, že o každom prvku vieme jednoznačne povedať, či do množiny patrí alebo nepatrí.

- označenie: $M, N, \ldots$
- prvok patrí (nepatrí) do množiny: $x \in M \quad (x \notin M)$
- prázdna množina: $M = \emptyset$
- určenie množiny
  - vymenovaním prvkov: $M = \{a, b, c, d\}$
  - charakteristickou vlastnosťou: $N = \{x \in M; x \neq a\}$

Vzťahy medzi množinami

DEFINÍCIA

Majme dve množiny $A,\ B$. Hovoríme, že A je podmnožinou B (ozn. $A \subset B$), ak všetky prvky z množiny A sa nachádzajú v množine B.

$$\forall x \in A\colon x \in B$$

DEFINÍCIA

Majme dve množiny $A,\ B$. Hovoríme, že A sa rovná B (ozn. $A = B$) práve vtedy, keď všetky prvky z množiny A sa nachádzajú v množine B a všetky prvky z množiny B sa nachádzajú v množine A.

$$\forall x \in A\colon x \in B \ \wedge\ \forall x \in B\colon x \in A$$

- vieme utvárať systémy množín: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- rovnosť množín $A = B$ sa často dokazuje preukázaním, že platia tvrdenia $A \subset B$ a $B \subset A$

Operácie na množinách

DEFINÍCIE

Prienik množín A a B (ozn. $A \cap B$) je množina tých prvkov, ktoré patria do A a zároveň aj do B.

$$A \cap B = \{x \in A \wedge x \in B\}$$

Ak $A \cap B = \emptyset$, hovoríme, že množiny A a B sú disjunktné.

Zjednotenie množín A a B (ozn. $A \cup B$) je množina prvkov patriacich do A alebo do B.

$$A \cup B = \{x \in A \vee x \in B\}$$

Nech $A \subset B$. Potom rozdiel množín B a A (ozn. $B \setminus A$) je množina tých prvkov, ktoré patria do B a nepatria do A.

$$B \setminus A = \{x \in B \wedge x \notin A\}$$

Karteziánsky súčin množín $M_1, \ldots, M_k$, kde $k \in \mathbb{N}$ nazývame množinu všetkých usporiadaných k-tic, kde $M_1 \times \cdots \times M_k = \{(x_1, \ldots, x_k); x_i \in M_i, i = 1, \ldots, k\}$.

Zobrazenie

DEFINÍCIA

Nech A a B sú dve množiny. Zobrazením f z A do B nazývame predpis, ktorý každému prvku $x \in A$ priradí práve jeden prvok $f(x) \in B$.

- prvok $f(x)$ sa nazýva obraz prvku x pri zobrazení f, príp. hodnota zobrazenia f v prvku x
- ak $f(x) = y$, tak x sa nazýva aj vzor prvku y pri zobrazení f
- hovoríme, že f je definované na množine A s hodnotami v množine B

DEFINÍCIA

Nech $f\colon A \to B$ je zobrazenie. Potom množina $f(A) = Im(f) = \{y \in B;\ \exists x \in A\colon f(x) = y\}$ sa nazýva obraz množiny A pri zobrazení f.

- platí $Im(f) \subset B$, opačne to platiť nemusí

Príklady zobrazení

PRÍKLADY zobrazení:

- $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f_1(n) = 2n + 1$
- $f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f_2(n) = 2n$
- $f_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \quad f_3(n) = \begin{cases} n+1, & \text{ak } n \text{ je párne} \\ n-1, & \text{ak } n \text{ je nepárne} \end{cases}$
- $f \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(a, b) = a + b$
- $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \sin x$
- $h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = x^2$

Toto nie sú zobrazenia:

- $w \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad w(n) = n - 1$
- $s \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad s(a, b) = \frac{a}{b}$

Rovnosť zobrazení a identické zobrazenie

DEFINÍCIA

Zobrazenie $id_M\colon M \to M$ také, že $id_M(x) = x$ pre každé $x \in M$ sa nazýva identické zobrazenie (identita).

DEFINÍCIA

Hovoríme, že dve zobrazenia $f\colon X \to Y$ a $g\colon Z \to W$ sa rovnajú (ozn. $f = g$), ak $X = Z$, $Y = W$ a $f(x) = g(x)$ pre každé $x \in X$.

- platí $Im(id_M) = M$
- príklad: zobrazenia $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(x) = 2x$ a $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, g(x) = 2x$ sa nerovnajú, čiže $f \neq g$

Zúženie zobrazenia a hodnotové zúženie zobrazenia

DEFINÍCIA

Nech $f\colon A \to B$ je zobrazenie a nech $A' \subset A$. Potom predpis, ktorý každému $x \in A'$ priradí prvok $f(x)$, definuje zobrazenie z A' do B. Toto zobrazenie nazývame zúžením zobrazenia f na podmnožinu A' a označujeme ho $f|_{A'} : A' \to B$.
Zároveň predpis, ktorý každému $x \in A$ priradí prvok $f(x)$, definuje zobrazenie z A do $Im(f)$. Toto zobrazenie nazývame hodnotovým zúžením zobrazenia f a označujeme ho $\tilde{f} : A \to Im(f)$.

PRÍKLADY

- Majme zobrazenie $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x$.
  Potom $g|_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ je zúžením zobrazenia g na množinu všetkých celých čísel.
  Obrazom $g|_{\mathbb{Z}}$ je množina všetkých párnych celých čísel.
  Ak definujeme zobrazenie $h\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $h(x) = 2x$, tak $h = g|_{\mathbb{Z}}$.
- Nech $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x + y$.
  Obrazom zobrazenia $f|_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ je množina $\mathbb{Z}$.
  Hodnotové zúženie zobrazenia $f|_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ je zobrazenie $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

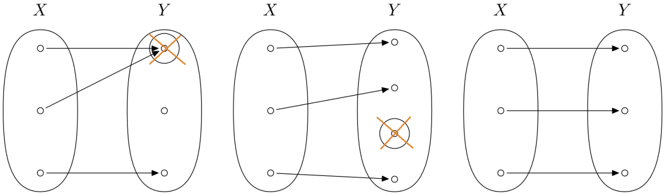
Injekcia, surjekcia, bijekcia

DEFINÍCIA

Zobrazenie $f\colon A \to B$ je injektívne (prosté), ak pre všetky $x, x' \in A$, $x \neq x'$ platí $f(x) \neq f(x')$.

Zobrazenie $f\colon A \to B$ je surjektívne, ak pre každé $y \in B$ existuje také, $x \in A$, že $f(x) = y$.

Zobrazenie $f\colon A \to B$ je bijektívne, ak je súčasne injektívne aj surjektívne.



Obr. 1: Ilustrácia injekcie, surjekcie a bijekcie.

- ekvivalentná definícia injekcie: z každej rovnosti $f(x) = f(x')$ vyplýva $x = x'$
- ekvivalentná definícia surjekcie: $Im(f) = B$

Príklady injekcie, surjekcie a bijekcie

PRÍKLADY zobrazení:

- $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x$ nie je surjektívne
- $g\colon \mathbb{R} \to \langle -1, 1 \rangle,\ g(x) = \sin x$ je surjektívne
- $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = x^2$ nie je surjektívne
- $k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+,\ k(x) = x^2$ je surjektívne
- $d\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ d(x) = x^6$ nie je injektívne
- $e\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ e(x) = x^3$ je injektívne
- $w\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ w(x) = 3x - 7$ nie je bijektívne
- $u\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ u(n) = \begin{cases} 0, & \text{ak } n = 1 \\ \frac{n}{2}, & \text{ak } n \text{ je párne} \\ -\frac{n-1}{2}, & \text{ak } n \text{ je nepárne rôzne od } 1 \end{cases}$ je bijektívne

Inverzné zobrazenie

VETA

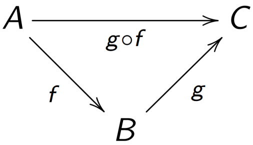
Nech $f\colon A \to B$ je bijektívne zobrazenie. Potom existuje zobrazenie $f^{-1}: B \to A$ definované: $f^{-1}(b) = a \;\Leftrightarrow f(a) = b$. Zobrazenie f^{-1} sa nazýva inverzné zobrazenie ku zobrazeniu f. Zobrazenie f^{-1} je bijektívne.

DÔKAZ

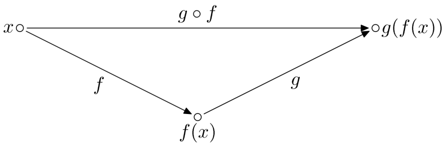
1. dokážeme existenciu f^{-1}:
   - f je surjektívne $\Rightarrow \forall b \in B \exists a \in A$ také, že $f(a) = b$
   - f je injektívne $\Rightarrow \exists! a \in A$, lebo ak by existovali dve a, a', tak $f(a) = b$ ale aj $f(a') = b \Rightarrow a = a'$
2. dokážeme, že f^{-1} je bijektívne:
   - $f^{-1}: B \to A$ je injektívne, lebo ak $f^{-1}(b) = f^{-1}(b')$ pre nejaké $b, b' \in B$, tak $b = f(f^{-1}(b)) = f(f^{-1}(b')) = b'$
   - $f^{-1}: B \to A$ je surjektívne, lebo pre každý prvok $a \in A$ máme z definície zobrazenia f^{-1}, že $f^{-1}(f(a)) = a$ a f je bijekcia

DEFINÍCIA

Nech $f\colon A \to B$ a $g\colon B \to C$ sú dve zobrazenia. Potom predpis $x \mapsto g(f(x))$ (pre $\forall x \in A$) definuje zobrazenie z A do C, ktoré označíme $g \circ f$. Zobrazenie $g \circ f\colon A \to C$ sa nazýva zložené zobrazenie, presnejšie kompozícia zobrazenia f so zobrazením g.



Obr. 2: Skladanie zobrazení f a g.



Obr. 3: Prvku x priradíme prvok $g(f(x))$.

PRÍKLAD

- nech $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = 3x + 5$ a $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(x) = 2x$
- potom máme $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x + 5) = 6x + 10$

Vlastnosti skladania zobrazení

VETA o asociatívnosti skladania zobrazení

Nech $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$, $h\colon C \to D$ sú zobrazenia, potom $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

DÔKAZ

Pre ľubovoľné $x \in A$ máme

- ĽS: $((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$
- PS: $(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$

VETA

Nech $f\colon A \to B$ a $g\colon B \to C$ sú dve zobrazenia. Potom platí, že $f \circ g \neq g \circ f$, čiže skladanie zobrazení nie je komutatívne.

DÔKAZ

- nech $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = 3x + 5$ a $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(x) = 2x$
- potom máme $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x + 5) = 6x + 10$
- ale $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x) = 6x + 5$

Vlastnosti skladania injekcií, surjekcií a bijekcií

VETA

Zloženie dvoch injekcií je injekcia, zloženie dvoch surjekcií je surjekcia, zloženie dvoch bijekcií je bijekcia.

VETA

Nech $f\colon A \to B$ je zobrazenie. Potom k f existuje inverzné zobrazenie práve vtedy, keď f je bijekcia.

Platí:

- $f^{-1} \circ f = id_A$
- $f \circ f^{-1} = id_B$
- $(f^{-1})^{-1} = f$
- ak $f\colon A \to B$ a $g\colon B \to C$ sú bijekcie, potom $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Zoznam použitých obrázkov

- obr. 1 – 3: Martin Sleziak