Lineárne systémy

Lineárna algebra

Barbora Pokorná

KAG, FMFI UK

2020

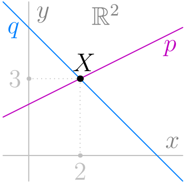
Motivácia

- na strednej škole sa riešia sústavy rovníc

$$\begin{aligned} x - 2y &= -4 & & & \Rightarrow \quad x - 2(5-x) = -4 \quad \Rightarrow \quad & x = 2 \\ x + y &= 5 & \Rightarrow \quad & y = 5 - x & & y = 3 \end{aligned}$$

- riešiť systém znamená nájsť priesečník priamok v $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} p\colon\ x - 2y + 4 &= 0 \\ q\colon\ \ x + y - 5 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad X = [2,3] \in p \cap q$$



Obr. 1: $p \cap q = \{[2,3]\}$

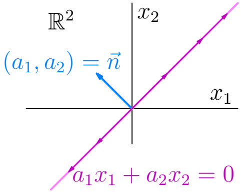
- chceli by sme riešiť sústavy s lineárnych rovníc s n neznámymi a skúmať súvislosť s lineárnymi zobrazeniami

- nasledujúce geometrické pojmy budeme používať čisto kvôli predstavivosti, nebudú striktne matematicky definované, nakoľko afinné (bodové) priestory sa preberajú neskôr
- využijeme poznatky zo SŠ o rovniciach priamok a rovín v normálovom tvare

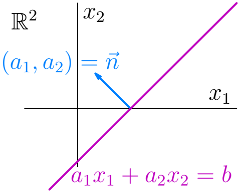
Nadrovina v priestore (vektorovom, afinnom) dimenzie n je akýkoľvek podpriestor dimenzie $n-1$.
Nadrovinu v n-rozmernom priestore vieme jednoznačne určiť jedinou lineárnou rovnicou

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b.$$

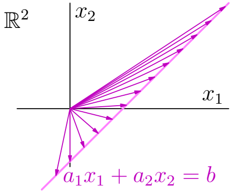
PRÍKLADY



Obr. 2: Priamka je VPP vo VP $\mathbb{R}^2$.



Obr. 3: Priamka je AfPP v AfP $\mathbb{R}^2$.



Obr. 4: Množina nie je VPP vo VP $\mathbb{R}^2$.

Systém (sústava) lineárnych rovníc

Nech $s, n \in \mathbb{N}$. Majme systém s lineárnych rovníc pre n neznámych $x_1, \dots, x_n$ nad poľom R

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sn}x_n &= b_s \end{aligned}$$

kde $a_{ij}, b_i \in R$ pre $i = 1, \dots, s$ a $j = 1, \dots, n$.

Tomuto systému priradíme tri matice:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix} \qquad A|B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} & b_s \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_s \end{pmatrix}$$

matica systému (S) rozšírená matica systému (S) matica pravých strán

Maticový zápis systému rovníc

Ak ešte označíme $X = (x_1, \ldots, x_n) \in M_{1,n}(R)$, systém (S) vieme zapísať pomocou maticového zápisu ako $A.X^T = B$.

Vyriešiť systém (S) nad R znamená nájsť množinu všetkých jeho riešení z R^n.
Samozrejme, systém môže byť neriešiteľný a vtedy je množina riešení $\emptyset$.

Riešením je každé $K \in M_{1,n} = R^n$ také, že $A.K^T = B$.

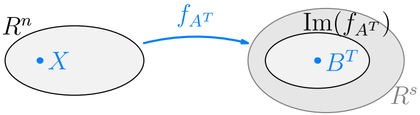
Ak máme systém (S) s maticou $(A|B)$ a systém (S′) s maticou $(C\,|\,D)$ také, že $(A|B) \sim (C\,|\,D)$, tak aj systémy (S) a (S′) sú ekvivalentné.

Systém lineárnych rovníc a lineárne zobrazenie

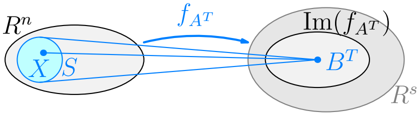
- iný pohľad na lineárny systém $A.X^T = B$ získame po transponovaní rovnice:

$$\begin{aligned}(A.X^T)^T &= B^T\\ (X^T)^T.A^T &= B^T\\ X.A^T &= B^T\\ (x_1,\dots,x_n)A^T &= (b_1,\dots,b_s)\end{aligned}$$

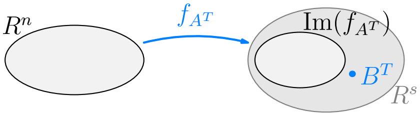
- čiže $f_{A^T}(X) = B^T$, kde $f_{A^T}\colon R^n \to R^s$ je lineárne zobrazenie s maticou A^T
- systém (S) je riešiteľný práve vtedy, keď f_{A^T} aspoň jedno X zobrazí na B^T a to je práve vtedy, keď $B^T \in \mathrm{Im}(f_{A^T})$
- potom vyriešiť systém (S) znamená nájsť celú množinu $f_{A^T}^{-1}(B^T)$



Obr. 5: Existuje práve jedno X: $X \mapsto B^T$.



Obr. 6: Existuje množina riešení $S = f_{A^T}^{-1}(B^T)$.



Obr. 7: Žiadne $X \in R^n$ sa nezobrazí na B^T.

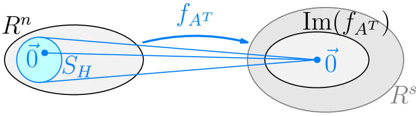
Homogénny lineárny systém

DEFINÍCIA

Hovoríme, že systém lineárnych rovníc (S) je homogénny, ak $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Čiže

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ & \dots & \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sn}x_n & = & 0 \end{array}$$



Obr. 8: $B = \vec{0} \in \mathrm{Im}(f_{A^T})$, lebo obrazom VP R^n je VPP v R^s.

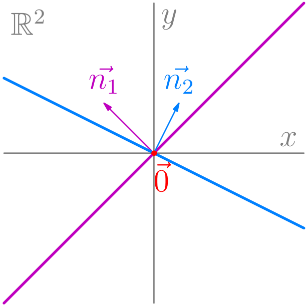
Množina všetkých riešení je $S_H = \mathrm{Ker}(f_{A^T})$. Takže

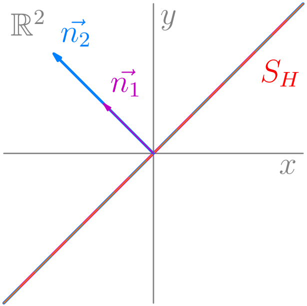
- systém (S) má vždy aspoň jedno riešenie – triviálne $X = (0, 0, \dots, 0)$
- ak má veľa riešení, tak tieto tvoria vektorový podpriestor R^n, $\dim(S_H) = n - h(A)$

VETA

Dimenzia vektorového priestoru riešení homogénneho lineárneho systému je $n - h(A)$.

Dimenzia vektorového priestoru S_H





- $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ sú LN
- čiže $h(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = 2$
- teda $\dim(S_H) = 2 - 2 = 0$, čiže $S_H = \{\vec{0}\}$

- $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ sú LZ
- čiže $h(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = 1$
- teda $\dim(S_H) = 2 - 1 = 1$, čiže S_H je netriviálny VPP

Postup riešenia homogénneho systému

Konečným počtom ERO upravíme maticu A na redukovanú stupňovitú maticu P.
Systém (S) je potom ekvivalentný so systémom (S′):

$$
\begin{array}{rcccccl}
x_{t_1} + p_{1,t_1+1}x_{t_1+1} + \ldots + p_{1,t_r-1}x_{t_r-1} & + 0.x_{t_r} & + p_{1,t_r+1}x_{t_r+1} & + \cdots + & p_{1,n}x_{n} & = & 0 \\
\ddots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots \\
 & x_{t_r} & + p_{r,t_r+1}x_{t_r+1} & + \cdots + & p_{rn}x_{n} & = & 0
\end{array}
$$

potom

- $x_{t_1}, \ldots, x_{t_r}$ sú viazané neznáme, vyjadríme ich pomocou parametrov
- ostatné x_i, je ich $n - r$, sú voľné neznáme (parametre)

Fundamentálne riešenia dostaneme tak, že za jednotlivé parametre volíme hodnoty 0 a 1, tak, že jeden parameter je 1 a ostatné 0.

Fundamentálne riešenia tvoria bázu priestoru riešení S_H.

Príklad riešenia homogénneho lineárneho systému

PRÍKLAD: Riešte nad $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 &= 0 \end{aligned}$$

RIEŠENIE: $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & -6 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & 17 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & -7/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -2/7 \\ 0 & 0 & 1 & 5/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ x_1, x_3 – viazané, x_2, x_4 – voľné, $h(A)=2$

Riešením bude VPP S_H, pričom $\dim(S_H) = 4 - h(A) = 4 - 2 = 2$.

$$\begin{aligned} x_2 &= s \in \mathbb{R} \\ x_4 &= t \in \mathbb{R} \\ x_1 - 2x_2 - \tfrac{2}{7}x_4 &= 0 \qquad \Rightarrow \quad x_1 = 2s + \tfrac{2}{7}t \\ x_3 + \tfrac{5}{7}x_4 &= 0 \qquad \Rightarrow \quad x_3 = -\tfrac{5}{7}t \end{aligned}$$

Takže riešenie homogénneho systému je $S_H = \{(2s + \frac{2}{7}t, s, -\frac{5}{7}t, t) \in \mathbb{R}^4,$ kde $s, t \in \mathbb{R}\}$.
Fundamentálne riešenia: pre $s = 1, t = 0$ máme $(2, 1, 0, 0)$ a pre $s = 0, t = 1$ máme $(\frac{2}{7}, 0, -\frac{5}{7}, 1)$
Čiže $S_H = [(2, 1, 0, 0), (\frac{2}{7}, 0, -\frac{5}{7}, 1)]$.

Nehomogénny lineárny systém

DEFINÍCIA: Hovoríme, že systém lineárnych rovníc (S) je nehomogénny, ak $B \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Čiže aspoň jedno $b_i \neq 0$ v systéme

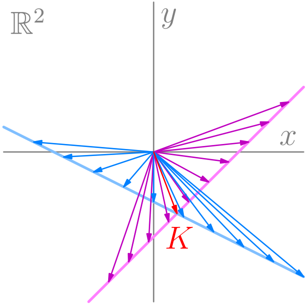
$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \quad \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \ldots & \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \quad \ldots + a_{sn}x_n & = & b_s \end{array}$$

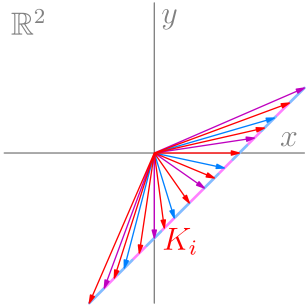
Množina všetkých riešení je S_N. Táto množina

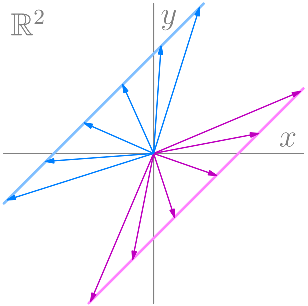
- má buď jediné riešenie
- alebo celú množinu riešení
- alebo je prázdna, napríklad pre systém $x_1 = 0, x_1 = 1$

VETA (Frobeniova): Nehomogénny systém je riešiteľný práve vtedy, keď $h(A) = h(A|B)$.

Príklady množiny S_N v $\mathbb{R}^2$







- $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ sú LN
- $h(A) = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right) = 2$
  $h(A|B) = 2$
- $S_N = \{K\}$

- $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ sú LZ
- $h(A) = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right) = 1$
  $h(A|B) = 1$
- S_N je celá množina

- $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ sú LZ
- $h(A) = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right) = 1$
  $h(A|B) = 2$
- $S_N = \emptyset$

Frobeniova veta

LEMA

Pre ľubovoľnú maticu A nad R platí, že $h(A^T) = h(A)$.

VETA (Frobeniova)

Nehomogénny systém lineárnych rovníc je riešiteľný práve vtedy, keď $h(A) = h(A|B)$.

DÔKAZ

- systém je riešiteľný $\Leftrightarrow B^T \in \mathrm{Im}(f_{A^T})$
- označme $a_1, \ldots, a_n$ stĺpce matice A
- teda riadky matice A^T sú $a_1^T, \ldots, a_n^T$
- potom $\mathrm{Im}(f_{A^T}) = [a_1^T, \ldots, a_n^T]$
- $B^T \in [a_1^T, \ldots, a_n^T] \Leftrightarrow [a_1^T, \ldots, a_n^T, B^T] = [a_1^T, \ldots, a_n^T]$

  a keďže sú konečnorozmerné a $[a_1^T, \ldots, a_n^T] \subset [a_1^T, \ldots, a_n^T, B^T]$

  $\Leftrightarrow \dim[a_1^T, \ldots, a_n^T, B^T] = \dim[a_1^T, \ldots, a_n^T]$

  $\Leftrightarrow h((A|B)^T) = h(A^T) \Leftrightarrow h(A|B) = h(A)$

Príklad riešenia nehomogénneho lineárneho systému

PRÍKLAD: Riešte nad $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 7 \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 &= 13 \end{aligned}$$

RIEŠENIE:

$$A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 2 & 5 & 7 \\ 9 & 12 & 3 & 10 & 13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4/3 & 1/3 & 2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

x_1, x_4 – viazané
x_2, x_3 – voľné
$h(A)=2$ a $h(A|B)=2$

Riešením bude množina $S_N \neq \emptyset$, pretože $h(A) = h(A|B) = 2$.

$$\begin{aligned} x_2 &= s \in \mathbb{R} \\ x_3 &= t \in \mathbb{R} \\ x_1 + \tfrac{4}{3}x_2 + \tfrac{1}{3}x_3 &= \tfrac{1}{3} \qquad \Rightarrow \quad x_1 = \tfrac{1}{3} - \tfrac{4}{3}s - \tfrac{1}{3}t \\ x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Takže riešenie nehomogénneho systému je $S_N = \{(\frac{1}{3} - \frac{4}{3}s - \frac{1}{3}t, s, t, 1) \in \mathbb{R}^4,$ kde $s, t \in \mathbb{R}\}$.

Fredholmova alternatíva

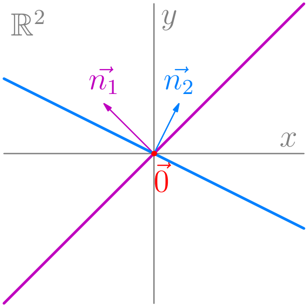
Uvažujme o nehomogénnom lineárnom systéme $A.X^T = B$, kde
$A \in M_{n,n}(R),\ X = (x_1, \dots, x_n),\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$.
Teda ide o systém n lineárnych rovníc s n neznámymi.

Potom máme DVE možnosti (alternatíva)

1. príslušný homogénny systém $A.X^T = 0$ má iba triviálne riešenie (čiže $h(A) = n$)
   a zároveň
   nehomogénny systém $A.X^T = B$ má jediné riešenie, nech by B bolo akékoľvek
2. príslušný homogénny systém $A.X^T = 0$ má aspoň jedno netriviálne riešenie (čiže $h(A) < n$)
   a zároveň
   nehomogénny systém $A.X^T = B$ je riešiteľný iba pre také B, pre ktoré $h(A) = h(A|B)$

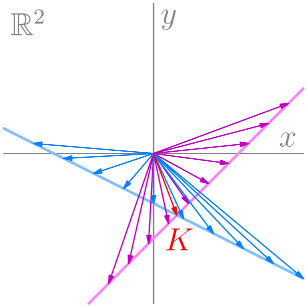
Fredholmova alternatíva – 1. možnosť

Homogénny systém $AX^T = 0$



- $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ sú LN, čiže $h(A) = 2$
- teda $\dim(S_H) = 2 - 2 = 0$, čiže $S_H = \{\vec{0}\}$

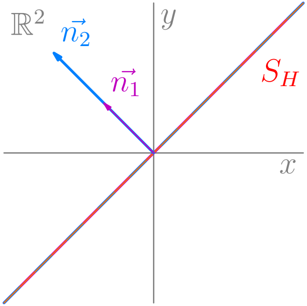
Nehomogénny systém $AX^T = B$



- existuje jediné riešenie $K \in R^n$ pre ľubovoľné B
- $S_N = \{K\}$

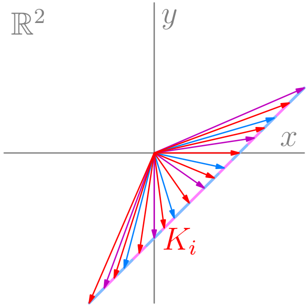
Fredholmova alternatíva – 2. možnosť

Homogénny systém $AX^T = 0$

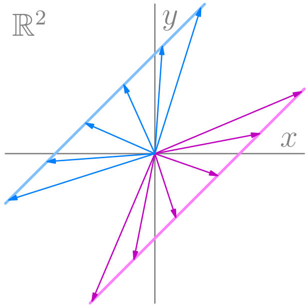


- $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ sú LZ, čiže $h(A) = 1$
- teda $\dim(S_H) = 2 - 1 = 1$, čiže S_H je priamka

Nehomogénny systém $AX^T = B$



- ak $h(A) = h(A|B) = 1$ posun je „koordinovaný“
- $S_N \neq \emptyset$



- ak $h(A) \neq h(A|B) = 2$ posun je „nekoordinovaný“
- $S_N = \emptyset$

Riešenie nehomogénneho systému ako $S_N = K + S_H$

VETA

Nech $AX^T = B$ je nehomogénny systém, kde $A \in M_{s,n}(R)$, $X^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_s \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ozn. S_N množinu všetkých riešení systému $AX^T = B$ a S_H množinu všetkých riešení príslušného homogénneho systému $AX^T = 0$. Nech $K \in R^n$ je nejaké riešenie systému $AX^T = B$.

Potom $S_N = K + S_H$.

DÔKAZ

- nech $Y \in S_N$, čiže preň platí, že $AY^T = B$. Môžeme ho zapísať ako $Y = K + (Y - K)$. Skúmajme vektor $(Y - K)$, počítajme $A(Y-K)^T = AY^T - AK^T = B - B = 0$. Teda $A(Y-K)^T = 0$ a preto $(Y - K) \in S_H$. To znamená, že $Y \in K + S_H$, čiže $S_N \subset K + S_H$.
- zoberme ľubovoľné $Z \in S_H$. Skúmajme vektor $(K + Z) \in K + S_H$, počítajme $A(K+Z)^T = AK^T + AZ^T = B - 0 = B$. Teda $A(K+Z)^T = B$ a preto $(K + Z) \in S_N$. To znamená, že $K + S_H \subset S_N$.
- záver: $S_N = K + S_H$

Riešenie nehomogénneho systému ako $S_N = K + S_H$

PRÍKLAD: Riešte nad $\mathbb{R}$

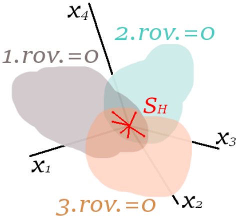
$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 7 \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 &= 13 \end{aligned}$$

RIEŠENIE: Z predošlého vieme, že riešením systému je množina

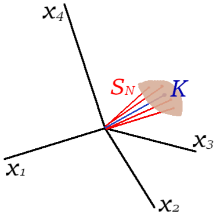
$$S_N = \{(\tfrac{1}{3} - \tfrac{4}{3}s - \tfrac{1}{3}t, s, t, 1) \in \mathbb{R}^4, \text{ kde } s, t \in \mathbb{R}\},$$

ktorú vieme zapísať v tvare $S_N = \underbrace{(\tfrac{1}{3}, 0, 0, 1)}_{K} + \underbrace{\{(-\tfrac{4}{3}s - \tfrac{1}{3}t, s, t, 0) \in \mathbb{R}^4, \text{ kde } s, t \in \mathbb{R}\}}_{S_H}$.

Obr. 9: Riešenia homogénneho systému.



Obr. 10: Riešenia nehomogénneho systému.



Zoznam použitých obrázkov

- obr. 1 – 10, na slajdoch 8, 12, 16, 17: B. Pokorná