Determinanty

Lineárna algebra

Barbora Pokorná

KAG, FMFI UK

2020

Permutácie n-prvkovej množiny

DEFINÍCIA

Majme konečnú množinu $M = \{1, 2, \dots, n\}$ pre ľubovoľné $n \in \mathbb{N}$. Bijekciu $f\colon\ M \to M$ budeme nazývať permutáciou množiny M a zapisujeme ju ako $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & \dots & f(n) \end{pmatrix}$.

PRÍKLADY

- pre $M = \{1\}$ máme iba jednu permutáciu: $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$
- pre $M = \{1, 2\}$ máme dve permutácie: $f_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ a $f_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$
- pre $M = \{1, 2, 3\}$ máme šesť permutácií:
  $f_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$, $f_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, $f_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$, $f_4 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $f_5 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, $f_6 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$

VETA

Na množine $M = \{1, 2, \dots, n\}$ vieme vytvoriť $n.(n-1)\dots 1 = n!$ rôznych permutácií.

Grupa S_n

VETA

Nech f, g sú dve permutácie množiny $\{1,\dots,n\}$. Operácia skladania permutácií „$\cdot$“ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & \dots & f(n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ g(1) & g(2) & \dots & g(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ g(f(1)) & g(f(2)) & \dots & g(f(n)) \end{pmatrix}$ je binárna.

PRÍKLAD

Nech $f = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right),\ g = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, potom $f \cdot g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ g(f(1)) & g(f(2)) & g(f(3)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ g(2) & g(1) & g(3) \end{pmatrix} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

VETA

Všetky permutácie množiny $\{1,\dots,n\}$ spolu s operáciou skladania permutácií $\cdot$ tvoria grupu, ozn. S_n. Táto grupa má $n!$ prvkov.

DÔKAZ

vrámci trénovacích úloh

Inverzie v permutácii

DEFINÍCIA

Nech $f \in S_n$, ak pre $i < j$ je $f(i) > f(j)$, hovoríme, že $(f(i), f(j))$ je inverzia v permutácii f.
Počet inverzií v permutácii f ozn. $\sigma(f)$.

PRÍKLAD

Nech $f = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ je permutácia z S_5. Určte počet inverzií $\sigma(f)$.

Robíme postupne porovnania všetkých prvkov:

$1<2$	$1<3$	$1<4$	$1<5$	$2<3$	$2<4$	$2<5$	$3<4$	$3<5$	$4<5$
$3>1$	$3<5$	$3>2$	$3<4$	$1<5$	$1<2$	$1<4$	$5>2$	$5>4$	$2<4$
(3,1)	–	(3,2)	–	–	–	–	(5,2)	(5,4)	–

V permutácii f je $\sigma(f) = 4$.

VETA: Ak $f, g \in S_n$, tak $(-1)^{\sigma(f\cdot g)} = (-1)^{\sigma(f)}.(-1)^{\sigma(g)}$.

DÔSLEDOK: Ak $f \in S_n$, tak $(-1)^{\sigma(f)} = (-1)^{\sigma(f^{-1})}$.

DÔKAZ: $(-1)^{\sigma(f)}.(-1)^{\sigma(f^{-1})} = (-1)^{\sigma(f\cdot f^{-1})} = (-1)^{\sigma(\mathrm{id})} = (-1)^0 = 1 \Rightarrow (-1)^{\sigma(f)} = (-1)^{\sigma(f^{-1})}$

Determinant

DEFINÍCIA

Nech R je pole a nech $A = (a_{ij}) \in M_{n,n}(R)$, kde $n \in \mathbb{N}$. Determinant matice A sa definuje ako prvok poľa R,

$$\det(A) = \sum_{f \in S_n} (-1)^{\sigma(f)} a_{1f(1)} a_{2f(2)} \cdots a_{nf(n)}.$$

Poznámka:

V definícii determinantu $n \times n$ sa sčítava cez všetky permutácie S_n, teda sčítame $n!$ súčinov.

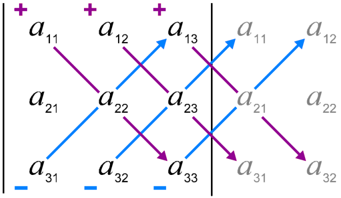
PRÍKLADY

- $\det(a_{11}) = (-1)^{\sigma\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)} a_{11} = (-1)^0 a_{11} = a_{11}$
- $\det\left(\begin{smallmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{smallmatrix}\right) = (-1)^{\sigma\left(\begin{smallmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{smallmatrix}\right)} a_{11}a_{22} + (-1)^{\sigma\left(\begin{smallmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{smallmatrix}\right)} a_{12}a_{21} = (-1)^0 a_{11}a_{22} + (-1)^1 a_{12}a_{21}$
  $= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Sarrusovo pravidlo

- $$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} = (-1)^{\sigma\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{smallmatrix}\right)} a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^{\sigma\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{smallmatrix}\right)} a_{11}a_{23}a_{32}$$
$$+ (-1)^{\sigma\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{smallmatrix}\right)} a_{12}a_{21}a_{33} + (-1)^{\sigma\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{smallmatrix}\right)} a_{12}a_{23}a_{31}$$
$$+ (-1)^{\sigma\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{smallmatrix}\right)} a_{13}a_{21}a_{32} + (-1)^{\sigma\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{smallmatrix}\right)} a_{13}a_{22}a_{31}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Sarrusovo pravidlo:



Obr. 1: stĺpcová verzia

Algebraický doplnok a rozvoj determinantu

- skúsme ešte upraviť determinant ináč

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$
$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$
$$= a_{11}\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

- všeobecne, determinant matice stupňa n sa dá vyjadriť pomocou determinantov matíc stupňa $n-1$ ako

$$\det(A) = a_{i1}(\dots) + a_{i2}(\dots) + \dots + a_{in}(\dots) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$$

  a toto vyjadrenie sa nazýva rozvoj determinantu matice A podľa i-teho riadka

- prvok A_{ij} nazývame algebraický doplnok prvku a_{ij}
- o chvíľu si ukážeme, že sa A_{ij} sa dá vyjadriť pomocou determinantu vhodnej matice stupňa $n-1$, ktorá je odvodená určitým spôsobom z matice A

Vlastnosť determinantov 1

VETA

Pre každú maticu $A = (a_{ij}) \in M_{n,n}(R)$ máme $\det(A) = \det(A^T)$.

DÔKAZ

- vieme, že $A^T = (a_{ij}^T)$, kde $a_{ij}^T = a_{ji}$
- ak $f \in S_n$, tak $\{f^{-1}(1), f^{-1}(2), \dots, f^{-1}(n)\} = \{1, 2, \dots, n\}$
- využijeme, že násobenie prvkov v poli je komutatívne

$$\begin{aligned}\det(A) &= \textstyle\sum_{f\in S_n}(-1)^{\sigma(f)} a_{1f(1)}a_{2f(2)}\cdots a_{nf(n)}\\ &= \textstyle\sum_{f\in S_n}(-1)^{\sigma(f)} a_{f^{-1}(1)f(f^{-1}(1))}a_{f^{-1}(2)f(f^{-1}(2))}\cdots a_{f^{-1}(n)f(f^{-1}(n))}\\ &= \textstyle\sum_{f\in S_n}(-1)^{\sigma(f)} a_{f^{-1}(1)1}a_{f^{-1}(2)2}\cdots a_{f^{-1}(n)n}\\ &= \textstyle\sum_{f\in S_n}(-1)^{\sigma(f)} a^T_{1f^{-1}(1)}a^T_{2f^{-1}(2)}\cdots a^T_{nf^{-1}(n)}\end{aligned}$$

- pretože $f = (f^{-1})^{-1}$, tak množina $\forall f \in S_n$ je presne taká istá ako množina $\forall f^{-1} \in S_n$, čiže

$$\det(A) = \textstyle\sum_{f^{-1}\in S_n}(-1)^{\sigma(f^{-1})} a^T_{1f^{-1}(1)}a^T_{2f^{-1}(2)}\cdots a^T_{nf^{-1}(n)} = \det(A^T)$$

Vlastnosť determinantov 2 (vplyv ERO 1)

VETA

Nech matica B vznikne z matice $A = (a_{ij}) \in M_{n,n}(R)$ vzájomnou výmenou dvoch riadkov (resp. stĺpcov). Potom $\det(B) = -\det(A)$.

DÔKAZ

- vďaka vlastnosti 1 stačí ukázať „riadkovú verziu". Nech B vznikla z A výmenou 1. a 2. riadka.
- teda $B = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & & \cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2n} \\ & \cdots & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$. Potom z definície máme

$$\begin{aligned} \det(B) &= \sum_{f\in S_n} (-1)^{\sigma(f)} b_{1f(1)} b_{2f(2)} b_{3f(3)} \dots b_{nf(n)} \\ &= \sum_{f\in S_n} (-1)^{\sigma(f)} a_{2f(1)} a_{1f(2)} a_{3f(3)} \dots a_{nf(n)} \\ &= \sum_{f\in S_n} (-1)^{\sigma(f)} a_{1f(2)} a_{2f(1)} a_{3f(3)} \dots a_{nf(n)} \end{aligned}$$

- ozn. $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ g(1) & g(2) & g(3) & \cdots & g(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ f(2) & f(1) & f(3) & \cdots & f(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 1 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ f(1) & f(2) & f(3) & \cdots & f(n) \end{pmatrix}$
- potom z lemy $(-1)^{\sigma(g)} = (-1)^1.(-1)^{\sigma(f)} \Rightarrow (-1)^{\sigma(f)} = -(-1)^{\sigma(g)}$. A teda

$$\det(B) = -\sum_{g\in S_n} (-1)^{\sigma(g)} a_{1g(1)} a_{2g(2)} a_{3g(3)} \dots a_{ng(n)} = -\det(A)$$

Vlastnosť determinantov 3

VETA

Nech matica $A = (a_{ij}) \in M_{n,n}(R)$. Potom pre každé $r, s \in \{1, \dots, n\}$ sa dá algebraický doplnok A_{rs} vyjadriť ako $A_{rs} = (-1)^{r+s} \det(M_{rs})$, kde M_{rs} je matica typu $(n-1) \times (n-1)$, ktorá vznikne z A vynechaním r-tého riadka a s-tého stĺpca.

DÔKAZ

- ukážeme pre A_{11}. Z definície determinantu máme
  $$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{f \in S_n} (-1)^{\sigma(f)} a_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)} \\ &= \sum_{f \in S_n,\, f(1)=1} (-1)^{\sigma(f)} a_{11} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)} + \text{ členy bez } a_{11}\end{aligned}$$
- teda $A_{11} = \sum_{f \in S_n,\, f(1)=1} (-1)^{\sigma(f)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)}$
- v permutácii $f \in S_n$, kde $f(1) = 1$ je presne toľko inverzií, koľko ich je v permutácii $g = \begin{pmatrix} 2 & \cdots & n \\ f(2) & \cdots & f(n) \end{pmatrix}$ množiny $\{2, \dots, n\}$
- navyše množina $\forall f \in S_n$ takých, že $f(1) = 1$, bijektívne zodpovedá množine $T_{\{2,\dots,n\}}$ všetkých permutácií množiny $\{2, \dots, n\}$ a teda
  $$A_{11} = \sum_{g \in T_{\{2,\dots,n\}}} (-1)^{\sigma(g)} a_{2g(2)} \dots a_{ng(n)} = \det \begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det(M_{11})$$

Laplaceova veta o rozvoji determinantu

VETA (Laplaceova)

Pre maticu $A = (a_{ij}) \in M_{n,n}(R)$ a

- každé $i \in \{1, \dots, n\}$ máme vyjadrenie rozvoja determinantu matice A podľa i-teho riadka
$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det(M_{ij})$$
- každé $j \in \{1, \dots, n\}$ máme vyjadrenie rozvoja determinantu matice A podľa j-teho stĺpca
$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det(M_{ij})$$

PRÍKLAD

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -4 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix} = 2(-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + 0(-1)^{2+2} \det \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + (-5)(-1)^{3+2} \det \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$
$$= -2(3.3 - (-4).1) + 5((-1).(-4) - 3.3) = -26 - 25 = -51$$

Vlastnosť determinantov 4

VETA

Ak matica $A = (a_{ij}) \in M_{n,n}(R)$, kde $n \geq 2$, má dva riadky (resp. stĺpce) rovnaké, tak $\det(A) = 0$.

DÔKAZ

- vďaka vlastnosti 1 stačí ukázať „riadkovú verziu". Použijeme indukciu vzhľadom na n.
- nech $n = 2$. Potom $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} = a_{11}a_{12} - a_{11}a_{12} = 0$.
- IP: nech tvrdenie platí pre matice stupňa $n-1$, kde $n \geq 3$
- skúmajme maticu $A = (a_{ij})$ stupňa n, ktorej r-tý a s-tý riadok sú rovnaké, pričom $r < s$
- urobíme rozvoj $\det(A)$ podľa i-teho riadka, kde $i \neq r$, $i \neq s$

$$\det(A) = a_{i1}(-1)^{i+1}\det(M_{i1}) + \cdots + a_{in}(-1)^{i+n}\det(M_{in})$$

- každá z matíc $M_{i1}, \ldots, M_{in}$ je stupňa $n-1$ a má dva riadky rovnaké, teda podľa IP má nulový determinant. Preto $\det(A) = 0$.

Vlastnosť determinantov 5 (vplyv ERO 2)

VETA

Nech matica B vznikne z matice $A = (a_{ij}) \in M_{n,n}(R)$ tak, že jeden riadok (resp. stĺpec) vynásobíme $\alpha \in R$. Potom $\det(B) = \alpha \det(A)$.

DÔKAZ

- vďaka vlastnosti 1 stačí ukázať „riadkovú verziu"
- nech B vznikne z A vynásobením i-teho riadka prvkom $\alpha \in R$

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha a_{i1} & \alpha a_{i2} & \cdots & \alpha a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- urobíme rozvoj $\det(B)$ podľa i-teho riadka

$$\det(B) = (\alpha a_{i1})A_{i1} + \cdots + (\alpha a_{in})A_{in} = \alpha(a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{in}A_{in}) = \alpha \det(A)$$

Vlastnosť determinantov 6

VETA

Nech matice $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{n,n}(R)$ sa líšia jedna od druhej nanajvýš v k-tom riadku pre voľaktoré $k \in \{1, \dots, n\}$. Potom $\det(A) + \det(B) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k-1,1} & \cdots & a_{k-1,n} \\ a_{k1}+b_{k1} & \cdots & a_{kn}+b_{kn} \\ a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Poznámka: Podobne by sme naformulovali tvrdenie pre matice A, B líšiace sa v jednom stĺpci.

DÔKAZ: Urobíme rozvoj podľa k-teho riadka

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k-1,1} & \cdots & a_{k-1,n} \\ a_{k1}+b_{k1} & \cdots & a_{kn}+b_{kn} \\ a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{k1} + b_{k1})A_{k1} + \cdots + (a_{kn} + b_{kn})A_{kn}$$

$$= (a_{k1}A_{k1} + \cdots + a_{kn}A_{kn}) + (b_{k1}A_{k1} + \cdots + b_{kn}A_{kn}) \overset{A_{kj} = B_{kj} \text{ pre } \forall j}{=} \det(A) + \det(B)$$

Vlastnosť determinantov 7

VETA

Ak v matici $A = (a_{ij}) \in M_{n,n}(R)$ je aspoň jeden riadok (resp. stĺpec) nulový, tak $\det(A) = 0$.

DÔKAZ

- stačí použiť vlastnosť 5 alebo priamo definíciu determninantu

Vlastnosť determinantov 8 (vplyv ERO 3)

VETA

Nech matica B vznikne z matice $A = (a_{ij}) \in M_{n,n}(R)$ prirátaním α-násobku ($\alpha \in R$) hociktorého riadka (resp. stĺpca) k inému riadku (resp. stĺpcu) v A. Potom $\det(B) = \det(A)$.

DÔKAZ

- nech B vznikla z A prirátaním α-násobku 2. riadka k 1. riadku, čiže

$$B = \begin{pmatrix} a_{11}+\alpha a_{21} & a_{12}+\alpha a_{22} & \cdots & a_{1n}+\alpha a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- potom

$$\det(B) \overset{\text{vl. 6}}{=} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{vl. 5}}{=} \det(A) + \alpha \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \overset{\text{vl. 4}}{=} \det(A) + \alpha .0 = \det(A)$$

Regulárnosť matice a jej determinant

VETA

Pre ľubovoľné $A, B \in M_{n,n}(R)$ platí, že $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

VETA

Matica $A \in M_{n,n}(R)$ je regulárna práve vtedy, keď $\det(A) \neq 0$.

DÔKAZ

- vieme, že A je riadkovo ekvivalentná s RSM A'
- keď sa pozrieme aký majú vplyv ERO na hodnotu determinantu matice, tak vidíme, že $\det(A') = c.\det(A)$ pre nejaké $0 \neq c \in R$
- matica A je regulárna $\Leftrightarrow$ A' je regulárna $\Leftrightarrow A' = I_n \Leftrightarrow \det(A') = 1 \Leftrightarrow c.\det(A) = 1$
  $\Leftrightarrow \det(A) = c^{-1} \neq 0$

Využitie determinantov pri určovaní lineárneho izomorfizmu

PRÍKLAD

Určte, či lineárne zobrazenie $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ určené maticou $M_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ je lineárny izomorfizmus.

RIEŠENIE

- spočítame determinant matice M_f

$$\det(M_f) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1.(2.3 - 1.(-1)) - 1.(1.3 - 2.(-1)) + 0.(1.1 - 2.2)$$
$$= 7 - 5 + 0 = 2 \neq 0$$

- matica M_f je regulárna, čiže f je lineárny izomorfizmus
- vektory určené riadkami matice sú LN a tvoria bázu v $\mathbb{R}^3$

Adjungovaná matica

DEFINÍCIA

Adjungovaná matica k matici $A = (a_{ij}) \in M_{n,n}(R)$ sa definuje ako

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21}^{!} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

kde A_{ij} je algebraický doplnok prvku a_{ij} matice A.

Poznámka: Pre $A = (a_{ij}) \in M_{n,n}(R)$ máme vlastne $\operatorname{adj}(A) = (A_{ij}^T) \in M_{n,n}(R)$.

Využitie determinantov pri rátaní inverznej matice

VETA

Nech $A = (a_{ij}) \in M_{n,n}(R)$ je regulárna matica $(\det(A) \neq 0)$. Potom $A^{-1} = (\det(A))^{-1}.\operatorname{adj}(A)$.

DÔKAZ: Počítajme

$$A.(\det(A))^{-1}.\operatorname{adj}(A) = (\det(A))^{-1} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= (\det(A))^{-1} \begin{pmatrix} a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n} & a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+\cdots+a_{1n}A_{2n} & \cdots & a_{11}A_{n1}+a_{12}A_{n2}+\cdots+a_{1n}A_{nn} \\ a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+\cdots+a_{2n}A_{1n} & a_{21}A_{21}+\cdots+a_{2n}A_{2n} & \cdots & a_{21}A_{n1}+\cdots+a_{2n}A_{nn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}A_{11}+\cdots+a_{nn}A_{1n} & a_{n1}A_{21}+\cdots+a_{nn}A_{2n} & \cdots & a_{n1}A_{n1}+\cdots+a_{nn}A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= (\det(A))^{-1} \begin{pmatrix} \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det(A) \end{pmatrix} = (\det(A))^{-1}.\det(A).I_n = 1.I_n$$

Príklad hľadania inverznej matice

PRÍKLAD

Vyrátajte $A^{-1} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$, ak matica $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$.

RIEŠENIE

- determinant: $\det(A) = 1.4 - (-3).2 = 10$
- algebraické doplnky: $A_{11} = 4$, $A_{21} = -2$, $A_{12} = 3$, $A_{22} = 1$
- a teda $A^{-1} = \frac{1}{10} \left(\begin{smallmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$

Využitie determinantov pri riešení systému lin. rovníc

- majme daný nehomogénny systém lineárnych rovníc $AX^T = B$, kde
  $A \in M_{n,n}(R)$, $X^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$
- nech A je regulárna (teda $\det(A) \neq 0$), čiže existuje A^{-1}
- potom má daný systém jediné riešenie: $X^T = A^{-1}B$
- použijúc predchádzajúcu vetu máme

$$X^T = (\det(A))^{-1}.\operatorname{adj}(A).B$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = (\det(A))^{-1} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = (\det(A))^{-1} \begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \cdots + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \cdots + A_{n2}b_n \\ \dots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \cdots + A_{nn}b_n \end{pmatrix}$$

$$= (\det(A))^{-1} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \dots \\ D_n \end{pmatrix} \quad \text{kde } D_i = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- z toho $x_i = (\det(A))^{-1}.D_i$ (tento vzťah voláme Cramerova formula)

Príklad riešenia nehomogénnej sústavy lin. rovníc

PRÍKLAD: Pomocou Cramerových formúl riešte nad $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

RIEŠENIE

- máme $\det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 4$, takže $(\det(A))^{-1} = 4^{-1} \overset{(\text{v } \mathbb{Z}_5)}{=} 4$
- ďalej vyrátame $D_1 = \det\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2, \quad D_2 = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0, \quad D_3 = \det\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$
- a teda

$$\begin{aligned} x_1 &= (\det(A))^{-1} D_1 = 4.2 = 3 \\ x_2 &= (\det(A))^{-1} D_2 = 4.0 = 0 \\ x_3 &= (\det(A))^{-1} D_3 = 4.2 = 3 \end{aligned}$$

- jediné riešenie daného systému je $S_N = \{(3, 0, 3) \in V_3(\mathbb{Z}_5)\}$

Zoznam použitých obrázkov

- obr. 1: https://en.wikipedia.org/wiki/Rule_of_Sarrus# /media/File:Schema_sarrus-regel.png