Skalárny súčin

Lineárna algebra

Barbora Pokorná

KAG, FMFI UK

2020

Skalárny súčin a euklidovský VP

DEFINÍCIA

Nech V je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$. Skalárnym súčinom na V je zobrazenie $\langle\cdot,\cdot\rangle :\ V \times V \to \mathbb{R}$, ktoré spĺňa

1. $\langle \alpha\vec{x} + \beta\vec{y}, \vec{z}\rangle = \alpha\langle\vec{x},\vec{z}\rangle + \beta\langle\vec{y},\vec{z}\rangle \quad \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ a $\forall\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in V$ (bilineárnosť)
2. $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = \langle\vec{y},\vec{x}\rangle \quad \forall\vec{x},\vec{y}\in V$ (symetrickosť)
3. ak $\vec{x}\neq\vec{0}$, tak $\langle\vec{x},\vec{x}\rangle > 0 \quad \forall\vec{x}\in V$ (kladná definitnosť)

Číslo $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle$ sa nazýva sklárny súčin vektorov $\vec{x}$ a $\vec{y}$.
Priestor V s pevne zvoleným skalárnym súčinom sa nazýva euklidovský vektorový priestor a označujeme ho $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Poznámka: Skalárny súčin ľubovoľného vektora s nulovým vektorom je nula.

$$\langle\vec{0},\vec{x}\rangle = \langle\vec{0}+\vec{0},\vec{x}\rangle = \langle\vec{0},\vec{x}\rangle + \langle\vec{0},\vec{x}\rangle \quad\Rightarrow\quad \langle\vec{0},\vec{x}\rangle = 0 \quad \forall\vec{x}\in V$$

Štandardný skalárny súčin na $V = \mathbb{R}^n$

- vektorový priestor $V = \mathbb{R}^n$
- skalárny súčin: $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
  $\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$

Pozn.: „Štandardný“, lebo $(x_1, \dots, x_n)$ je n-tica súradníc vektora $\vec{x}$ vzhľadom na bázu $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$.

DÔKAZ vlastností pre $\mathbb{R}^2$

1. $$\begin{aligned} \langle \alpha\vec{x} + \beta\vec{y}, \vec{z} \rangle &= \langle \alpha(x_1, x_2) + \beta(y_1, y_2), (z_1, z_2) \rangle = \langle (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2), (z_1, z_2) \rangle \\ &= (\alpha x_1 + \beta y_1) z_1 + (\alpha x_2 + \beta y_2) z_2 = \alpha x_1 z_1 + \beta y_1 z_1 + \alpha x_2 z_2 + \beta y_2 z_2 \\ &= \alpha(x_1 z_1 + x_2 z_2) + \beta(y_1 z_1 + y_2 z_2) = \alpha \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \beta \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle \end{aligned}$$
2. $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 = y_1 x_1 + y_2 x_2 = \langle (y_1, y_2), (x_1, x_2) \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$
3. pre $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ máme $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \langle (x_1, x_2), (x_1, x_2) \rangle = x_1^2 + x_2^2 > 0$

Skalárne súčiny na iných priestoroch

- Majme $V = C(J, \mathbb{R})$, t. j. vektorový priestor spojitých reálnych funkcií definovaných na uzavretom intervale $J = [a, b]$.
  Skalárny súčin pre $f, g \in C(J, \mathbb{R})$ definujeme
  $$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

- Majme $V = M_{m,n}(\mathbb{R})$, t. j. vektorový priestor reálnych matíc typu $m \times n$.
  Skalárny súčin definujeme pomocou stopy matice
  $$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^T)$$
  Stopa štvorcovej matice M, ozn. $\mathrm{tr}(M)$, je súčet prvkov hlavnej diagonály.

- Skalárny súčin sa dá definovať aj na VP nad poľom $\mathbb{C}$. Vtedy vlastnosť symetrie vyzerá takto: $\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle = \overline{\langle \vec{y}, \vec{x}\rangle}$, pričom $\overline{z}$ označuje číslo komplexne združené k číslu $z \in \mathbb{C}$.
  Štandardný skalárny súčin na $V = \mathbb{C}^n$ má predpis
  $$\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\rangle = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n}$$

Dĺžka vektora

DEFINÍCIA

Nech $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ je euklidovský vektorový priestor. Dĺžka (veľkosť) vektora $\vec{x} \in V$ sa definuje ako nezáporné číslo $|\vec{x}| = \sqrt{\langle\vec{x},\vec{x}\rangle}$.

VETA

Nech $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ je euklidovský vektorový priestor. Potom

1. $|\alpha\vec{x}| = |\alpha|.|\vec{x}|$ pre $\alpha \in \mathbb{R},\ \vec{x} \in V$
2. $|\vec{x}| = 0 \ \Leftrightarrow\ \vec{x} = \vec{0}$
3. $\left|\frac{1}{|\vec{x}|}\cdot\vec{x}\right| = 1$ pre $\vec{x} \in V \setminus \{\vec{0}\}$ (vektor $\frac{1}{|\vec{x}|}\cdot\vec{x}$ sa volá jednotkový vektor určený $\vec{x}$)
4. $|\langle\vec{x},\vec{y}\rangle| \le |\vec{x}|\,.\,|\vec{y}|$ pre $\vec{x},\vec{y} \in V$ (Cauchy-Schwarzova nerovnosť)
5. $|\vec{x}+\vec{y}| \le |\vec{x}| + |\vec{y}|$ pre $\vec{x},\vec{y} \in V$ (trojuholníková nerovnosť)

Dôkaz vlastností 1 – 4

DÔKAZ

1. $|\alpha\vec{x}| = \sqrt{\langle\alpha\vec{x},\alpha\vec{x}\rangle} = \sqrt{\alpha^2\langle\vec{x},\vec{x}\rangle} = |\alpha|\sqrt{\langle\vec{x},\vec{x}\rangle} = |\alpha|.|\vec{x}|$
2. „$\Rightarrow$“: Nech $\vec{x} = \vec{0}$. Potom $\langle\vec{0},\vec{0}\rangle = \langle\vec{0}+\vec{0},\vec{0}\rangle = \langle\vec{0},\vec{0}\rangle + \langle\vec{0},\vec{0}\rangle \Rightarrow \langle\vec{0},\vec{0}\rangle = 0$ a teda $|\vec{0}| = 0$.
   „$\Leftarrow$“: Nech $\vec{x} \neq \vec{0}$. Potom $\langle\vec{x},\vec{x}\rangle > 0$ a preto $|\vec{x}| \neq 0$.
3. pre $\vec{x} \neq \vec{0}$ máme $\left|\frac{1}{|\vec{x}|}\cdot\vec{x}\right| \overset{\text{vl. 1}}{=} \frac{1}{|\vec{x}|}\cdot|\vec{x}| = 1$
4. Ak $\vec{x} = \vec{0}$ alebo $\vec{y} = \vec{0}$, tvrdenie platí, lebo $0 = 0$.
   Nech teraz $\vec{x} \neq \vec{0}$ aj $\vec{y} \neq \vec{0}$. Pre každé $\alpha \in \mathbb{R}$ vytvoríme vektor $\alpha\vec{x} - \vec{y} \in V$.
   Z kladnej definitnosti máme: $\langle\alpha\vec{x}-\vec{y},\alpha\vec{x}-\vec{y}\rangle \geq 0$
   Z bilineárnosti: $\alpha^2\langle\vec{x},\vec{x}\rangle - 2\alpha\langle\vec{x},\vec{y}\rangle + \langle\vec{y},\vec{y}\rangle \geq 0$
   To je kvadratická funkcia pre $\alpha \in \mathbb{R}$: $a\alpha^2 + b\alpha + c$, kde $a = \langle\vec{x},\vec{x}\rangle$, $b = -2\langle\vec{x},\vec{y}\rangle$, $c = \langle\vec{y},\vec{y}\rangle$
   Kvadratická funkcia je nezáporná práve vtedy, keď jej diskriminant $D = b^2 - 4ac \leq 0$.
   Čiže $4\langle\vec{x},\vec{y}\rangle^2 - 4\langle\vec{x},\vec{x}\rangle\langle\vec{y},\vec{y}\rangle \leq 0$
   $$\langle\vec{x},\vec{y}\rangle^2 - |\vec{x}|^2|\vec{y}|^2 \leq 0$$
   $$|\langle\vec{x},\vec{y}\rangle| \leq |\vec{x}||\vec{y}|$$

Dôkaz vlastnosti 5

DÔKAZ

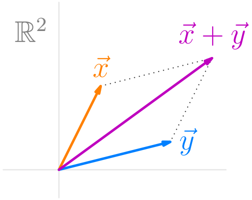
5. Počítajme:

$$|\vec{x}+\vec{y}|^2 = \langle \vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y}\rangle = \langle \vec{x}, \vec{x}\rangle + 2\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle + \langle \vec{y}, \vec{y}\rangle = |\vec{x}|^2 + 2\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle + |\vec{y}|^2$$

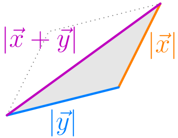
$$\overset{\text{zo (4)}}{\leq} |\vec{x}|^2 + 2|\vec{x}|.|\vec{y}| + |\vec{y}|^2 = (|\vec{x}| + |\vec{y}|)^2$$

Teda: $|\vec{x}+\vec{y}|^2 \leq (|\vec{x}| + |\vec{y}|)^2$

$$|\vec{x}+\vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$$



Obr. 1: Majme $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$.



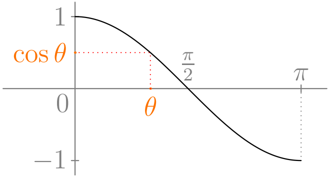
Obr. 2: Trojuholníková nerovnosť.

Dôsledok Schwartzovej nerovnosti

- Schwarzova nerovnosť: $|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq |\vec{x}| \, . \, |\vec{y}|$
- dôsledok: pre $\vec{x} \neq \vec{0}$, $\vec{y} \neq \vec{0}$ máme $\left| \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{|\vec{x}| . |\vec{y}|} \right| \leq 1$
- a teda platí: $-1 \leq \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{|\vec{x}| . |\vec{y}|} \leq 1$
- keď si uvedomíme priebeh funkcie kosínus,

  zistíme, že existuje práve jedno číslo θ také, že $0 \leq \theta \leq \pi$ pre ktoré

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{|\vec{x}| \, |\vec{y}|}$$



Obr. 3: Funkcia $\cos\theta$ na intervale $[0, \pi]$.

Uhol dvoch vektorov

DEFINÍCIA

Nech $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ je euklidovský vektorový priestor. Pre dva vektory $\vec{x}, \vec{y} \in V \setminus \{\vec{0}\}$ definujeme ich uhol ako jediné $\theta \in [0, \pi]$, pre ktoré $\cos\theta = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle}{|\vec{x}||\vec{y}|}$. Zapisujeme $\measuredangle\, \vec{x}, \vec{y} = \theta$.

Ak $\vec{x} = \vec{0}$ alebo $\vec{y} = \vec{0}$, tak ich uhol sa rovná $\frac{\pi}{2}$.

Poznámka: Vzťah $\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle = |\vec{x}|\,|\vec{y}|\cos\theta$ potom platí pre všetky $\vec{x}, \vec{y} \in V$.

PRÍKLADY

- $\vec{x} = (1,1), \vec{y} = (2,2):\quad \cos\theta = \frac{\langle (1,1),(2,2)\rangle}{|(1,1)||(2,2)|} = \frac{1.2+1.2}{\sqrt{1^2+1^2}\sqrt{2^2+2^2}} = \frac{4}{4} = 1 \;\Rightarrow\; \theta = 0$
- $\vec{x} = (1,1), \vec{y} = (-1,1):\quad \cos\theta = \frac{\langle (1,1),(-1,1)\rangle}{|(1,1)||(-1,1)|} = \frac{1.(-1)+1.1}{\sqrt{1^2+1^2}\sqrt{(-1)^2+1^2}} = 0 \;\Rightarrow\; \theta = \frac{\pi}{2}$
- $\vec{x} = (1,0), \vec{y} = (1,1):\quad \cos\theta = \frac{\langle (1,0),(1,1)\rangle}{|(1,0)||(1,1)|} = \frac{1.1+0.1}{\sqrt{1^2+0^2}\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \;\Rightarrow\; \theta = \frac{\pi}{4}$

Kolmosť (ortogonálnosť)

DEFINÍCIA

Ak $\measuredangle\, \vec{x}, \vec{y} = \frac{\pi}{2}$, hovoríme, že vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$ sú navzájom kolmé (ortogonálne), ozn. $\vec{x} \perp \vec{y}$.

VETA

Vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$ v euklidovskom VP sú navzájom kolmé práve vtedy, keď $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$.

DÔKAZ

- „$\Rightarrow$“: nech $\vec{x} \perp \vec{y}$, čiže $\measuredangle\, \vec{x}, \vec{y} = \frac{\pi}{2}$.
  Potom $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = |\vec{x}|\, |\vec{y}| \cos \frac{\pi}{2} = |\vec{x}|\, |\vec{y}| .0 = 0$.

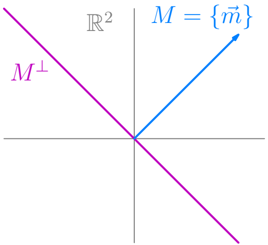
- „$\Leftarrow$“: nech $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$, čiže $|\vec{x}|\, |\vec{y}| \cos(\measuredangle\, \vec{x}, \vec{y}) = 0$.
  Ak $\vec{x} = \vec{0}$ alebo $\vec{y} = \vec{0}$, tak podľa definície $\vec{x} \perp \vec{y}$.
  Ak $\vec{x} \neq \vec{0}$ a $\vec{y} \neq \vec{0}$, tak určite $|\vec{x}| \neq 0$ aj $|\vec{y}| \neq 0$. A teda musí byť $\cos(\measuredangle\, \vec{x}, \vec{y}) = 0$.
  Čiže $\measuredangle\, \vec{x}, \vec{y} = \frac{\pi}{2}$ a teda $\vec{x} \perp \vec{y}$.

Ortogonálny doplnok

DEFINÍCIA

Nech $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ je euklidovský vektorový priestor a nech M je podmnožina vo V.
Potom ortogonálny doplnok podmnožiny M vo V sa definuje ako množina

$$M^{\perp} = \{\vec{x} \in V;\ \vec{x} \perp \vec{m} \text{ pre všetky } \vec{m} \in M\}.$$



Obr. 4: Ortogonálny doplnok $M^{\perp}$.

VETA

Nech $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ je euklidovský vektorový priestor. Nech $\emptyset \neq M \subset V$. Potom

- $M^{\perp}$ je vektorový podpriestor vo V
- ak $M \subset N$, tak $N^{\perp} \subset M^{\perp}$
- ak S, T sú VPP vo V, tak $(S+T)^{\perp} = S^{\perp} \cap T^{\perp}$

Dôkaz vlastností ortogonálneho doplnku

DÔKAZ

- Určite $M^\perp \neq \emptyset$, pretože $\vec{0}$ je kolmý na všetky vektory z V a teda $\vec{0} \in M^\perp$.
  Použijeme kritérium VPP. Nech $\vec{x}, \vec{y} \in M^\perp$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Skúmame, či $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in M^\perp$:
  $$\langle \alpha\vec{x} + \beta\vec{y}, \vec{m} \rangle = \alpha\langle \vec{x}, \vec{m} \rangle + \beta\langle \vec{y}, \vec{m} \rangle = \alpha.0 + \beta.0 = 0 \quad \text{pre} \quad \forall \vec{m} \in M$$
  Teda $M^\perp$ je naozaj VPP.
- Nech $M \subset N$ a nech $\vec{x} \in N^\perp$. Keďže $\vec{x} \perp \vec{n}$ pre všetky $\vec{n} \in N$, tak $\vec{x} \perp \vec{m}$ aj pre všetky $\vec{m} \in M$. A teda $\vec{x} \in M^\perp$, čiže máme $N^\perp \subset M^\perp$.
- Ukážeme, že $(S + T)^\perp \subset S^\perp \cap T^\perp$. Nech $\vec{x} \in (S + T)^\perp$.
  Z definície máme $\langle \vec{x}, \vec{s} + \vec{t} \rangle = 0$ pre všetky $\vec{s} \in S$ a $\vec{t} \in T$.
  Teda aj $\langle \vec{x}, \vec{s} + \vec{0} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{s} \rangle = 0$ pre všetky $\vec{s} \in S$. Čiže $\vec{x} \in S^\perp$.
  Teda aj $\langle \vec{x}, \vec{0} + \vec{t} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{t} \rangle = 0$ pre všetky $\vec{t} \in T$. Čiže $\vec{x} \in T^\perp$. A teda $\vec{x} \in S^\perp \cap T^\perp$.

  Teraz ukážeme, že $S^\perp \cap T^\perp \subset (S + T)^\perp$. Nech $\vec{y} \in S^\perp \cap T^\perp$.
  Teda $\langle \vec{y}, \vec{s} \rangle = 0$ a $\langle \vec{y}, \vec{t} \rangle = 0$ pre všetky $\vec{s} \in S, \vec{t} \in T$. Zoberme ľubovoľný $\vec{z} \in S + T$,
  t. j. $\vec{z} = \vec{u} + \vec{v}$, kde $\vec{u} \in S$ a $\vec{v} \in T$.
  Potom $\langle \vec{y}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{u} + \vec{v} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{v} \rangle = 0 + 0 = 0$. Teda $\vec{y} \in (S + T)^\perp$.

Ortogonálna (ortonormálna) množina vektorov

DEFINÍCIA

Nech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ je euklidovský vektorový priestor. Hovoríme, že množina $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots\} \subset V$ je ortogonálna, ak každé dva jej prvky sú ortogonálne, teda ak $\langle \vec{x}_i, \vec{x}_j \rangle = 0$ pre všetky $i \neq j$.

Ortogonálna množina vektorov je ortonormálna, ak každý jej prvok $\vec{x}_i$ má dĺžku 1, čiže $|\vec{x}_i| = 1$.

Báza $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ euklidovského priestoru je ortogonálna (resp. ortonormálna), ak množina vektorov $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ je ortogonálna (resp. ortonormálna).

Lineárna nezávislosť ortogonálnej množiny

VETA

Konečná ortogonálna množina vektorov neobsahujúca nulový vektor je lineárne nezávislá.
Špeciálne, konečná ortonormálna množina vektorov je lineárne nezávislá.

DÔKAZ

- nech $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\} \subset V \setminus \{\vec{0}\}$ je ortogonálna množina, t. j. $\langle \vec{x}_i, \vec{x}_j \rangle = 0$ pre $i \neq j$
- nech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ sú také, že $\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \cdots + \alpha_k \vec{x}_k = \vec{0}$
- potom $$\begin{aligned} 0 &= \langle \vec{0}, \vec{x}_1 \rangle = \langle \alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \cdots + \alpha_k \vec{x}_k , \vec{x}_1 \rangle \\ &= \alpha_1 \langle \vec{x}_1, \vec{x}_1 \rangle + \alpha_2 \langle \vec{x}_2, \vec{x}_1 \rangle + \cdots + \alpha_k \langle \vec{x}_k, \vec{x}_1 \rangle \\ &= \alpha_1 \underbrace{\langle \vec{x}_1, \vec{x}_1 \rangle}_{>0} + 0 + \cdots + 0 \end{aligned}$$
- z toho dostávame, že $\alpha_1 = 0$
- podobne by sme to urobili pre každý vektor a dostaneme, že $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$ a teda ide o triviálnu kombináciu nulového vektora, čiže množina $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\}$ je lineárne nezávislá

Existencia ortonormálnej bázy

VETA

V každom nenulovom konečne generovanom euklidovskom vektorovom priestore existuje ortonormálna báza.

Poznámka

Metóda konštrukcie takejto bázy sa nazýva Gram-Schmidtova ortogonalizácia.
Podrobne ju opíšeme v dôkaze vety.

Gram-Schmidtova ortogonalizácia

- zoberieme ľubovoľnú bázu $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ priestoru V
- ukážeme, ako od nej prejsť k ortogonálnej báze $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n$ priestoru V a potom k ortonormálnej
- položíme $\vec{y}_1 = \vec{x}_1$
- ak $n = 1$, tak sme týmto dostali ortogonálnu bázu $\vec{y}_1$ priestoru V, príslušnú ortonormálnu bázu tvorí vektor $\frac{\vec{y}_1}{|\vec{y}_1|}$
- ak $n \geq 2$, potom $\vec{y}_2$ hľadáme v tvare $\vec{y}_2 = \vec{x}_2 + \alpha\vec{y}_1$, pričom $\alpha \in \mathbb{R}$ musí byť také, aby $\vec{y}_2 \perp \vec{y}_1$, čiže $\langle \vec{y}_2, \vec{y}_1 \rangle = 0$
- hľadáme α: $$\begin{aligned} \langle \vec{x}_2 + \alpha\vec{y}_1, \vec{y}_1 \rangle &= 0 \\ \langle \vec{x}_2, \vec{y}_1 \rangle + \alpha\langle \vec{y}_1, \vec{y}_1 \rangle &= 0 \\ \alpha &= -\frac{\langle \vec{x}_2, \vec{y}_1 \rangle}{\langle \vec{y}_1, \vec{y}_1 \rangle} \qquad \text{pre } \vec{y}_1 \neq \vec{0} \text{ je určite } \langle \vec{y}_1, \vec{y}_1 \rangle \neq 0 \end{aligned}$$
- dosadíme do $\vec{y}_2 = \vec{x}_2 + \alpha\vec{y}_1$ a dostávame $\vec{y}_2 = \vec{x}_2 - \frac{\langle \vec{x}_2, \vec{y}_1 \rangle}{\langle \vec{y}_1, \vec{y}_1 \rangle}\vec{y}_1$
- pričom $\vec{y}_2 \neq \vec{0}$, lebo $\vec{y}_2 \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2]$ a v jeho vyjadrení ako LK bázových vektorov $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ je pri $\vec{x}_2$ nenulový koeficient (=1)

Gram-Schmidtova ortogonalizácia - pokračovanie

- zároveň $[\vec{y}_1, \vec{y}_2] = [\vec{x}_1, \vec{x}_2]$
- ak $n = 2$, tak sme týmto dostali ortogonálnu bázu $\vec{y}_1, \vec{y}_2$ priestoru V, príslušnú ortonormálnu bázu tvoria vektory $\frac{\vec{y}_1}{|\vec{y}_1|}, \frac{\vec{y}_2}{|\vec{y}_2|}$
- ak $n \geq 3$, potom $\vec{y}_3$ hľadáme v tvare $\vec{y}_3 = \vec{x}_3 + \gamma\vec{y}_1 + \delta\vec{y}_2$, pričom $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ musia byť také, aby $\vec{y}_3 \perp \vec{y}_1$ a $\vec{y}_3 \perp \vec{y}_2$, čiže $\langle\vec{y}_3, \vec{y}_1\rangle = 0$ aj $\langle\vec{y}_3, \vec{y}_2\rangle = 0$
- potom dosadíme a dostávame $\vec{y}_3 \neq \vec{0}$ a $[\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3] = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]$
- matematickou indukciou

  IP: predpokladajme, že sme už skonštruovali navzájom ortogonálne nenulové vektory $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_j$ pričom $j < n$ a zároveň $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_j$ je báza priestoru $[\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_j]$
- potom $\vec{y}_{j+1}$ hľadáme v tvare $\vec{y}_{j+1} = \vec{x}_{j+1} + \beta_1\vec{y}_1 + \beta_2\vec{y}_2 + \cdots + \beta_j\vec{y}_j$, taký, že $\langle\vec{y}_{j+1}, \vec{y}_1\rangle = 0, \ldots, \langle\vec{y}_{j+1}, \vec{y}_j\rangle = 0$

Gram-Schmidtova ortogonalizácia - dokončenie

- hľadané $\beta_1, \dots, \beta_j$ vyrátame z rovníc:

$$0 = \langle \vec{y}_{j+1}, \vec{y}_1 \rangle = \langle \vec{x}_{j+1}, \vec{y}_1 \rangle + \beta_1 \langle \vec{y}_1, \vec{y}_1 \rangle$$
$$0 = \langle \vec{y}_{j+1}, \vec{y}_2 \rangle = \langle \vec{x}_{j+1}, \vec{y}_2 \rangle + \beta_2 \langle \vec{y}_2, \vec{y}_2 \rangle$$
$$\vdots$$
$$0 = \langle \vec{y}_{j+1}, \vec{y}_j \rangle = \langle \vec{x}_{j+1}, \vec{y}_j \rangle + \beta_j \langle \vec{y}_j, \vec{y}_j \rangle$$

  keďže vo všetkých rovniciach je $\langle \vec{y}_k, \vec{y}_l \rangle = 0$ pre $k \neq l$, kde $k, l \leq j$
- z toho dostávame: $\beta_1 = -\frac{\langle \vec{x}_{j+1}, \vec{y}_1 \rangle}{\langle \vec{y}_1, \vec{y}_1 \rangle}, \dots, \beta_j = -\frac{\langle \vec{x}_{j+1}, \vec{y}_j \rangle}{\langle \vec{y}_j, \vec{y}_j \rangle}$
- potom dosadíme a dostávame $\vec{y}_{j+1} \neq \vec{0}$ a $[\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_{j+1}] = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{j+1}]$
- po konečnom počte krokov dostaneme ortogonálnu množinu vektorov $\{\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n\} \subset V \setminus \{\vec{0}\}$ takú, že $[\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n] = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n] = V$
- a teda $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ bude ortogonálnu báza vo V
  a príslušnú ortonormálna bázu tvoria vektory $\frac{\vec{y}_1}{|\vec{y}_1|}, \dots, \frac{\vec{y}_n}{|\vec{y}_n|}$

Príklad hľadania ortonormálnej bázy

PRÍKLAD: Nájdite ortonormálnu bázu v $\mathbb{R}^3$, vychádzajúc z bázy $\{(1,2,1),(1,1,1),(1,-1,2)\}$.

- označme $\vec{x}_1 = (1,2,1), \vec{x}_2 = (1,1,1), \vec{x}_3 = (1,-1,2)$
- $\vec{y}_1 = (1,2,1)$
- $\vec{y}_2 = \vec{x}_2 + \alpha\vec{y}_1 = (1,1,1) + \alpha(1,2,1)$, pričom chceme $\langle \vec{y}_2, \vec{y}_1 \rangle = 0$

  teda $\alpha = -\frac{\langle \vec{x}_2, \vec{y}_1\rangle}{\langle \vec{y}_1, \vec{y}_1\rangle} = -\frac{\langle (1,1,1),(1,2,1)\rangle}{\langle (1,2,1),(1,2,1)\rangle} = -\frac{1.1+1.2+1.1}{1.1+2.2+1.1} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$

  čiže $\vec{y}_2 = (1,1,1) - \frac{2}{3}(1,2,1) = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, ale môžeme zobrať aj jeho nenulový násobok, napr. $\vec{y}_2 = (1,-1,1)$
- $\vec{y}_3 = \vec{x}_3 + \alpha\vec{y}_1 + \beta\vec{y}_2 = (1,-1,2) + \alpha(1,2,1) + \beta(1,-1,1)$,

  pričom chceme $\langle \vec{y}_3, \vec{y}_1 \rangle = 0$ a $\langle \vec{y}_3, \vec{y}_2 \rangle = 0$

  teda $\alpha = -\frac{\langle \vec{x}_3, \vec{y}_1\rangle}{\langle \vec{y}_1, \vec{y}_1\rangle} = -\frac{\langle (1,-1,2),(1,2,1)\rangle}{\langle (1,2,1),(1,2,1)\rangle} = -\frac{1}{6}$ a $\beta = -\frac{\langle \vec{x}_3, \vec{y}_2\rangle}{\langle \vec{y}_2, \vec{y}_2\rangle} = -\frac{\langle (1,-1,2),(1,-1,1)\rangle}{\langle (1,-1,1),(1,-1,1)\rangle} = -\frac{4}{3}$

  čiže $\vec{y}_3 = (1,-1,2) - \frac{1}{6}(1,2,1) - \frac{4}{3}(1,-1,1) = (-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$, ale môžeme zobrať aj jeho nenulový násobok, napr. $\vec{y}_3 = (-1,0,1)$
- ortogonálna báza: $\{(1,2,1),(1,-1,1),(-1,0,1)\}$

  ortonormálna báza: $\{\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)\}$

Zoznam použitých obrázkov

- obr. 1 – 4: B. Pokorná