Ortogonálna projekcia, izometria

Lineárna algebra

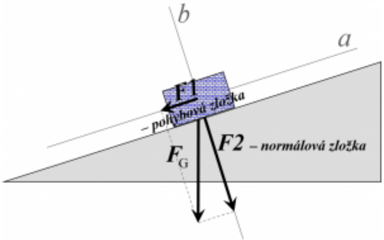
Barbora Pokorná

KAG, FMFI UK

2020

Rozklad vektora do navzájom kolmých smerov

- úlohy vo fyzike:
  Tiažová sila pôsobiaca na teleso šmýkajúce sa po šikmej ploche sa rozloží na
  - normálovú zložku $\vec{F}_2$, ktorá je kolmá na plochu
  - pohybovú zložku $\vec{F}_1$, ktorá smeruje nadol, je rovnobežná s rovinou a spôsobuje pohyb telesa



Obr. 1: Rozklad tiažovej sily $\vec{F}_G$.

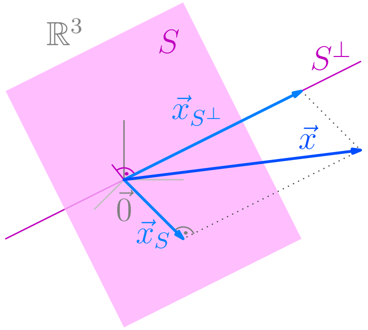
- podobný rozklad vektora sa dá urobiť v každom konečne generovanom euklidovskom priestore

Ortogonálna projekcia

VETA A DEFINÍCIA

Nech $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ je konečne generovaný euklidovský vektorový priestor a nech S je jeho vektorový podpriestor. Potom pre každý vektor $\vec{x} \in V$ existujú jediný vektor $\vec{x}_S \in S$ a jediný vektor $\vec{x}_{S^\perp} \in S^\perp$ také, že $\vec{x} = \vec{x}_S + \vec{x}_{S^\perp}$.

Vektor $\vec{x}_S \in S$ sa nazýva kolmý priemet alebo tiež ortogonálna projekcia vektora $\vec{x}$ do podpriestoru S.



Obr. 2: Vektor $\vec{x} = \vec{x}_S + \vec{x}_{S^\perp}$.

Dôkaz vety

EXISTENCIA vyjadrenia

- nech $\vec{x} \in S$. Potom $\vec{x} = \vec{x} + \vec{0}$, kde $\vec{x} \in S$ a $\vec{0} \in S^\perp$.
- nech $\vec{x} \notin S$. Potom $\vec{x} \neq \vec{0}$, lebo $\vec{0} \in S$.
  Ak $S = \{\vec{0}\}$, tak $S^\perp = V$ a vektor $\vec{x} = \vec{x} + \vec{0}$, kde $\vec{x} \in S^\perp$ a $\vec{0} \in S$.

  Ak $S \neq \{\vec{0}\}$, nech $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$ je ortogonálna báza v S. Keďže $\vec{x} \notin S = [\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k]$, tak vektory $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k, \vec{x}$ sú LN a teda tvoria bázu $(k+1)$-rozmerného podpriestoru $[\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k, \vec{x}]$.
  Ako pri Gram-Schmidtovej ortogonalizácii, nájdeme vektor $\vec{y} = \vec{x} + \alpha_1\vec{a}_1 + \cdots + \alpha_k\vec{a}_k$ taký, že $\vec{y} \perp \vec{a}_1, \ldots, \vec{y} \perp \vec{a}_k$. Určite $\vec{y} \in S^\perp$. Potom $\vec{x} = \underbrace{-\alpha_1\vec{a}_1 - \ldots - \alpha_k\vec{a}_k}_{\in S} + \underbrace{\vec{y}}_{\in S^\perp}$.

JEDNOZNAČNOSŤ vyjadrenia

- nech by pre $\vec{x} \in V$ existovali dve vyjadrenia, že $\vec{x} = \vec{x}_S + \vec{x}_{S^\perp} = \vec{u} + \vec{v}$, kde $\vec{u} \in S$ a $\vec{v} \in S^\perp$
- potom $\vec{x}_S - \vec{u} = \vec{v} - \vec{x}_{S^\perp} =: \vec{z}$, kde $\vec{x}_S - \vec{u} \in S$ a $\vec{v} - \vec{x}_{S^\perp} \in S^\perp$, čiže $\vec{z} \in S \cap S^\perp$.
- vektor $\vec{z}$ je teda kolmý sám na seba a preto $\langle \vec{z}, \vec{z} \rangle = 0 \Rightarrow |\vec{z}|^2 = 0 \Rightarrow |\vec{z}| = 0 \Rightarrow \vec{z} = \vec{0}$
- potom $\vec{x}_S - \vec{u} = \vec{v} - \vec{x}_{S^\perp} = \vec{0}$ a teda $\vec{x}_S = \vec{u}$ a tiež $\vec{x}_{S^\perp} = \vec{v}$.

Príklad hľadania kolmého priemetu vektora

PRÍKLAD: V $\mathbb{R}^4$ nájdite kolmý priemet vektora $\vec{x} = (4, -1, -3, 4)$ do podpriestoru $S = [(1, 0, 0, 3), (1, 2, 2, -1), (1, 1, 1, 1)]$.

RIEŠENIE: Najprv nás zaujíma skutočná dimenzia podpriestoru S, do ktorého zobrazujeme:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim(S) = 2 \text{ a } S = [(1, 0, 0, 3), (0, 1, 1, -2)]$$

Vieme, že existuje jednoznačné vyjadrenie $\vec{x} = \vec{x}_S + \vec{x}_{S^\perp}$

Keďže $\vec{x}_S \in S$, tak $\vec{x}_S = \alpha_1(1, 0, 0, 3) + \alpha_2(0, 1, 1, -2)$

Potom $\vec{x}_{S^\perp} = \vec{x} - \vec{x}_S = (4, -1, -3, 4) - \alpha_1(1, 0, 0, 3) - \alpha_2(0, 1, 1, -2)$
$= (4 - \alpha_1, -1 - \alpha_2, -3 - \alpha_2, 4 - 3\alpha_1 + 2\alpha_2)$

Keďže $\vec{x}_{S^\perp} \in S^\perp$, tak $\vec{x}_{S^\perp} \perp (1, 0, 0, 3)$ a $\vec{x}_{S^\perp} \perp (0, 1, 1, -2)$. Z toho dostávame dve rovnice:

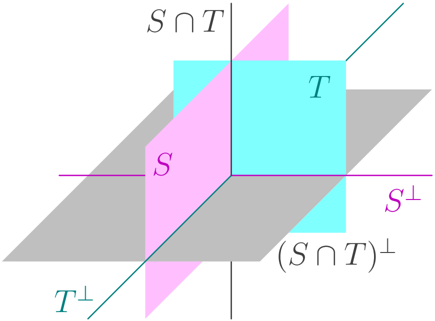
$$\langle \vec{x}_{S^\perp}, (1, 0, 0, 3) \rangle = 0 : \qquad 1.(4 - \alpha_1) + 3(4 - 3\alpha_1 + 2\alpha_2) = 0$$
$$\langle \vec{x}_{S^\perp}, (0, 1, 1, -2) \rangle = 0 : \qquad 1.(-1 - \alpha_2) + 1.(-3 - \alpha_2) - 2(4 - 3\alpha_1 + 2\alpha_2) = 0$$

Riešením sústavy sú $\alpha_1 = 1$ a $\alpha_2 = -1$. Potom $\vec{x}_S = 1(1, 0, 0, 3) - 1(0, 1, 1, -2) = (1, -1, -1, 5)$.

VETA

Nech $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ je konečne generovaný euklidovský vektorový priestor a nech S, T sú jeho vektorové podpriestory. Potom

1. $V = S \oplus S^\perp$
2. $(S^\perp)^\perp = S$
3. $(S \cap T)^\perp = S^\perp + T^\perp$



Obr. 3: $(S \cap T)^\perp = S^\perp + T^\perp$

Dôkaz vlastností

DÔKAZ

1. Každý vektor $\vec{x} \in V$ má jednoznačné vyjadrenie $\vec{x} = \vec{x}_S + \vec{x}_{S^\perp}$, takže $V = S + S^\perp$.
   Zároveň $S \cap S^\perp = \{\vec{0}\}$ (vektor kolmý sám na seba). Preto $V = S \oplus S^\perp$.
2. Najprv ukážeme inklúziu $S \subset (S^\perp)^\perp$.
   Nech vektor $\vec{x} \in S$ je ľubovoľný. Pre každý $\vec{y} \in S^\perp$ máme $\langle \vec{y}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$. A teda podľa definície ortogonálneho doplnku je $\vec{x} \in (S^\perp)^\perp$.

   Teraz ukážeme, že $\dim(S) = \dim((S^\perp)^\perp)$.
   Z dokázanej časti 1 máme $V = S \oplus S^\perp$. Z dôsledku Grassmannovej formuly pre priamy súčet vektorových podpriestorov dostávame $\dim(V) = \dim(S) + \dim(S^\perp)$.
   Tiež platí $V = S^\perp \oplus (S^\perp)^\perp$ a teda $\dim(V) = \dim(S^\perp) + \dim((S^\perp)^\perp)$.
   Porovnaním oboch vzťahov získame $\dim(S) = \dim((S^\perp)^\perp)$.

   Záver: Zo vzťahov $S \subset (S^\perp)^\perp$ a $\dim(S) = \dim((S^\perp)^\perp)$ vyplýva, že $(S^\perp)^\perp = S$.
3. Ak A, B sú VPP, tak $(A + B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$. Zoberme $A = S^\perp$ a $B = T^\perp$. Potom $(S^\perp + T^\perp)^\perp = (S^\perp)^\perp \cap (T^\perp)^\perp \overset{\text{časť 2}}{=} S \cap T$. Čiže $(S \cap T)^\perp = ((S^\perp + T^\perp)^\perp)^\perp \overset{\text{časť 2}}{=} S^\perp + T^\perp$.

Ortogonálna projekcia ako lineárna transformácia

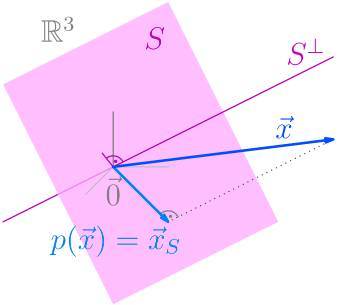
DEFINÍCIA

Nech $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ je konečne generovaný euklidovský vektorový priestor a nech S je jeho vektorový podpriestor. Nech pre vektor $\vec{x} \in V$ je jeho jediný rozklad $\vec{x} = \vec{x}_S + \vec{x}_{S^\perp}$, kde $\vec{x}_S \in S$ a $\vec{x}_{S^\perp} \in S^\perp$. Potom zobrazenie $p\colon V \to V$ s predpisom $p(\vec{x}) = \vec{x}_S$ sa nazýva ortogonálna projekcia priestoru V na podpriestor S.

VETA

Nech $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ je konečne generovaný euklidovský vektorový priestor a nech S je jeho VPP.
Nech $p\colon V \to V$ je zobrazenie ortogonálnej projekcie priestoru V na podpriestor S. Potom

1. $p\colon V \to V$ je lineárne zobrazenie
2. $\mathrm{Im}(p) = S$
3. $p \circ p = p$



Obr. 4: Zobrazenie p.

Dôkaz vety

DÔKAZ

1. nech $\vec{x}, \vec{y} \in V$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sú ľubovoľné. Vieme, že existujú jednoznačné vyjadrenia $\vec{x} = \vec{x}_S + \vec{x}_{S^\perp}$ a $\vec{y} = \vec{y}_S + \vec{y}_{S^\perp}$. A teda $p(\vec{x}) = \vec{x}_S$ a $p(\vec{y}) = \vec{y}_S$.
   Zoberme $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} = \alpha(\vec{x}_S + \vec{x}_{S^\perp}) + \beta(\vec{y}_S + \vec{y}_{S^\perp}) = \underbrace{\alpha\vec{x}_S + \beta\vec{y}_S}_{\in S} + \underbrace{\alpha\vec{x}_{S^\perp} + \beta\vec{y}_{S^\perp}}_{\in S^\perp}$.
   Potom z jednoznačnosti vyjadrenia v tomto tvare:
   $p(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha\vec{x}_S + \beta\vec{y}_S = \alpha p(\vec{x}) + \beta p(\vec{y})$. Čím sme overili lineárnosť zobrazenia p.

2. Ukážeme, že $\mathrm{Im}(p) \subset S$.
   Zoberme ľubovoľné $\vec{x} \in V$. Potom $p(\vec{x}) \in p(V) = \mathrm{Im}(p)$, ale tiež $p(\vec{x}) \in S$.
   Teraz ukážeme, že $S \subset \mathrm{Im}(p)$.
   Zoberme ľubovoľné $\vec{s} \in S$. Potom $p(\vec{s}) = \vec{s}$ a teda $p(\vec{s}) \in p(V) = \mathrm{Im}(p)$.
   Záver: $\mathrm{Im}(p) = S$

3. pre $\forall \vec{x} \in V$ máme $(p \circ p)(\vec{x}) = p(p(\vec{x})) = p(\vec{x}_S) = \vec{x}_S = p(\vec{x})$

Príklad hľadania matice ortogonálnej projekcie

PRÍKLAD: V $\mathbb{R}^3$ so štandardným skalárnym súčinom nájdite maticu ortogonálnej projekcie do podpriestoru $S = [(1,1,-1),(2,1,0)]$.

RIEŠENIE: Hľadáme maticu ortogonálnej projekcie $p\colon \mathbb{R}^3 \to S$. Vieme, že p je lineárne zobrazenie, teda je jednoznačne určené troma dvojicami vektorov vzor – obraz. Môžeme použiť trojicu

$$\begin{array}{ccc} (1,1,-1) & \to & (1,1,-1) \\ (2,1,0) & \to & (2,1,0) \\ \text{ľub. } \vec{y} \in S^\perp & \to & (0,0,0) \end{array}$$

pretože všetky $\vec{x} \in S$ sa zobrazia samé na seba a všetky $\vec{y} \in S^\perp$ sa zobrazia na $\vec{0}$

Potrebujeme nájsť nejaký $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in S^\perp$. Určite $\vec{y} \perp (1,1,-1)$ a $\vec{y} \perp (2,1,0)$. Čiže

$$\begin{array}{rcl} \langle \vec{y}, (1,1,-1)\rangle & = & 0 \\ \langle \vec{y}, (2,1,0)\rangle & = & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} y_1 + y_2 - y_3 = 0 \\ 2y_1 + y_2 \qquad\ = 0 \end{array}$$

riešenie $S_H = \{(-\frac{s}{2}, s, \frac{s}{2}), s \in \mathbb{R}\} = S^\perp$

Môžeme vybrať ľubovoľné s, napríklad pre $s = 2$ získame $\vec{y} = (-1, 2, 1)$. Potom

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{array}\right) \Rightarrow P = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

Euklidovský izomorfizmus

DEFINÍCIA

Nech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ a $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ sú euklidovské vektorové priestory.
Euklidovský izomorfizmus alebo izometria priestoru V na priestor W je lineárny izomorfizmus $f\colon V \to W$ taký, že $\langle f(\vec{x}), f(\vec{y}) \rangle_1 = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ pre všetky $\vec{x}, \vec{y} \in V$.

Ak existuje euklidovský izomorfizmus medzi dvoma euklidovskými priestormi, tak hovoríme, že sú euklidovsky izomorfné.

VETA

Každý n-rozmerný euklidovský vektorový priestor je euklidovsky izomorfný s priestorom $\mathbb{R}^n$ so štandardným skalárnym súčinom.

Ortogonálne matice a grupa $O(n)$

DEFINÍCIA

Matica $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ pre $n \in \mathbb{N}$ je ortogonálna, ak $A.A^T = I_n$.
Ortogonálna matica A je špeciálna ortogonálna, ak jej determinant je 1.

PRÍKLAD

Matica otočenia priestoru $\mathbb{R}^2$ okolo $(0,0)$ o uhol $\varphi \in [0,\pi]$: $\quad A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

$$A_\varphi . A_\varphi^T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(A_\varphi) = \cos^2\varphi - (-\sin^2\varphi) = 1$$

Matica A_φ je špeciálna ortogonálna matica.

VETA A DEFINÍCIA

Označme $O(n)$ množinu všetkých ortogonálnych matíc typu $n \times n$ a $SO(n)$ množinu všetkých špeciálnych ortogonálnych matíc typu $n \times n$. Množiny $O(n)$ a $SO(n)$ sú grupy vzhľadom na násobenie matíc. Samozrejme, $SO(n)$ je podgrupa grupy $O(n)$.
$O(n)$ sa nazýva ortogonálna grupa a $SO(n)$ sa nazýva špeciálna ortogonálna grupa.

Matica euklidovského izomorfizmu

VETA

Nech $A \in O(n)$. Potom pre $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ máme $\langle \vec{x}.A, \vec{y}.A \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$.

DÔSLEDOK

Grupa $O(n)$ sa zhoduje s množinou matíc všetkých euklidovských izomorfizmov $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Poznámka:

Euklidovský izomorfizmus (izometria) je

- lineárne zobrazenie
- bijektívne
- zachovávajúce skalárny súčin

Grupa $O(2)$

Majme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$.

Ak $A \in O(2)$, tak $A.A^T = I_n$, čiže pre $A.A^T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Odtiaľ dostávame podmienky $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$, $ac + bd = 0$.

Úpravou rovnice $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = 1$ a využitím predošlých vzťahov ukážeme, že $b^2 + d^2 = 1$.

Počítajme

$$\begin{aligned} \det^2(A) &= (ad - bc)^2 = a^2 d^2 - 2adbc + b^2 c^2 = (1 - b^2)d^2 - 2(-bd)\,db + b^2(1 - d^2) \\ &= b^2 + d^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{pre } A \in O(2) \text{ je } \det(A) = \pm 1. \end{aligned}$$

Pre $\det(A) = 1$ – matica otočenia priestoru $\mathbb{R}^2$ okolo $(0,0)$ o uhol $\alpha \in [0, \pi]$
v smere hodinových ručičiek: $A = \mathrm{Rot}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$
alebo proti smeru hodinových ručičiek

Pre $\det(A) = -1$ – matica zrkadlenia priestoru $\mathbb{R}^2$ podľa priamky prechádzajúcej cez $(0,0)$
zvierajúcej s osou x uhol θ: $A = \mathrm{Ref}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$

Otočenia a zrkadlenia sú izometrie euklidovskej roviny.

Zoznam použitých obrázkov

- obr. 1: https://rebelovaskoladoma.estranky.sk/clanky/fyzika/mechanika–sila–tiazova-sila-a-trenie.html
- obr. 2 – 4: B. Pokorná